

1. 양의 실수 a 에 대하여 $-x^2+7x-10 \geq 0$ 의 모든 해가 $x^2-4ax+3a^2 \leq 0$ 을 만족할 때, a 의 값의 범위는?

- ① $\frac{1}{3} \leq a \leq 2$ ② $\frac{2}{3} \leq a \leq 2$ ③ $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$
 ④ $\frac{5}{3} \leq a \leq 5$ ⑤ $2 \leq a \leq 5$

해설

$$-x^2 + 7x - 10 \geq 0$$

$$x^2 - 7x + 10 \leq 0$$

$$(x-2)(x-5) \leq 0$$

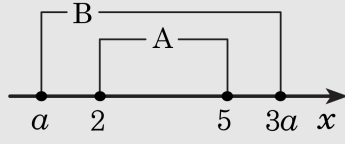
$$2 \leq x \leq 5$$

$$x^2 - 4ax + 3a^2 \leq 0$$

$$(x-a)(x-3a) \leq 0$$

$$a \leq x \leq 3a (\because a > 0)$$

㉠의 모든 해가 ㉡에 포함되므로



따라서 $a \leq 2$, $3a \geq 5$ 이므로 $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$

2. 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 4kx + 2k + 6 > 0$ 이 항상 성립할 때, k 값의 범위는?

① 모든 실수

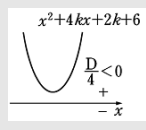
② $-1 < k < \frac{3}{2}$

③ $-\frac{3}{2} < k < 1$

④ 해는 없다

⑤ $k < -1, k > \frac{3}{2}$

해설



$$\frac{D}{4} = (2k)^2 - 1 \cdot (2k + 6) < 0$$

$$4k^2 - 2k - 6 < 0$$

$$(2k - 3)(k + 1) > 0$$

$$\therefore -1 < k < \frac{3}{2}$$

3. 이차부등식 $3x^2 - 2ax + a \geq 0$ 이 x 의 모든 실수 값에 대하여 성립할 때, a 의 값의 범위를 구하면?

① $0 < x < 1$

② $0 \leq a \leq 2$

③ $0 \leq a \leq 3$

④ $1 < a < 3$

⑤ $2 \leq a \leq 3$

해설

항상 성립하려면
판별식이 0보다 작거나 같아야한다.

$$D' = a^2 - 3a \leq 0$$

$$a(a - 3) \leq 0$$

$$0 \leq a \leq 3$$

4. 이차부등식 $(x+1)^2 \leq k(x^2-x+1)$ 이 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립할 때, 실수 k 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$(x+1)^2 \leq k(x^2-x+1)$$

$$(k-1)x^2 - (k+2)x + k-1 \geq 0$$

모든 x 에 대해 성립하려면,

$k-1 > 0$, 판별식이 0보다 작거나 같다

$$D = (k+2)^2 - 4(k-1)(k-1) \leq 0 \text{에서}$$

$$\{(k+2) - 2(k-1)\}\{(k+2) + 2(k-1)\}$$

$$= (-k+4)k \leq 0$$

$$\therefore k(k-4) \geq 0, \quad k \leq 0 \text{ 또는 } k \geq 4$$

$$\therefore k \geq 4 (\because k > 1) \quad \therefore \text{최솟값 : 4}$$

5. 두 이차방정식 $x^2 + 2ax + a + 2 = 0, x^2 + (a - 1)x + a^2 = 0$ 중 적어도 하나가 실근을 갖기 위한 상수 a 의 값의 범위는?

- ① $a < \frac{1}{2}, 2 < a$ ② $a \leq 1, 3 \leq a$ ③ $a \leq \frac{1}{2}, 3 < a$
④ $a \leq \frac{1}{2}, 2 < a$ ⑤ $a \leq \frac{1}{3}, a \geq 2$

해설

각각 실근을 가질 조건은 차례로

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - (a + 2) \geq 0 \text{에서}$$

$$(a - 2)(a + 1) \geq 0, a \leq -1, a \geq 2 \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{또, } D_2 = (a - 1)^2 - 4a^2 \geq 0 \text{에서}$$

$$(3a - 1)(a + 1) \leq 0, -1 \leq a \leq \frac{1}{3} \cdots \textcircled{2}$$

따라서, 적어도 하나가 실근을 갖기 위한

a 의 범위는 ① 또는 ②이므로

$$a \leq \frac{1}{3}, a \geq 2$$

6. 이차부등식 $x(x+1) < ax(x+1) - 1$ 을 만족하는 해가 없을 때, 상수 a 값의 범위는?

① $-2 \leq a < 1$

② $-2 < a < 1$

③ $-3 \leq a < 1$

④ $-3 < a < 1$

⑤ $a < -2$ 또는 $a > 1$

해설

$$x^2 + x < ax^2 + ax - 1 \text{ 에서}$$

$$(a-1)x^2 + (a-1)x - 1 > 0 \text{ 가 해가 없으려면}$$

$$a-1 < 0, D \leq 0$$

$$D = (a-1)^2 + 4(a-1) \leq 0$$

$$(a-1)(a+3) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq a \leq 1$$

$$a-1 < 0 \text{ 에서 } a \neq 1$$

$$\therefore -3 \leq a < 1$$

7. 이차방정식 $4x^2 + 8kx + 8k - 3 = 0$ 이 실근을 가질 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $k \leq \frac{1}{2}$ 또는 $k \geq \frac{3}{2}$

② $k < \frac{1}{2}$ 또는 $k > \frac{3}{2}$

③ $\frac{1}{2} < k < \frac{3}{2}$

④ $\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{3}{2}$

⑤ 모든 실수

해설

$$\frac{D}{4} \geq 0 \text{에서 } (4k)^2 - 4(8k - 3) \geq 0$$

$$16k^2 - 32k + 12 \geq 0$$

$$4k^2 - 8k + 3 \geq 0$$

$$(2k - 3)(2k - 1) \geq 0$$

$$\therefore k \leq \frac{1}{2} \text{ 또는 } k \geq \frac{3}{2}$$

8. 이차방정식 $2x^2 + 2kx + k + 2 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖고, 이차부등식 $x^2 - kx + k + 3 \geq 0$ 가 절대부등식이 되기 위한 실수 k 값의 범위를 구하면?

- ① $1 - \sqrt{5} < k < 1 + \sqrt{5}$
② $1 - \sqrt{5} \leq k \leq 1 + \sqrt{5}$
③ $-2 < k < 1 - \sqrt{5}$ 또는 $1 + \sqrt{5} < k < 6$
④ $-2 \leq k < 1 - \sqrt{5}$ 또는 $1 + \sqrt{5} < k \leq 6$
⑤ $-2 < k \leq 1 - \sqrt{5}$ 또는 $1 + \sqrt{5} \leq k < 6$

해설

i) 서로 다른 두 실근을 가지려면,
 $D' = k^2 - (2k + 4) > 0$ 이므로
 $k^2 - 2k - 4 > 0$
 $k < 1 - \sqrt{5}$ 또는 $k > 1 + \sqrt{5}$... ①
ii) $x^2 - kx + k + 3 \geq 0$ 이 절대부등식이 되려면
 $D = k^2 - 4(k + 3) \leq 0$ 이므로 $(k + 2)(k - 6) \leq 0$
 $-2 \leq k \leq 6$... ②
①, ②의 공통범위는
 $-2 \leq k < 1 - \sqrt{5}$ 또는 $1 + \sqrt{5} < k \leq 6$

9. x 의 이차방정식 $mx^2 + 2(1 - 2m)x + m = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 m 의 범위를 구하면?

- ① $0 < m < \frac{1}{3}$ ② $m < \frac{1}{3}, m > 1$
③ $m < 0, 0 < m < \frac{1}{3}, m > 1$ ④ $m < 0, m > 1$
⑤ $\frac{1}{3} < m < 1$

해설

이차방정식이므로 $m \neq 0 \dots \textcircled{1}$

$\frac{D}{4} = (1 - 2m)^2 - m^2 > 0$ 에서

$(m - 1)(3m - 1) > 0, m < \frac{1}{3}, m > 1 \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $m < 0, 0 < m < \frac{1}{3}, m > 1$

10. 부등식 $5 - x > 2|x + 1|$ 의 해와 $ax^2 + bx + 7 > 0$ 의 해가 같도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은 ?

① -7 ② -5 ③ 5 ④ 7 ⑤ 0

해설

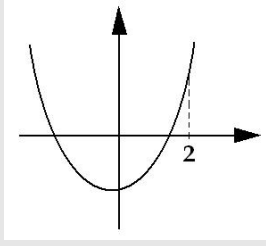
$5 - x > 2|x + 1|$ 을 풀면
(i) $x \geq -1$ 일 때
 $5 - x > 2x + 2, x < 1 \quad \therefore -1 \leq x < 1$
(ii) $x < -1$ 일 때
 $5 - x > -2x - 2, x > -7 \quad \therefore -7 < x < -1$
(i), (ii)에 따라 $-7 < x < 1$
 $ax^2 + bx + 7 > 0 \Leftrightarrow -7 < x < 1$ 이므로 $a < 0$ 이고
 $ax^2 + bx + 7 = a(x + 7)(x - 1)$
계수를 비교하면
 $a = -1, b = -6 \quad \therefore a + b = -7$

11. $x > 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - 2kx + k - 1 > 0$ 을 성립하게 하는 실수 k 의 최댓값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$D/4 = k^2 - k + 1 > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 가진다.



문제의 조건을 만족하기 위해서는 대칭축이 2보다 왼쪽에 있어야 하고 $f(2) \geq 0$ 의 두 조건을 모두 만족해야 한다.

대칭축 조건에서 $k < 2$ ㉠

$f(2) = 3 - 3k \geq 0$ 에서 $k \leq 1$ ㉡

㉠, ㉡에서 $k \leq 1$

k 의 최댓값은 1이다.

12. 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + px + p$ 가 -3 보다 항상 크기 위한 정수 p 의 최댓값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$x^2 + px + p > -3$$

$$x^2 + px + (p + 3) > 0$$

$$D = p^2 - 4(p + 3) = p^2 - 4p - 12 < 0$$

$$(p - 6)(p + 2) < 0$$

$$-2 < p < 6$$

$$\therefore \text{최대정수 : 5}$$

13. 모든 실수 x 에 대하여 다항식 $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3$ 의 값이 항상 2보다 크도록 하는 상수 m 의 범위가 $a < m < b$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3 > 2$
 $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 1 > 0$ 이므로
 $m \neq -1$, $m > -1$ 이고, $D < 0$ 이다.
 $\frac{D}{4} = m^2 - 3m < 0 \quad \therefore 0 < m < 3$
 $\therefore a = 0, b = 3$
 $\therefore a + b = 3$