

1. $p : x = 3$, $q : x^2 = 3x$ 에서 p 는 q 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

조건 p , q 의 진리집합을 각각 P , Q 라 하면 $P = \{3\}$, $Q = \{0, 3\}$
이므로 $P \subset Q$, $Q \not\subset P \therefore$ 충분조건

2. 두 집합 $X = \{-2, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ 에 대하여 다음 대응 중 X 에서 Y 로의 함수인 것은?

① $x \rightarrow x + 1$

② $x \rightarrow x^2$

③ $x \rightarrow x - 1$

④ $x \rightarrow x + 2$

⑤ $x \rightarrow 2x + 1$

해설

각각의 치역을 구하면

① $\{-1, 1, 2\}$

② $\{0, 1, 4\}$

③ $\{-3, -1, 0\}$

④ $\{0, 2, 3\}$

⑤ $\{-3, 1, 3\}$

따라서 주어진 조건을 만족하는 함수는 ④ 이다.

3. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = |x - 2|$ 으로 주어질 때, 다음 중 $\{f(x) | x \in X\}$ 의 원소가 아닌 것은?

① 0

② 1

③ 2

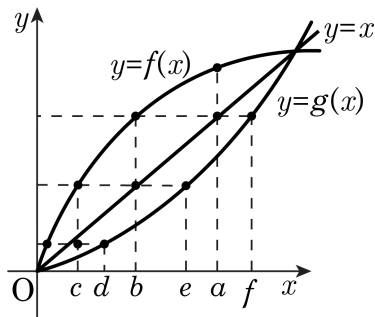
④ 3

⑤ 4

해설

정의역을 X 로 하는 $f(x)$ 의 치역은 $\{0, 1, 2, 3\}$

4. 다음 그림은 세 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = x$ 의 그래프이다. 이때, $(f \circ f \circ g)^{-1}(a)$ 의 값은?



① a

② b

③ c

④ d

⑤ e

해설

$(f \circ f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1} \dots \dots \textcircled{\Gamma}$ 이고

$f^{-1}(a) = k$ 라 하면 $f(k) = a$ 에서 $k = b$

$\therefore f^{-1}(a) = b \dots \dots \textcircled{\text{L}}$

$f^{-1}(b) = l$ 이라 하면 $f(l) = b$ 에서 $l = c$

$\therefore f^{-1}(b) = c \dots \dots \textcircled{\text{E}}$

$g^{-1}(c) = m$ 이라 하면 $g(m) = c$ 에서 $m = d$

$\therefore g^{-1}(c) = d \dots \dots \textcircled{\text{E}}$

$\textcircled{\Gamma}, \textcircled{\text{L}}, \textcircled{\text{E}}, \textcircled{\text{E}}$ 에서

$(f \circ f \circ g)^{-1} = (g^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(a)$

$= g^{-1}[f^{-1}\{f^{-1}(a)\}]$

$= g^{-1}\{f^{-1}(b)\} = g^{-1}(c) = d$

5. $\frac{1}{\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2} - 1}}}$ 의 값은?

① 0

② 1

③ $\sqrt{2} - 1$

④ $\sqrt{2} + 1$

⑤ 2

해설

$$\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} - (\sqrt{2} + 1) = -1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} - (-1)} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$$

6. $a > 0$, $b < 0$ 일 때, $\sqrt{a^2 b^2} = \square$ 이다. $\square$ 에 알맞은 식을 써넣어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-ab$

해설

$a^2 > 0$, $b^2 > 0$ 이므로

$$\sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{a^2} \sqrt{b^2} = |a||b|$$

$a > 0$ 일 때, $|a| = a$ 이고

$b < 0$ 일 때, $|b| = -b$

따라서 $\sqrt{a^2 b^2} = a \cdot (-b) = -ab$

7. 144의 양의 약수의 개수는?

- ① 12개 ② 15개 ③ 20개 ④ 24개 ⑤ 32개

해설

$$144 = 2^4 \cdot 3^2$$

$$\therefore (\text{약수의 개수}) = (4 + 1) \times (2 + 1) = 15$$

8. ${}_7P_1 \cdot 3!$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 42

해설

$$7 \times (3 \times 2 \times 1) = 42$$

9. 다음 명제의 대우로 알맞은 것은?

‘ $a+b$ 가 홀수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.’

- ① $a+b$ 가 짝수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.
- ② a, b 모두 짝수이거나 또는 홀수이면 $a+b$ 가 짝수이다.
- ③ a, b 중 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이면, $a+b$ 가 짝수이다.
- ④ a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이면, $a+b$ 가 홀수이다.
- ⑤ a, b 중 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이면, $a+b$ 가 홀수이다.

해설

대우 : $a+b$ 가 짝수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.

10. 명제 p, q, r 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, r 은 q 이기 위한 충분조건일 때, p 는 r 이기 위한 무슨 조건인가?

① 필요

② 충분

③ 필요충분

④ 아무 조건도 아니다.

⑤ q 에 따라 다르다.

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $p \Leftarrow q$,
즉 $q \Rightarrow p$ 가 성립하고 r 은 q 이기 위한 충분조건,
즉 $r \Rightarrow q$ 가 성립하므로 $r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 이다.
그러나 $p \Rightarrow r$ 인지는 알 수 없다.
따라서 $r \Rightarrow p$ 이므로 p 는 r 이기 위한 필요조건이다.

11. $x > y > 0$ 인 실수 x, y 에 대하여 $\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y}$ 의 대소를 비교하면?

① $\frac{x}{1+x} < \frac{y}{1+y}$

② $\frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y}$

③ $\frac{x}{1+x} > \frac{y}{1+y}$

④ $\frac{x}{1+x} \geq \frac{y}{1+y}$

⑤ $\frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y}$

해설

$$A = \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \text{ 이라 하면}$$

$$A = \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} = \frac{x(1+y) - y(1+x)}{(1+x)(1+y)}$$

$$= \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} > 0$$

$$\text{따라서 } \therefore \frac{x}{1+x} > \frac{y}{1+y}$$

12. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 $|a - b| > |a| - |b|$ 가 성립할 필요충분조건인 것은?

① $ab \leq 0$

② $ab \geq 0$

③ $a + b \geq 0$

④ $ab < 0$

⑤ $a - b > 0$

해설

$|a - b| > ||a| - |b||$ 에 대하여

$$(a - b)^2 - (||a| - |b||)^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - 2|a||b| + b^2)$$

$$= -2ab + 2|a||b| > 0 \text{ 이려면}$$

a 와 b 가 서로 부호가 반대이어야 한다.

따라서 $ab < 0$

13. 자연수 n 에 대하여 2^{4n} , 3^{3n} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $2^{4n} < 3^{3n}$

② $2^{4n} > 3^{3n}$

③ $2^{4n} \leq 3^{3n}$

④ $2^{4n} \geq 3^{3n}$

⑤ $2^{4n} = 3^{3n}$

해설

$$\frac{2^{4n}}{3^{3n}} = \left(\frac{2^4}{3^3}\right)^n = \left(\frac{16}{27}\right)^n < 1$$

$$\therefore 2^{4n} < 3^{3n}$$

14. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 부등식 $|a+b| \leq |a|+|b|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 아래 과정에서 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

증명

$$(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2$$

$$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2$$

$$= 2(\quad \text{㉠} \quad) \geq 0$$

$$\therefore (|a| + |b|)^2 \geq |a + b|^2$$

그런데 $|a| + |b| \geq 0$, $|a + b| \geq 0$ 이므로

$|a| + |b| \geq |a + b|$ (단, 등호는 (㉡), 즉 (㉢)일 때, 성립)

① $|ab| + ab, |ab| = ab, ab \leq 0$

② $|ab| + ab, |ab| = -ab, ab \geq 0$

③ $|ab| - ab, |ab| = -ab, ab \leq 0$

④ $|ab| - ab, |ab| = ab, ab \geq 0$

⑤ $|ab| - ab, |ab| = ab, ab \leq 0$

해설

$$\text{㉠} : |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2$$

$$= a^2 + 2|a||b| + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab$$

$$= 2(|ab| - ab)$$

㉡ : 등호는 $|ab| - ab = 0$ 일 때 성립

$$\Rightarrow |ab| = ab$$

㉢ : $|ab| = ab$ 이려면 $ab \geq 0$ 이어야 한다

15. 양수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2 = 1$ 을 만족할 때, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 의 최솟값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$a^2 > 0, b^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab$$

(단, 등호는 $a^2 = b^2$ 일 때 성립)

그런데 $a^2 + b^2 = 1$ 이므로 $1 \geq 2ab$

$$\therefore ab \leq \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{a^2} > 0, \frac{1}{b^2} > 0$ 이므로 산술평균 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2}}$$

$$\frac{2}{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

(단, 등호는 $a^2 = b^2$ 일 때 성립)

따라서 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 의 최솟값은 4이다.

16. $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} \neq 0$ 일 때, $\frac{x^2 - 8xy + y^2}{x^2 - y^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = a \neq 0 \text{ 라 하면}$$

$$x = 2a, y = 3a$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 8xy + y^2}{x^2 - y^2} &= \frac{4a^2 - 48a^2 + 9a^2}{4a^2 - 9a^2} \\ &= \frac{-35a^2}{-5a^2} = 7 \end{aligned}$$

17. 무리함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① 정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$ 이다.

② 치역은 $\{y \mid y \geq 0\}$ 이다.

③ $y = -\sqrt{ax}$ 와 x 축에 대하여 대칭이다.

④ $y = \sqrt{-ax}$ 와 y 축에 대하여 대칭이다.

⑤ $a > 0$ 이면 원점과 제 1사분면을 지난다.

해설

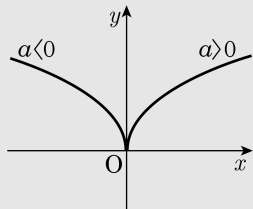
$a > 0$ 일 때와 $a < 0$ 일 때의 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

그림에서 ②,③,④,⑤는 참임을 알 수 있다.

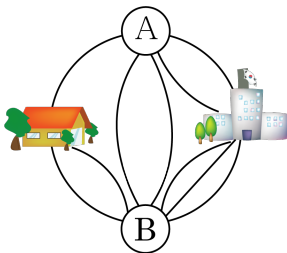
그러나 $a > 0$ 일 때의 정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$

$a < 0$ 일 때의 정의역은 $\{x \mid x \leq 0\}$ 이므로

①은 틀린 것이다.



18. 집과 학교 사이에는 그림과 같이 길이 놓여 있을 때, 집에서 학교로 가는 방법의 수는? (단, 같은 지점을 두 번 지나지 않는다.)



- ① 22 ② 34 ③ 47 ④ 54 ⑤ 66

해설

(1) 집 $\rightarrow A \rightarrow$ 학교 : $1 \times 2 = 2$

(2) 집 $\rightarrow B \rightarrow$ 학교 : $2 \times 3 = 6$

(3) 집 $\rightarrow A \rightarrow B \rightarrow$ 학교 : $1 \times 2 \times 3 = 6$

(4) 집 $\rightarrow B \rightarrow A \rightarrow$ 학교 : $2 \times 2 \times 2 = 8$

$\therefore 2 + 6 + 6 + 8 = 22$

19. 1, 2, 3 으로 만들 수 있는 세 자리의 자연수는 27개가 있다. 이 중에서 다음 규칙을 만족시키는 세 자리의 자연수의 개수를 구하여라.

(가) 1 바로 다음에는 3 이다.

(나) 2 바로 다음에는 1 또는 3 이다.

(다) 3 바로 다음에는 1, 2 또는 3 이다.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 13가지

해설

조건에 맞는 세 자리수는 131, 132, 133, 213, 231, 232, 233, 313, 321, 323, 331, 332, 333 이므로 13 가지이다.

20. 크기가 서로 다른 오렌지 10 개 중에서 3 개를 선택할 때, 크기가 가장 큰 오렌지 1 개가 반드시 포함되는 경우의 수는?



① 36

② 40

③ 44

④ 48

⑤ 52

해설

오렌지 9 개 중 2 개를 뽑는 경우의 수와 같다.

$$\therefore {}_9C_2 = 36$$

21. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 f 는 X 에서 X 로의 일대일 대응이다. $f(1) = 4$ 일 때, $f(2) + f(3) + f(4)$ 의 값은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

$X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여

함수 f 는 X 에서 X 로의 일대일 대응이고

$f(1) = 4$ 이므로 $\{f(2), f(3), f(4)\} = \{1, 2, 3\}$

$\therefore f(2) + f(3) + f(4) = 1 + 2 + 3 = 6$

22. $x \neq 1$ 인 모든 실수에 대하여 $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ 로 정의된 함수 f 에 대하여
역함수 $f^{-1}(x)$ 가 $f^{-1}(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$f(x) = y = \frac{2x+1}{x-1} \text{의 역함수는}$$

$$x = \frac{2y+1}{y-1} \text{에서}$$

$$x(y-1) = 2y+1, xy-x = 2y+1, xy-2y = x+1$$

$$(x-2)y = x+1$$

$$\therefore y = \frac{x+1}{x-2} = f^{-1}(x)$$

$$= \frac{ax+b}{x+c}$$

$$\text{즉, } a=1, b=1, c=-2$$

$$\therefore a+b+c=0$$

23. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에서 X 로의 함수 중 그 그래프가 원점에 대하여 대칭인 함수를 f 라 한다. <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ X 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$ 이다.
㉡ 함수 f 의 개수는 3개이다.
㉢ 함수 f 는 역함수를 갖는다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ 원점에 대하여 대칭이므로

$f(-x) = -f(x)$ 이다. $\therefore$ 거짓

㉡ i) $f(-1) = 1, f(0) = 0, f(1) = -1$

ii) $f(-1) = 0, f(0) = 0, f(1) = 0$

iii) $f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$ 로 3개이다.

$\therefore$ 참

㉢ 위 ㉡에서 ii)는 일대일대응이 아니므로
역함수를 갖지 않는다. $\therefore$ 거짓

24. 정의역이 $\{x \mid x \leq 3\}$, 치역이 $\{y \mid y \geq 4\}$ 인 무리함수 $f(x) = \sqrt{a(x-p)} + q$ 에 대하여 $f(1) = 6$ 일 때, $a + p + q$ 의 값을 구하면?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

정의역은 $\{x \mid a(x-p) \geq 0\} = \{x \mid x \leq 3\}$ 이므로 $a < 0$, $p = 3$
치역은 $\{y \mid y \geq 4\}$ 이므로 $q = 4$

$$\therefore f(x) = \sqrt{a(x-3)} + 4$$

이때, $f(1) = 6$ 이므로

$$\sqrt{-2a} + 4 = 6, \sqrt{-2a} = 2, -2a = 4$$

$$\therefore a = -2$$

$$\therefore a + p + q = -2 + 3 + 4 = 5$$

25. 15 명의 학생을 4 명, 5 명, 6 명의 3 조로 나누는 모든 방법의 수를 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 630630 가지

해설

$${}_{15}C_4 \times {}_{11}C_5 \times {}_6C_6 = 630630$$