1. 다음 중 치역이 실수 전체의 집합인 것은 무엇인가?

① $y=2x$ ② $y=-x^2$ ③ $y=x^2-2$

④ $y=-x^2+2x$ ⑤ $y=3$

해설

② $y \le 0$ ③ $y \ge -2$ ④ $y \le 1$ ⑤ $y=3$

2. $x = 4 - \sqrt{3}$일 때, $x^2 - 8x + 15$의 값을 구하시오.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

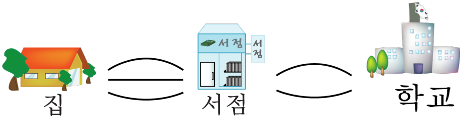
해설

$x = 4 - \sqrt{3}$에서 $x - 4 = -\sqrt{3}$의 양변을 제곱하면, $(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16 = 3$이므로

$x^2 - 8x = -13$

$\therefore\ x^2 - 8x + 15 = -13 + 15 = 2$

3. 건호는 집에서 학교에 가는 길에 서점에 들러 문제집을 구입하려고 한다. 집에서 학교까지 가는 방법은 모두 몇 가지인가?



▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 6 개

해설

집에서 서점까지 가는 길의 가지수는 3 가지, 서점에서 학교까지 가는 길의 가지수는 2 가지집에서 반드시 서점에 들러 학교를 가야하므로 곱의 법칙을 이용하여

$\therefore\ 3 \times 2 = 6$ (가지)

해설

집에서 서점까지 가는 길을 a, b, c 라 하고 서점에서 학교에 가는 길을 , 이라고 하면집에서 서점을 들러 학교에 가는 방법은

(a , ㄱ) , (a , ㄴ) , (b , ㄱ) ,

(b , ㄴ) , (c , ㄱ) , (c , ㄴ)

$\therefore$ 6 (가지)

4. 실수 x 에 대하여 $x+1=0$ 이 $x^2+2x+a=0$ 이 되기 위한 충분조건일 때, 상수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x+1=0$ 이 $x^2+2x+a=0$ 이 되기 위한 충분조건이므로 명제 '$x+1=0$ 이면 $x^2+2x+a=0$ 이다.' 가 참이다.

$x+1=0$ 에서 $x=-1$ 을 $x^2+2x+a=0$ 에 대입하면

$(-1)^2+2\cdot(-1)+a=1-2+a=0$

$\therefore a=1$

5. 다음 두 식의 대소를 바르게 비교한 것은?

$$A = 3x^2 - xy + 2y^2$$
$$B = 2x^2 + 3xy - 3y^2$$

① $A < B$　　② $A \leq B$　　③ $A > B$

④ $A \geq B$　　⑤ $A = B$

해설

$$\begin{aligned} A - B &= 3x^2 - xy + 2y^2 - (2x^2 + 3xy - 3y^2) \\ &= x^2 - 4xy + 5y^2 \\ &= x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 \\ &= (x - 2y)^2 + y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $A - B \geq 0$이므로 $A \geq B$

6. n이 자연수 일 때, $2^{10n}, 1000^n$ 의 대소를 비교하면?

① $2^{10n} < 1000^n$ ② $2^{10n} \leq 1000^n$ ③ $2^{10n} > 1000^n$

④ $2^{10n} \geq 1000^n$ ⑤ $2^{10n} = 1000^n$

해설

$2^{10n} > 0,\ 1000^n > 0$ 이고, n이 자연수이므로

$$\frac{2^{10n}}{1000^n} = \frac{(2^{10})^n}{1000^n} = \left(\frac{2^{10}}{1000}\right)^n = \left(\frac{1024}{1000}\right)^n > 1$$

$\therefore 2^{10n} > 1000^n$

7. 실수 x, y, z에 대하여 $x^2+y^2+z^2=6$일 때 $x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z$의 최댓값 M과 최솟값 m은?

① $M=3,\ m=0$
② $M=3, m=-3$
③ $M=6, m=0$
④ $M=6, m=-6$
⑤ $M=6, m=-12$

해설

x, y, z가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$\left\{1+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2\right\}(x^2+y^2+z^2)$
$\geq (x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z)^2$
$36 \geq (x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z)^2$
$-6 \leq x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z \leq 6$
$\therefore M=6,\ m=-6$

8. 자연수 전체의 집합 N에 대하여 함수 $f: \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ 을 $f(n) =$ (n의 양의 약수의 개수)로 정의한다. 이 때, 집합 $\mathrm{A} = \{n | f(n) = 2\}$에 대하여 다음 중 옳은 것은 무엇인가?

① $1 \in \mathrm{A}$　② $2 \in \mathrm{A}$　③ $4 \in \mathrm{A}$

④ $6 \in \mathrm{A}$　⑤ $10 \in \mathrm{A}$

해설

$f(n) = 2$란 소수를 말함. 따라서 정답은 ②

9. 함수 $y = \sqrt{x-1} + 2$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 $g(3)$ 의 값은?

① 3　　② 2　　③ 0

④ $2 + \sqrt{2}$　　⑤ 4

해설

$y = \sqrt{x-1} + 2$ 에서

$y - 2 = \sqrt{x-1}$ 이 식의 양변을 제곱하면

$y^2 - 4y + 4 = x - 1$

$x = y^2 - 4y + 4 + 1$

따라서 $g(x) = x^2 - 4x + 5 \ (x \geq 2)$ 이므로

$g(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 5 = 9 - 12 + 5 = 2$

10. 216 과 360 의 공약수의 개수는 모두 몇 개인가?

① 8 개 ② 9 개 ③ 12 개 ④ 15 개 ⑤ 16 개

해설

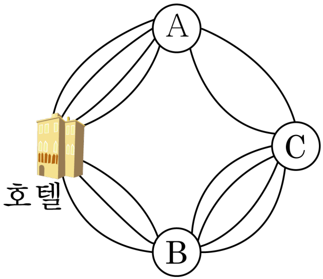
두 수의 공약수는 두 수의 최대공약수의 약수이므로

$216 = 2^3 \times 3^3$,

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ 에서 G.C.D.는 $2^3 \times 3^2$

따라서 공약수의 개수는 $(3+1)(2+1) = 12$

11. 영우는 호텔에서 출발하여 3개의 관광지 A, B, C 를 관광한 뒤 다시 호텔로 돌아오려고 한다. 호텔과 관광지간의 도로가 오른쪽 그림과 같을 때 호텔을 출발하여 모든 관광지를 한 번씩만 거치고, 호텔로 다시 돌아오는 방법의 수는?



① 144　② 152　③ 176　④ 184　⑤ 192

해설

(호텔 $\rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow$ 호텔)로
가는 길의 가지수: $4 \times 2 \times 4 \times 3 = 96$
(호텔 $\rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow$ 호텔)로
가는 길의 가지수: $3 \times 4 \times 2 \times 4 = 96$
$\therefore 96 + 96 = 192$

12. 남학생 4 명, 여학생 3 명이 한 줄로 서서 등산을 할 때, 특정인 2 명이 이웃하여 서는 방법은 몇 가지인가?

① $7!$ ② $7! \times 2!$ ③ $6! \times 2!$

④ $6!$ ⑤ $5! \times 2!$

해설

특정인 2 명을 한 묶음으로 생각하여 6 명을 일렬로 세우는 방법의 수가 $6!$,
묶음 안에서 2 명이 자리를 바꾸는 방법의 수가 $2!$ 이므로, 구하는 경우의 수는 $6! \times 2!$ (가지)

13. 빨강, 주황, 노랑, 초록, 파랑, 남색, 보라의 7가지 색 중에서 4가지를 뽑아 그림을 색칠하려고 한다. 빨강을 포함하여 뽑는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 20 가지

해설

$_6C_3 = 20$

14. 실수 x에 대하여 다음 명제가 참일 때, a의 최솟값을 구하여라.

$x > a$이면 $\lvert x-2 \rvert > 4$

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

주어진 명제가 참이므로

대우 '$\lvert x-2 \rvert \le 4$ 이면 $x \le a$ 이다.' 가 참이다.

$\lvert x-2 \rvert \le 4$ 에서

$-4 \le x-2 \le 4, \quad -2 \le x \le 6$이므로

$\therefore \ a \ge 6$

따라서 a 의 최솟값은 6이다.

15. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, q 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 충분조건, r 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 s 이기 위한 어떤 조건인지 써라.

▶ 답 : ________ 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$
q 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow q$
q 는 s 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow s$
r 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow r$
$s \Rightarrow r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 에서 $s \Rightarrow p$
그러나 $p \Rightarrow s$인지는 알 수 없다.
$\therefore$ p는 s이기 위한 필요조건이다.

16. 다음은 실수 a, b 에 대하여 $|a+b| \le |a|+|b|$ 이성립함을 증명한 것이다.

(증명) $|a+b| \ge 0, |a|+|b| \ge 0$ 이므로
$|a+b|^2 \le (|a|+|b|)^2$ 을 증명하면 된다.
$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= a^2 + 2|ab| + b^2 - a^2 - 2ab - b^2$
$= 2(|ab| - ab)$
그런데, (가) 이므로 $2(|ab|-ab) \ge 0$
$\therefore\ |a+b|^2 \le (|a|+|b|)^2$
따라서 $|a+b| \le |a|+|b|$
여기서, 등호가 성립하는 경우는 (나) 일 때,
즉, $ab \ge 0$ 일 때이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나) 에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① $|ab| \ge ab, a = b$
② $|ab| \ge ab, |ab| = ab$
③ $|ab| \le ab, |ab| = ab$
④ $|ab| = ab, a = 0$
⑤ $|ab| = ab, a = b$

해설

(가) : $|ab| \ge ab$($\because$ $|ab|$는 항상 양수)
(나) : $2(|ab|-ab) = 0$ 일 때, 즉 $|ab| = ab$

17. 모든 실수 x, y에 대하여 $x^2 + 2axy + by^2 \geq 0$이 성립하기 위한 실수 a, b의 조건은?

① $a \leq b^2$　② $b^2 \leq a$　③ $a^2 \leq b$

④ $b \leq a^2$　⑤ $b \leq 4a^2$

해설

$x^2 + 2axy + by^2 \geq 0$에서 양변을 y^2으로 나누면

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2a\left(\frac{x}{y}\right) + b \geq 0$$

모든 실수 x, y에 대해 성립하려면

$$\frac{D}{4} = a^2 - b \leq 0$$

$\therefore a^2 \leq b$

18. 함수 $f(x)$가 $f(2x-1)=x+2$ 일 때, $f(3)$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$2x-1=3$ 으로 놓으면 $x=2$

$\therefore\ f(3)=4$

19. 함수 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 에 대하여 $f^{101}(-1)$ 의 값은? (단, $f^n = f\circ f\circ\cdots\circ f$)

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$f(-1)=\dfrac{1}{2},\ \ f^2(-1)=2,\ f^3(-1)=-1,\quad f^4(-1)=\dfrac{1}{2}\quad\cdots$

주기가 3 으로 반복되므로

$f^{101}=(f^3)^{33}\circ f^2=f^2=2$

20. 두 함수 $f(x) = 2x-1, g(x) = x+2$ 에 대하여 $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$ 를 구하면?

① $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ ③ $2x-\frac{1}{2}$

④ $2x+1$ ⑤ $2x+2$

해설

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x-1) = 2x-1+2$$
$$= 2x+1$$

$(g \circ f)(x) = y$ 라 하면 $y = 2x+1$ 에서 $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

21. $6 \cdot {}_{n}C_{2} = 5 \cdot {}_{n+1}C_{2}$를 만족하는 자연수 n의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 11$

해설

$6 \cdot {}_{n}C_{2} = 5 \cdot {}_{n+1}C_{2}$에서

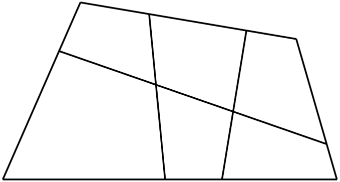
$$6 \cdot \frac{n(n-1)}{2!} = 5 \cdot \frac{(n+1)n}{2!}$$

$6n^2 - 6n - 5n^2 - 5n = 0$

$n^2 - 11n = 0,\ n(n-11) = 0$

$\therefore\ n = 11 (\because n \geq 2)$

22. 아래 그림과 같이 가로로 3개의 선분과 세로로 4개의 선분이 만나고 있다. 만들 수 있는 사각형의 개수를 구하여라.



▶ **답 :** ____개

▷ **정답 :** 18개

해설

3개의 가로선 중 2개를 택하고, 4개의 세로선 중 2개를 택하면 사각형이 결정된다.
따라서 구하는 사각형의 개수는
${}_3C_2 \times {}_4C_2 = 3 \times 6 = 18$

23. 서로 다른 15 종류의 꽃이 있다. 5개씩 세 사람에게 나누어 주는 방법은 몇 가지인가?

① $_{15}C_5 \times_{10} C_5 \times_5 C_5$

② $_{15}C_5 \times_{10} C_5 \times_5 C_5 \times \frac{1}{3!}$

③ $_{15}C_5 \times_{10} C_5 \times_5 C_5 \times 3!$

④ $_{15}C_5 \times_{10} C_5 \times_5 C_5 \times \frac{1}{3!} \times 3!$

⑤ $_{15}C_5 \times_{10} C_5$

해설

5 개씩 3 뭉치로 나누고 다시 세 사람에게 나누어 주므로

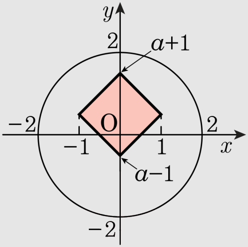
$_{15}C_5 \times_{10} C_5 \times_5 C_5 \times \frac{1}{3!} \times 3! = 756756$ (가지)

24. 두 조건 $p : x^2 + y^2 \le 4$, $q : |x| + |y - a| \le 1$에 대하여 q는 p이기 위한 충분조건일 때, a의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < a < 1$　② $-2 < a < 2$　③ $-2 \le a \le 1$
④ $-1 \le a \le 1$　⑤ $-2 \le a \le 2$

해설

두 조건 $p : x^2 + y^2 \le 4$,
$q : |x| + |y - a| \le 1$ 에 대하여
q 는 p 이기 위한 충분조건이므로
각각의 진리집합을 P, Q라 하면 $Q \subset P$
이다.



$x^2 + y^2 = 4$ 는 중심이 원점이고
반지름의 길이가 2인 원이고,
$|x| + |y - a| = 1$ 의 그래프는
$|x| + |y| = 1$ 의 그래프를
y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.
이 때 $P = \{(x,\ y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$
$Q = \{(x,\ y) \mid |x| + |y - a| \le 1\}$ 이 나타내는 영역은 다음 그림과 같다.
따라서 $Q \subset P$이려면 다음 그림에서
$a + 1 \le 2$, $a - 1 \ge -2$
$\therefore -1 \le a \le 1$

25. $a : b = c : d$일 때, [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $abcd \neq 0$, $b+2d \neq 0$, $a-2b \neq 0$, $c-3d \neq 0$이다.)

보기

㉠ $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$

㉡ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a+2c}{b+2d}$

㉢ $\dfrac{a+2b}{a-2b} = \dfrac{c+3d}{c-3d}$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} \cdots$ 참

㉡ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a+2c}{b+2d} \Rightarrow a(b+2d) = b(a+2c)$

$2ad = 2bc,\ ad = bc \cdots$ 참

㉢ $(a+2b)(c-3d) = (c+3d)(a-2b)$

$4bc = 6ad \cdots$ 거짓