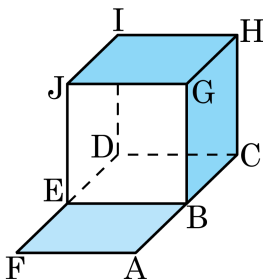


1. 다음그림은 정육면체의 뚜껑이 열려 있는 상태를 나타낸 것이다. A에서 I까지 최단 거리로 모서리를 따라가는 방법의 수는?



① 8

② 9

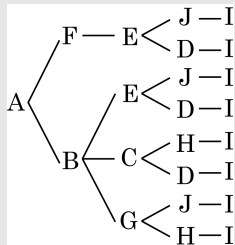
③ 10

④ 11

⑤ 12

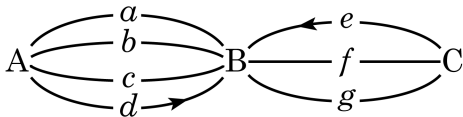
해설

A에서 I까지 최단 거리로 수형도를 그려보면



위의 수형도에서 구하는 방법의 수는 8가지이다.

2. 다음 그림과 같은 도로망에서 도로 d 와 e 는 화살표 방향으로 일방통행만 되고 그 외의 도로는 양쪽 방향으로 통행이 된다고 할 때, A 지점에서 출발하여 B 지점을 거쳐 C 지점까지 갔다가 다시 B 지점을 거쳐 A 지점까지 되돌아 오는 길의 가지수는?



- ① 12 개 ② 36 개 ③ 64 개
 ④ 72 개 ⑤ 144 개

해설

$A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$, $C \rightarrow B$, $B \rightarrow A$ 의 길의 가지수는 각각 4, 2, 3, 3
 이므로 구하는 길의 가지수는 $4 \times 2 \times 3 \times 3 = 72$ (개) 이다.

3. 'busan'의 모든 문자를 써서 만든 순열 중 양끝이 모두 모음인 것의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 12 개

해설

자음 3개를 배열하고, 양 끝에 모음 u, a를 배치하면 된다.

$$3! \times 2! = 12$$

4. $a > b$, $x > y$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $(a + b)(x + y) > 2(ax + by)$

② $(a + b)(x + y) < 2(ax + by)$

③ $(a + b)(x + y) \geq 2(ax + by)$

④ $(a + b)(x + y) \leq 2(ax + by)$

⑤ $(a + b)(x + y) = 2(ax + by)$

해설

$$\begin{aligned}(a + b)(x + y) - 2(ax + by) \\&= ay + bx - ax - by \\&= a(y - x) - b(y - x) \\&= (a - b)(y - x)\end{aligned}$$

그런데 $a - b > 0$, $y - x < 0$

$$\therefore (a + b)(x + y) < 2(ax + by)$$

5. 부등식 $7^{20} < n^{10}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

$$\frac{7^{20}}{n^{10}} = \frac{(7^2)^{10}}{n^{10}} = \left(\frac{49}{n}\right)^{10} < 1$$

$$\frac{49}{n} < 1 \text{ 이므로 } n > 49$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 50 이다.

6. 임의의 실수 a, b, c 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $|a| = -a$

② $a > b > 0$ 일 때, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 이다.

③ $|a| \geq 0$, $|a| \geq a$, $|a| = |-a|$ 이다.

④ $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$

⑤ $|a - b| \geq |a| - |b|$

해설

① $|a| = a(a \geq 0)$

$-a(a < 0)$

② 참

③ 참

④ $(|a + b + c|)^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

$(|a| + |b| + |c|)^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(|a||b| + |b||c| + |c||a|)$

$|a||b| \geq ab, |b||c| \geq bc, |c||a| \geq ca$

$\therefore |a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$

⑤ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(|a| - |b|)^2 = a^2 - 2|a||b| + b^2 (\because |a||b| \geq ab)$

$\therefore |a - b| \geq |a| - |b|$

7. 두 실수 x, y 의 제곱의 합이 10일 때, $x + 3y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$$(1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$$

$$x^2 + y^2 = 10 \text{ 이므로 } 100 \geq (x + 3y)^2$$

$$\therefore -10 \leq x + 3y \leq 10$$

$$\therefore M = 10, m = -10$$

$$\therefore M - m = 10 - (-10) = 20$$

8. $f(x) = -2x + 3$, $g(x) = 4x + 1$ 일 때, $f \circ g \circ h = g$ 를 만족하는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $h(2)$ 의 값을 구하면?

① -3

② -1

③ 0

④ 2

⑤ 3

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓고

$$(g \circ h)(x) = 4(ax + b) + 1 = 4ax + 4b + 1$$

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ h))(x) &= -2(4ax + 4b + 1) + 3 \\ &= -8ax - 8b - 2 + 3 \\ &= 4x + 1\end{aligned}$$

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = 0$$

$$h(x) = -\frac{1}{2}x$$

$$h(2) = -1$$

9. $x > 2$ 에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 $f(x) = \sqrt{x-2} + 2$, $g(x) = \frac{1}{x-2} + 2$ 일 때 $(f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$(f \cdot g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$$

$$(g \cdot f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$$

$$\therefore (f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3) = 6$$

10. 10000 원짜리 지폐 3장, 5000 원짜리 지폐 3장, 1000 원짜리 지폐 4장이 있다. 이 지폐의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 금액의 수를 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 49가지

해설

10000 원짜리 1장으로 지불하는 금액과 5000 원짜리 2장으로 지불하는 금액이 같으므로 10000 원짜리 지폐 3장을 5000 원짜리 지폐 6장으로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 5000 원짜리 지폐 9장, 1000 원짜리 지폐 4장의 지불 방법의 수와 같다.

5000 원짜리를 지불하는 방법의 수는

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9장의 10가지

1000 원짜리를 지불하는 방법의 수는

0, 1, 2, 3, 4장의 5가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로

이를 제외하면

$$10 \cdot 5 - 1 = 49$$

11. n 권의 책이 있다. (단, $n \geq 5$) 이 n 권 중에서 2 권의 책을 뽑아 책꽂이에 일렬로 꽂을 때, 그 총 방법의 수가 42 가지였다. n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 7$

해설

n 권에서 2 권을 뽑는 순열의 수는 ${}_nP_2$ 가지이므로
 ${}_nP_2 = 42$ 곧, $n(n-1) = 42 \quad \therefore (n+6)(n-7) = 0$
한편, $n \geq 2$ 이므로 $n = 7$

12. a, b, c, d, e의 5개의 문자를 일렬로 나열할 때, c가 d보다 앞에 오게 되는 방법의 수는?

① 24

② 30

③ 60

④ 72

⑤ 120

해설

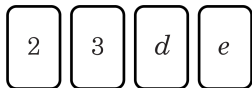
c와 d를 같은 문자로 생각하여 5개의 문자를 나열하는 방법과 같다.

$$\therefore \frac{5!}{2!} = 60$$

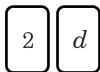
13. 한 쪽 면에는 영문자, 다른 쪽 면에는 숫자가 적혀있는 카드가 다음 규칙을 만족한다.

카드의 한 쪽 면에 모음이 적혀 있으면 다른 쪽 면에는 짝수가 적혀 있다.

탁자 위에 그림과 같이 놓인 카드 4 장이 위 규칙에 맞는 카드인지 알기 위해 다른 쪽 면을 확인해야 할 필요가 있는 것은?



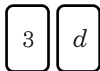
①



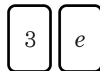
②



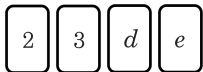
③



④



⑤



해설

(모음 → 짝수) ↔ (홀수 → 자음) 이므로 모음인 면을 뒤집어 짝수가 있음을 확인하고 홀수인 면을 뒤집어 자음이 있음을 확인하면 된다. 자음인 면의 뒤에는 어떤 수가 와도 좋고 짝수인 면의 뒤에는 모음, 자음이 모두 가능하다. 따라서 모음이 쓰여진 카드



, 홀수가 쓰여진 카드



의 다른 쪽 면을 확인해야 한다.

14. 전체 집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A - B)^c = B - A$ 가 성립할 필요충분조건을 구하면?

① $A \cap B = \emptyset$

② $A \cup B = U$

③ $A \subset B^c$

④ $A^c \cup B = U$

⑤ $A = B^c$

해설

$$(A - B)^c = (A \cap B^c)^c = A^c \cup B, \quad B - A = A^c \cap B$$

에서 $A^c = B$

즉, $A = B^c$

15. 두 조건 $p : a - 4 < x \leq a + 5$, $q : |x| \leq 1$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 정수 a 의 개수는?

① 6개

② 7개

③ 8개

④ 9개

⑤ 10개

해설

p 가 q 이기 위한 필요조건이므로 $p \leftarrow q$ 가 참이 되어야 한다. p , q 의 진리집합을 각각 P , Q 라 하면 $Q \subset P$ 이므로 $q : -1 \leq x \leq 1$ 에서 $a + 5 \geq 1$, $a - 4 < -1$ 따라서 $a \geq -4$, $a < 3$ 이다.
즉, $-4 \leq a < 3$ 이므로 정수 a 의 개수는 7 개이다.

16. 다음은 “실수를 계수로 갖는 세 개의 이차방정식 $ax^2 + 2bx + c = 0$, $bx^2 + 2cx + a = 0$, $cx^2 + 2ax + b = 0$ 중 적어도 하나는 실근을 갖는다”는 것을 증명한 것이다. 위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞는 부등호를 차례대로 쓰면?

증명

주어진 방정식이 모두 허근을 갖는다고 가정하면

$$b^2 - ac \text{ (가) } 0, c^2 - ab \text{ (나) } 0, a^2 - bc \text{ (다) } 0$$

세 식을 같은 변끼리 더하면

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac \text{ (나) } 0$$

좌변을 변형하면

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac$$

$$= \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} \text{ (나) } 0 \cdots \textcircled{7}$$

그런데 a, b, c 는 실수이므로

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \text{ (다) } 0 \cdots \textcircled{8}$$

따라서, $\textcircled{8}$ 은 $\textcircled{7}$ 에 모순이므로 세 방정식 중 적어도 하나는 실근을 갖는다.

① $<, <, \geq$

② $<, <, >$

③ $<, >, <$

④ $\geq, \geq, \leq$

⑤ $\geq, \leq, \geq$

해설

주어진 방정식이 모두 허근을 갖는다면

$$b^2 - ac < 0, c^2 - ab < 0, a^2 - bc < 0 \text{ (가정)}$$

세 식을 같은 변끼리 더하면

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac < 0$$

좌변을 변형하면

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac$$

$$= \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} < 0 \cdots \textcircled{7}$$

그런데 a, b, c 는 실수이므로

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \cdots \textcircled{8}$$

따라서, $\textcircled{8}$ 은 $\textcircled{7}$ 에 모순이므로 세 방정식 중 적어도 하나는 실근을 갖는다.

17. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = ax + |x - 2| + 3$ 이 일대일 대응이 되도록 하는 상수 a 의 값의 범위는?

① $a < -2$ 또는 $a > 0$

② $-1 \leq a \leq 1$

③ $-2 < a < 2$

④ $a < -1$ 또는 $a > 1$

⑤ $a \geq 1$

해설

(i) $x \geq 2$ 일 때 $f(x) = ax + x - 2 + 3 = (a + 1)x + 1$

(ii) $x < 2$ 일 때 $f(x) = ax - (x - 2) + 3 = (a - 1)x + 5$

함수 $f(x)$ 가 일대일 대응이 되려면 항상 증가하거나 감소해야 하므로 (i), (ii) 에서의 두 직선의 기울기의 부호가 같아야 한다.

따라서, $(a + 1)(a - 1) > 0$ 이므로

$a < -1$ 또는 $a > 1$

18. 함수 $f(x) = \frac{-3x+1}{x+3}$ 에 대하여 $f^1=f$, $f^{n+1} = f \circ f^n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 이라 할 때, $f^{2006}(-2) + f^{2007}(-2)$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$f(-2) = \frac{6+1}{-2+3} = 7$$

$$f^2(-2) = f(f(-2)) = f(7) = -2$$

$$f^3(-2) = f(f^2(-2)) = f(-2) = 7$$

$$f^4(-2) = f(f^3(-2)) = f(7) = -2$$

$\vdots$

$$f^{2006}(-2) = -2$$

$$f^{2007}(-2) = 7$$

$$\therefore f^{2006}(-2) + f^{2007}(-2) = -2 + 7 = 5$$

19. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 첫 번째 나온 눈의 수를 a , 두 번째 나온 눈의 수를 b 라 하자. $f(x) = (a-4)x+6$, $g(x) = (3-b)x+2$ 라 할 때 합성함수 $y = (f \circ g)(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않는 경우의 수는?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$$y = f(g(x)) = (a-4) \{ (3-b)x + 2 \} + 6$$

$$= (a-4)(3-b)x + (2a-2)$$

함수의 그래프가 x 축과 만나지 않기 위해서는 $2a-2 \neq 0$ 이고 $(a-4)(3-b) = 0$ 이다.

$\therefore (a, b)$ 는 $(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (2, 3), (3, 3), (5, 3), (6, 3)$ 의 10 가지

20. 1 부터 9 까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 아홉 장의 카드가 있다. 이 중 4 장의 카드를 뽑아 갑에게 2 장, 을에게 2 장을 주었을 때, 뽑힌 4 장 중 제일 작은 수가 적힌 카드가 갑에게 있을 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 378 가지

해설

9장 중 4장의 카드를 뽑는 방법의 수는

$${}_9C_4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$$

뽑힌 4장의 카드 중 제일 작은 수의 카드는 갑에게 주고, 나머지 3장 중 1장의 카드만 갑에게 주면 나머지 2장은 을에게 간다.

$$\therefore {}_9C_4 \cdot {}_3C_1 = 378$$

21. 다음 부등식 중 옳은 것을 고르면? (단, a, b 는 0이 아닌 실수)

① $\sqrt{2(a^2 + b^2)} \leq |a| + |b| \leq \frac{4|a||b|}{|a| + |b|}$

② $\sqrt{2(a^2 + b^2)} \leq \frac{4|a||b|}{|a| + |b|} \leq |a| + |b|$

③ $|a| + |b| \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)} \leq \frac{4|a||b|}{|a| + |b|}$

④ $\frac{4|a||b|}{|a| + |b|} \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)} \leq |a| + |b|$

⑤ $\frac{4|a||b|}{|a| + |b|} \leq |a| + |b| \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$

해설

$|a| > 0, |b| > 0$ 이므로

$$\frac{|a| + |b|}{2} \geq \sqrt{|a||b|} \geq \frac{2|a||b|}{|a| + |b|}$$

$$\therefore \frac{4|a||b|}{|a| + |b|} \leq |a| + |b| \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\begin{aligned} \text{한편 } & (\sqrt{2(a^2 + b^2)})^2 - (|a| + |b|)^2 \\ &= 2(a^2 + b^2) - (a^2 + 2|a||b| + b^2) \\ &= a^2 - 2|a||b| + b^2 \\ &= (|a| - |b|)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore (\sqrt{2(a^2 + b^2)})^2 \geq (|a| + |b|)^2$$

$$\therefore |a| + |b| \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)} \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②에 의하여

$$\frac{4|a||b|}{|a| + |b|} \leq |a| + |b| \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$$

22. 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 $f(1+x) = f(3-x)$ 를 만족하고 $f(x) = 0$ 이 서로 5 개의 실근을 가질 때, 모든 근의 합은?

① 0

② 2

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$f(1+x) = f(3-x)$ 에서 x 에 $x+1$ 을 대입하면

$$f(2+x) = f(2-x)$$

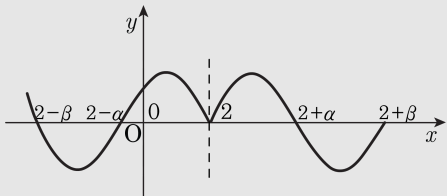
즉 $f(x)$ 는 $x=2$ 에 대하여 대칭이다.

아래 그림에서와 같이 $f(x) = 0$ 가 5 개의 실근을 가지려면

$f(2) = 0$ 이고, $2+\alpha$ 가 근이면 $2-\alpha$ 도 근이다.

$2+\beta$ 가 근이면 $2-\beta$ 도 근이다.

즉 $2 + (2+\alpha) + (2-\alpha) + (2+\beta) + (2-\beta) = 10$



23. 세 상자 P, Q, R에 들어 있는 구슬의 개수의 비가 처음에는 2 : 3 : 4였다. 전체 구슬의 개수는 변함없이 각 상자에서 구슬을 꺼내 다른 상자에 넣는 시행을 반복한 후, P, Q, R에 들어 있는 구슬의 개수의 비를 구했더니 3 : 2 : 5가 되었다. P상자에 들어 있는 구슬의 개수가 처음보다 7개가 늘었다면 R상자에 들어있는 구슬의 개수의 변화는?

- ① 처음보다 7개 줄었다. ② 처음보다 6개 줄었다.
 ③ 개수의 변화가 없다. ④ 처음보다 5개 늘었다.
 ⑤ 처음보다 8개 늘었다.

해설

전체 구슬의 개수를 x 라 하면 조건에서
 P상자의 구슬이 7개 늘었으므로

$$\frac{3x}{10} - \frac{2x}{9} = 7$$

$$\therefore x = 90 \text{ (개)}$$

따라서 R 상자의 구슬의 개수는 시행 전

$$: 4 \times \frac{90}{9} = 40 \text{ (개)}$$

$$\text{시행 후} : 5 \times \frac{90}{10} = 45 \text{ (개) 이므로}$$

시행 후에 처음보다 5개가 늘었다.

24. 양수 a 의 소수 부분을 b 라 할 때, $a^2 + b^2 = 8$ 을 만족하는 a 의 값을 구하면?

① $1 + \sqrt{3}$

② $2 + \sqrt{3}$

③ $2 - \sqrt{3}$

④ $1 - \sqrt{3}$

⑤ $3 + 2\sqrt{3}$

해설

(i) a 가 정수일 때,

$$b = 0, a^2 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2} \text{ (모순)}$$

(ii) $a > 0$, 정수가 아닐 때 $b \neq 0$

a 의 정수부분을 k 라 하면

$$a = k + b \quad (0 < b < 1) \text{ 이라 하면}$$

$$a^2 + b^2 = 8 \text{ 에서 } b^2 = 8 - a^2$$

$$0 < 8 - a^2 < 1, \sqrt{7} < a < \sqrt{8}$$

$$\therefore k = 2 \quad \therefore b = a - 2$$

$$a^2 + (a - 2)^2 = 2a^2 - 4a + 4 = 8$$

$$a^2 - 2a - 2 = 0, a = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$\therefore a = 1 + \sqrt{3} (\because a > 0)$$

25. 세 집합 $A = \{(x, y) \mid y = m(x + 1) - 1, m \text{은 실수}\}$ $B = \{(x, y) \mid y = \left| \frac{1}{x-1} + 2 \right|, x \neq 1 \text{인 실수}\}$

$C = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x-n} + 2, x \geq n \text{인 실수}\}$ 에 대하여 $n(A \cap B) = 3$ 이기 위한 m 의 범위는 $\textcircled{1} n(B \cap C) = 2$ 이기 위한 n 의 범위는 $\textcircled{2}$ 이다.
빈 칸에 들어갈 값으로 알맞게 짝지은 것은?

① $\textcircled{1} m \geq \frac{1}{2}$ $\textcircled{2} n \geq 1$

③ $\textcircled{1} m > \frac{3}{2}$ $\textcircled{2} n \geq \frac{3}{4}$

⑤ $\textcircled{1} m \geq \frac{2}{3}$ $\textcircled{2} n < \frac{3}{4}$

② $\textcircled{1} m \geq \frac{3}{2}$ $\textcircled{2} n < 1$

④ $\textcircled{1} m > \frac{2}{3}$ $\textcircled{2} n \leq \frac{3}{4}$

해설

$\textcircled{1}$: 그림처럼, $\textcircled{1}$ 보다 위에 있을 때 교점이 3개이다.

$$0 = m \left(\frac{1}{2} + 1 \right) - 1 \text{에서 } m = \frac{2}{3}$$

$$\therefore m \text{의 범위는 } m > \frac{2}{3}$$

$\textcircled{2}$: 그림의 $\textcircled{2}$ 보다 왼쪽에 있을 때 교점이 2개이다.

$$y = 2 \text{일 때의 교점은 } 2 = \left| \frac{1}{x-1} + 2 \right|$$

에서

$$\left(\frac{3}{4}, 2 \right)$$

$$\therefore n = \frac{3}{4}$$

$$\therefore n \text{의 범위는 } n \leq \frac{3}{4}$$

