1. 한 개의 주사위를 던질 때, 짝수의 눈이 나오거나 소수의 눈이 나오는 경우의 수를 구하시오.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 5 가지

해설

짝수의 눈 : $2, 4, 6$ (3 가지)

소수의 눈 : $2, 3, 5$ (3 가지)

짝수이면서 소수인 눈 : 2 (1 가지)

따라서 짝수 또는 소수의 눈이 나오는 경우의 수는

$3 + 3 - 1 = 5$ 이다.

$\therefore 5$ 가지

2. $(a+b)(p+q+r)(x+y)$ 를 전개하였을 때, 모든 항의 개수를 구하여라.

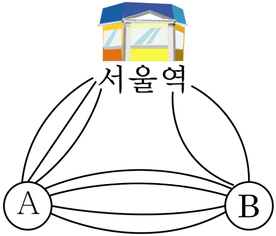
▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 12 개

해설

$a,\ b$ 중 한 개를 택하는 방법 : 2 가지
$p,\ q,\ r$ 중 한 개를 택하는 방법 : 3 가지
$x,\ y$ 중 한 개를 택하는 방법 : 2 가지
전개했을 때 모든 항의 개수는
$2 \times 3 \times 2 = 12$ (개)

3. 지점 A 에서 서울역으로 가는 길은 3 가지, 서울역에서 지점 B 로 가는 길은 2 가지가 있다. 또, A 에서 서울역을 거치지 않고 B 로 가는 길은 4 가지이다. 서울역을 한 번만 거쳐서 A와 B를 왕복하는 방법의 수를 구하시오.(단, A 에서 출발한다.)



▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 48 가지

해설

(i) $A \rightarrow$ 서울역 $\rightarrow B \rightarrow A$

: $3 \times 2 \times 4 = 24$ (가지)

(ii) $A \rightarrow B \rightarrow$ 서울역 $\rightarrow A$

: $4 \times 2 \times 3 = 24$ (가지)

(i), (ii) 이므로

$24 + 24 = 48$ (가지)

4. $x \geq a$가 $x^2 - 4 < 0$의 필요조건이 되게 하는 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -2

해설

$x^2 - 4 < 0$ 에서 $-2 < x < 2$ 이므로 $x \geq a$가 $-2 < x < 2$의 필요조건이 되기 위해서는 $a \leq -2$ 이어야 한다. 따라서, a 의 최댓값은 -2이다.

5. 부등식 $2^{50} > 5^{10n}$ 을 만족하는 자연수 n 의 갯수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 2 개

해설

$$\frac{2^{50}}{50^{10n}} = \frac{(2^5)^{10}}{(5^n)^{10}} = \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10}$$

이 때 $2^{50} > 5^{10n}$이므로 $\left(\frac{32}{5^n}\right) > 1$

$\therefore n = 1,\ 2$

n의 갯수는 2 개이다.

6. 실수 x, y에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert \geq \lvert x+y\rvert$	㉡ $\lvert x+y\rvert \geq \lvert x-y\rvert$
㉢ $\lvert x-y\rvert \geq \lvert x\rvert - \lvert y\rvert$	

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $(\lvert x\rvert + \lvert y\rvert)^2 - \lvert x+y\rvert^2 = 2(\lvert xy\rvert - xy) \geq 0$

$\therefore\ \lvert x\rvert + \lvert y\rvert \geq \lvert x+y\rvert$

㉡ (반례) $x=1, y=-1$ 일 때

$\lvert 1+(-1)\rvert = 0,\quad \lvert 1-(-1)\rvert = 2$ 이므로

$\lvert x+y\rvert < \lvert x-y\rvert$

㉢ $\lvert x-y\rvert^2 - (\lvert x\rvert - \lvert y\rvert)^2 = 2(\lvert xy\rvert - xy) \geq 0$

$\therefore\ \lvert x-y\rvert \geq \lvert x\rvert - \lvert y\rvert$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢ 이다.

7. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 일 때, $g(f(x))=x$가 되는 함수 $g(x)$는?

① $1-x$ ② $\dfrac{1}{1-x}$ ③ $\dfrac{x}{x-1}$ ④ $\dfrac{x-1}{x}$ ⑤ $\dfrac{x-1}{x+1}$

해설

$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 일 때

$g(f(x))=x$에서 $f(x)=t$로 놓으면

$\dfrac{1}{1-x}=t$ 에서 $(1-x)t=1,\ t-xt=1$

$xt=t-1,\ \ x=\dfrac{t-1}{t}$ 이므로 $g(t)=\dfrac{t-1}{t}$

$\therefore\ g(x)=\dfrac{x-1}{x}$

8. 유리식 $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a}}} \times \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a}}}$ 을 간단히 하면?

① $1-a^2$ ② $(1-a)^2$ ③ 1

④ $1+a^2$ ⑤ $(1+a)^2$

해설

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a}}} = \frac{1}{1-\dfrac{a}{a-1}} = \frac{a-1}{a-1-a}$$

$$= 1-a$$

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a}}} = \frac{1}{1-\dfrac{a}{a+1}} = \frac{a+1}{a+1-a}$$

$$= 1+a$$

$\therefore$ (준 식) $= 1-a^2$

9. $2+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{5}}}=\dfrac{803}{371}$ 일 때, 자연수 $k,\ m$의 값에 대하여 $k+m$의 값은?

① 6　② 12　③ 18　④ 24　⑤ 30

해설

$$\frac{803}{371}=2+\frac{61}{371}=2+\cfrac{1}{\cfrac{371}{61}}=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{5}{61}}$$

$$=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{\cfrac{61}{5}}}=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{5}}}$$

따라서 $k=6,\ m=12$

$\therefore\ k+m=18$

10. $\frac{a}{4}=\frac{b}{3}=\frac{c}{2}$ 이고, $\frac{a^2-b^2+c^2}{a^2+b^2-c^2}=\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하여라. (단, $abc \neq 0$, p, q는 서로소)

▶ 답 :

▷ 정답 : $p+q=32$

해설

$\frac{a}{4}=\frac{b}{3}=\frac{c}{2}=k(k \neq 0)$ 로 놓으면

$a=4k,\ b=3k,\ c=2k$

$\therefore \frac{a^2-b^2+c^2}{a^2+b^2-c^2}=\frac{11}{21}$

$\therefore\ p+q=11+21=32$

11. $-1 < a < 3$일 때, 다음 식을 간단히 하면?

$$\sqrt{a^2+2a+1}+(\sqrt{a-2})^2+\sqrt{a^2-6a+9}$$

① a ② $a-2$ ③ 4

④ $3a+2$ ⑤ $a+2$

해설

$$\sqrt{(a+1)^2}+(\sqrt{a-2})^2+\sqrt{(a-3)^2}$$
$$=|a+1|+(a-2)+|a-3|$$
$$=(a+1)+(a-2)-(a-3)$$
$$=a+1-2+3=a+2$$

12. 280과 420의 공약수의 개수는?

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

해설

$280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7,\ 420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

최대공약수 : $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$

따라서 공약수의 개수 :

$(2+1) \times (1+1) \times (1+1) = 12$

13. 다음 중 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 실수이다.)

ㄱ p : $|a|+|b|=0$ q : $ab=0$

ㄴ p : $(a-b)(b-c)=0$ q : $(a-b)^2+(b-c)^2=0$

ㄷ $p:0<x<y$ $q:x^2<y^2$

ㄹ $p:x<y$ $q:[x]<[y]$ (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

① ㄱ, ㄴ
② ㄴ, ㄷ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ
⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

해설

ㄱ p : $|a|+|b|=0 \Leftrightarrow a=0$이고 $b=0$ q : $ab=0 \Leftrightarrow a=0$ 또는 $b=0$ $\therefore p \Rightarrow q$ 이고 $p \not\Leftarrow q$ 이므로 만족
ㄴ p : $(a-b)(b-c)=0$ $a=b$ 또는 $b=c$ q : $a=b$ 그리고 $b=c$ $\therefore p \not\Rightarrow q$이고 $p \Leftarrow q$ 이므로 필요조건만 만족한다.
ㄷ $p \Rightarrow q$ ($\because$ x, y 모두 양수) $p \not\Leftarrow q$ ($\because$ x, y 모두 음수이거나 서로 부호가 다를 때 참이 아닐 수 있다.) $\therefore$ 만족
ㄹ $p \not\Rightarrow q$ ($\because x=1, y=1.5$ 일 때 $[1]=[1.5]=1$일 수 있다.) $p \Leftarrow q$ 이므로 필요조건만 만족

14. $0 < a < b,\ a + b = 1$일 때, 다음 네 수 또는 식의 대소를 비교한 것 중 잘못된 것은?

$1,\quad \sqrt{a}+\sqrt{b},\quad \sqrt{b}-\sqrt{a},\quad \sqrt{b-a}$

① $\sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{b-a}$

② $\sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$

③ $\sqrt{a}+\sqrt{b} < 1$

④ $\sqrt{b-a} < 1$

⑤ $\sqrt{b-a} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$

해설

주어진 네 수는 모두 양수이므로 제곱의 대소 관계를 알아보자.

(i) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - 1^2 = a + 2\sqrt{ab} + b - 1$

$= 2\sqrt{ab} > 0$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > 1$

$\therefore\ \sqrt{a}+\sqrt{b} > 1$

(ii) $1^2 - (\sqrt{b-a})^2 = 1 - b + a$

$= (a+b) - b + a$

$= 2a > 0$

$\therefore\ 1 > \sqrt{b-a}$

(iii) $(\sqrt{b-a})^2 - (\sqrt{b}-\sqrt{a})^2$

$= b - a - (b - 2\sqrt{ab} + a)$

$= 2\sqrt{ab} - 2a$

$= 2\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a}) > 0$

$\therefore\ \sqrt{b-a} > \sqrt{b}-\sqrt{a}$

(i), (ii), (iii)에서 $\sqrt{a}+\sqrt{b} > 1 > \sqrt{b-a} > \sqrt{b}-\sqrt{a}$

15. x, y 가 실수일 때, 다음 중 절대부등식이 아닌 것을 모두 고른 것은?

㉠ $x+1>0$	㉡ $x^2+xy+y^2\geq 0$
㉢ $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert\geq\lvert x-y\rvert$	㉣ $\lvert x+y\rvert\geq\lvert x-y\rvert$

① ㉠　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉣
④ ㉡, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $x>-1$ 일 때만 성립한다.

㉡ $x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2\geq 0$

(단, 등호는 $x=y=0$ 일 때 성립)

㉢ $(\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)^2-\lvert x-y\rvert^2$

$=\lvert x\rvert^2+2\lvert x\rvert\lvert y\rvert+\lvert y\rvert^2-(x-y)^2$

$=2(\lvert xy\rvert+xy)\geq 0$

$\therefore(\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)^2\geq\lvert x-y\rvert^2$

(단, 등호는 $xy\leq 0$ 일 때 성립)

㉣ (반례) $x=2, y=-3$ 일 때

$\lvert 2+(-3)\rvert=1, \lvert 2-(-3)\rvert=5$ 이므로

$\lvert x+y\rvert<\lvert x-y\rvert$

따라서 절대부등식이 아닌 것은 ㉠, ㉣ 이다.

16. 두 집합 $X = \{x \mid 1 \le x \le 5\}$, $Y = \{y \mid 1 \le y \le 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 $f(x) = ax + b$ 의 역함수가 존재할 때, 상수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, $a > 0$)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

역함수가 존재하므로 함수 f 는 일대일대응이다.
함수 $f(x)$ 의 기울기가 양수이므로
$f(1) = 1$, $f(5) = 3$
$f(1) = 1$ 에서 $a + b = 1 \cdots$ ㉠
$f(5) = 3$ 에서 $5a + b = 3 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$

$$\therefore a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

17. $x=\dfrac{2a}{1+a^2}$ $(a>1)$ 일 때, $P=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ 의 값을 구하면?

① a　　② $a+1$　　③ $a-1$　　④ a^2　　⑤ $\dfrac{1}{a}$

해설

$$\sqrt{1+x}=\sqrt{1+\frac{2a}{1+a^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{1+2a+a^2}{1+a^2}}=\frac{\sqrt{(a+1)^2}}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$=\frac{|a+1|}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{1+a}{\sqrt{1+a^2}}$$

($\because$ 조건에서 $a>1$)

또, $\sqrt{1-x}=\dfrac{|a-1|}{\sqrt{1+a^2}}=\dfrac{-1+a}{\sqrt{1+a^2}}$

$$\therefore\ P=\frac{\dfrac{1+a}{\sqrt{1+a^2}}-\dfrac{-1+a}{\sqrt{1+a^2}}}{\dfrac{1+a}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{-1+a}{\sqrt{1+a^2}}}$$

$$=\frac{2}{2a}=\frac{1}{a}$$

18. 무리함수 $f(x) = \sqrt{x+3} - 1$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점 P 의 좌표를 구하면?

① $(1,\ -2)$ ② $(-3,\ -1)$

③ $(1,\ 1)$ ④ $(-2,\ -2)$

⑤ $(1,\ 1)$, $(-2,\ -2)$

해설

$f(x)$ 와 $f^{-1}(x)$ 의 교점의 x좌표는

$f(x) = x$의 해와 같다. $\sqrt{x+3} - 1 = x$에서

$x^2 + x - 2 = 0$

$x = 1, -2$

$x = 1 (\because\ x \geq -1)$

$\therefore\ \mathrm{P} = (1, 1)$

19. 5 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 를 나열하여 다섯 자리의 자연수를 만들 때, 1 과 2 사이에 다른 숫자가 2 개 이상 들어가 있는 자연수의 개수는?

① 24 ② 36 ③ 48 ④ 52 ⑤ 64

해설

5 개의 숫자로 만들 수 있는 자연수의 개수는 $5!$ (개)
1, 2 가 이웃하는 자연수의 개수는 $2 \times 4!$ (개)
1 과 2 사이에 다른 숫자가 한 개 들어가 있는 자연수의 개수는 $3 \times 2! \times 3!$ (개)
따라서, 구하는 자연수의 개수는
$5! - (2 \times 4! + 3 \times 2! \times 3!) = 36$ (개)

20. 집합 S_1, S_2, S_3 은 다음과 같다.

$S_1 = \{1, 2\}$

$S_2 = \{1, 2, 3, 4\}$

$S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

집합 S_1 에서 한 개의 원소를 선택하여 백의 자리의 수, 집합 S_2 에서 한 개의 원소를 선택하여 십의 자리의 수, 집합 S_3 에서 한 개의 원소를 선택하여 일의 자리의 수로 하는 세 자리의 수를 만들 때, 각 자리의 수가 모두 다른 세 자리의 개수는?

① 8 ② 12 ③ 16 ④ 20 ⑤ 24

해설

각 자리의 수가 모두 다른 세 자리의 수를 만들려면 백의 자리에는 집합 S_1 의 원소 2 개 중 하나를 선택하고 십의 자리에는 집합 S_2 의 원소 중 백의 자리에서 사용한 수를 제외한 3개의 수 중 하나를 선택한다.
마찬가지로 일의 자리에는 집합 S_3 의 원소 중 백의 자리와 십의 자리에서 사용한 수를 제외한 4 개의 수 중 하나를 선택한다.
따라서, 구하는 세 자리의 수의 개수는
$_2C_1 \times {}_3C_1 \times {}_4C_1 = 24$

21. 어떤 심리학자가 사람의 상태를 A, B, C, D, E 의 다섯 가지 유형으로 분류하고 다음과 같은 가설을 세웠다.

(i) A 형인 사람은 B 형이 아니다. (ii) C 형이 아닌 사람은 B 형이 아니다. (iii) C 형인 사람은 D 형이 아니다. (iv) E 형인 사람은 B 형이다.

이 가설에 의하여 성립하지 않는 것을 보기에서 모두 고르면?

보기

ㄱ A 형인 사람은 E 형이 아니다.

ㄴ E 형인 사람은 C 형이 아니다.

ㄷ E 형이면서도 D 형인 사람이 있다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

해설

조건 A, B, C, D, E 가 각각 상태가 A, B, C, D, E 인 사람을 나타낼 때, 가설 (i), (ii), (iii), (iv) 를 명제로 표현하면

$A \Rightarrow \sim B$, $\sim C \Rightarrow \sim B$, $C \Rightarrow \sim D$, $E \Rightarrow B$ 이고, 대우를 각각 구해 보면

(i) 의 대우 : B형이면 A형이 아니다.

즉, $B \Rightarrow \sim A$

(ii) 의 대우 : B형이면 C형이다.

즉, $B \Rightarrow C$

(iii) 의 대우 : D형이면 C형이 아니다.

즉, $D \Rightarrow \sim C$

(iv) 의 대우 : B형이 아니면 E형이 아니다.

즉, $\sim B \Rightarrow \sim E$

$E \Rightarrow B$ 이고 $B \Rightarrow \sim A$ 이므로 $E \Rightarrow \sim A$,

즉, $A \Rightarrow \sim E$

$\sim C \Rightarrow \sim B$ 이고 $\sim B \Rightarrow \sim E$ 이므로 $\sim C \Rightarrow \sim E$,

즉, $E \Rightarrow C$

$D \Rightarrow \sim C$, $\sim C \Rightarrow \sim B$, $\sim B \Rightarrow \sim E$ 이므로 $D \Rightarrow \sim E$

따라서 보기 중에서 옳지 않은 것은 ㄴ, ㄷ 이다.

22. 세 양수 x, y, z가 $x+y+z=1$을 만족할 때, $\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(2+\frac{1}{y}\right)\left(2+\frac{1}{z}\right)$의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 125

해설

$$(\text{준식}) = 8+4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) + 2\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)+\frac{1}{xyz}$$

$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=\frac{x+y+z}{xyz}=\frac{1}{xyz}$이므로

$$(\text{준식}) = 8+4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{3}{xyz}$$

$x+y+z=1$이므로

$$\frac{1}{3}=\frac{x+y+z}{3}\geq 3\sqrt{xyz}$$

$\left(\text{등호는 } x=y=z=\frac{1}{3}\text{일 때 성립}\right)$

$\therefore\ xyz\leq\frac{1}{27}\qquad\therefore\ \frac{1}{xyz}\geq 27\ \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}\geq 9\ \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $(\text{준식})\geq 8+36+81=125$

23. 실수에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족한다.

· 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \neq 0$ · 임의의 실수 x , y 에 대하여 $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$가 성립한다.

이 때, 다음 중에서 옳은 것을 모두 고르면?

(ⅰ) $f(0) = 2$ (ⅱ) $f(-x) = -f(x)$ (ⅲ) $f(2x) = \{f(x)\}^2 - 2$ (ⅳ) $\{f(x)\}^2 + \{f(y)\}^2$ $= f(x+y)f(x-y) + 4$

① ⅰ, ⅱ ② ⅰ, ⅱ, ⅲ ③ ⅰ, ⅲ, ⅳ

④ ⅱ, ⅲ, ⅳ ⑤ ⅰ, ⅱ, ⅲ, ⅳ

해설

(ⅰ) $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 에서
$x = 0,\ y = 0$ 을 대입하면
$f(0)f(0) = f(0+0) + f(0-0)$ 이다.
정리하면 $\{f(0)\}^2 - 2f(0) = 0$
$f(0)(f(0) - 2) = 0$ 이므로
$\therefore f(0) = 2$ ($\because f(x) \neq 0$)
(ⅱ) $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 에서
$x = 0,\ y = x$ 를 대입하면
$f(0)f(x) = f(0+x) + f(0-x)$ 이다.
$2f(x) = f(x) + f(-x)(\because\ f(0) = 2)$
$\therefore f(-x) = f(x)$ 이므로 ⅱ는 옳지 않다.
(ⅲ) $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 에서 $y = x$ 를 대입하면
$f(x)f(x) = f(x+x) + f(x-x)$ 이다.
$f(2x) = \{f(x)\}^2 - f(0)$
$\therefore f(2x) = \{f(x)\}^2 - 2$ ($\because f(0) = 2$)
(ⅳ) $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 에서
$x = x+y,\ y = x-y$ 를 대입하면
$f(x+y)f(x-y) = f((x+y)+(x-y)) + f((x+y)-(x-y))$
$f(x+y)f(x-y) = f(2x) + f(2y)$ 이다.
$f(2x) = \{f(x)\}^2 - 2$ 을 $f(2x),\ f(2y)$ 에 적용하면
$f(x+y)f(x-y) = \{f(x)\}^2 - 2 + \{f(y)\}^2 - 2$ 이다.
$\therefore \{f(x)\}^2 + \{f(y)\}^2 = f(x+y)f(x-y) + 4$

24. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에서 A 로의 함수 f 중에서 $2x - f(x) \in A(x = 1,\ 2,\ 3)$ 이 성립하는 것의 개수는?

① 3 개　② 5 개　③ 9 개　④ 18 개　⑤ 24 개

해설

$2x - f(x) \in A$ 이면, $x = 1 \Rightarrow 2 - f(1) \in A$

$\therefore\ f(1) = 1$

$x = 2 \Rightarrow 4 - f(2) \in A$

$\therefore\ f(2) = 1,\ f(2) = 2,\ f(2) = 3$

$x = 3 \Rightarrow 6 - f(3) \in A$

$\therefore\ f(3) = 3$

따라서 주어진 조건을 만족하는 f 의 개수는 3 개

25. A, B, C세 사람은 각각 책 읽는 속도가 다르다. A가 어떤 책을 읽기 시작하고 나서 3시간 지났을 때, B가 같은 책을 읽기 시작하였다. 그로부터 5시간 후에는 A, B가 모두 총 쪽수의 $\frac{1}{3}$을 읽었다. C는 이 때부터 같은 책을 읽기 시작하여 B와 동시에 책을 다 읽었다. A가 다른 책을 6시간 걸려서 다 읽는다면 C가 그 책을 모두 읽는 데 걸리는 시간은?

① 1시간 50분 ② 2시간 10분 ③ 2시간 30분
④ 2시간 50분 ⑤ 3시간 10분

해설

B는 책의 $\frac{1}{3}$을 5시간 걸려서 읽었으므로
책을 다 읽는 데는 15시간이 걸린다.
A는 책의 $\frac{1}{3}$을 읽는 데 B보다 3시간이 더 걸리므로
책을 다 읽는 데는 $(5+3)\times 3 = 24$(시간)이 걸린다.
또, B가 전체의 $\frac{2}{3}$를 읽는 데 걸린 시간과 C가 책 전체를 읽는 데 걸린 시간이 같으므로
C는 책을 다 읽는 데 $15\times\frac{2}{3} = 10$(시간)이 걸린다.
따라서 같은 책을 읽을 때, A와 C의 책 읽는 데 걸리는 시간의 비가 $24 : 10$이므로
C가 A가 읽은 다른 책을 읽는 데 걸리는 시간을 x라 하면
$24 : 10 = 6 : x$
$\therefore x = \frac{60}{24} = \frac{5}{2}$(시간)
따라서 2시간 30분이 걸린다.