1. 양의 실수 a에 대하여 $-x^2+7x-10 \geq 0$의 모든 해가 $x^2-4ax+3a^2 \leq 0$을 만족할 때, a의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3} \leq a \leq 2$　② $\frac{2}{3} \leq a \leq 2$　③ $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$

④ $\frac{5}{3} \leq a \leq 5$　⑤ $2 \leq a \leq 5$

해설

$-x^2 + 7x - 10 \geq 0$

$x^2 - 7x + 10 \leq 0$

$(x-2)(x-5) \leq 0$

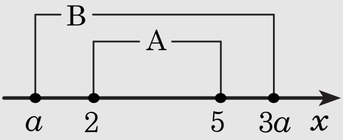
$2 \leq x \leq 5$

$x^2 - 4ax + 3a^2 \leq 0$

$(x-a)(x-3a) \leq 0$

$a \leq x \leq 3a (\because a > 0)$

㉠의 모든 해가 ㉡에 포함되므로



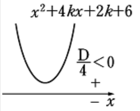
따라서 $a \leq 2,\ 3a \geq 5$이므로 $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$

2. 모든 실수 x에 대하여 $x^2+4kx+2k+6>0$이 항상 성립할 때, k값의 범위는?

① 모든 실수　② $-1<k<\frac{3}{2}$　③ $-\frac{3}{2}<k<1$

④ 해는 없다　⑤ $k<-1, k>\frac{3}{2}$

해설



$$\frac{D}{4}=(2k)^2-1\cdot(2k+6)<0$$

$$4k^2-2k-6<0$$

$$(2k-3)(k+1)>0$$

$$\therefore -1<k<\frac{3}{2}$$

3. 이차부등식 $3x^2 - 2ax + a \geq 0$ 이 x 의 모든 실수 값에 대하여 성립할 때, a 의 값의 범위를 구하면?

① $0 < x < 1$ ② $0 \leq a \leq 2$ ③ $0 \leq a \leq 3$

④ $1 < a < 3$ ⑤ $2 \leq a \leq 3$

해설

항상 성립하려면
판별식이 0 보다 작거나 같아야한다.

$D' = a^2 - 3a \leq 0$

$a(a-3) \leq 0$

$0 \leq a \leq 3$

4. 이차부등식 $(x+1)^2 \le k(x^2-x+1)$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립할 때, 실수 k의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$(x+1)^2 \le k(x^2-x+1)$

$(k-1)x^2-(k+2)x+k-1 \ge 0$

모든 x에 대해 성립하려면,

$k-1>0$, 판별식이 0보다 작거나 같다

$D=(k+2)^2-4(k-1)(k-1) \le 0$에서

$\{(k+2)-2(k-1)\}\{(k+2)+2(k-1)\}$

$=(-k+4)k \le 0$

$\therefore \ k(k-4) \ge 0, \quad k \le 0$ 또는 $k \ge 4$

$\therefore \ k \ge 4 (\because k>1) \quad \therefore$ 최솟값 : 4

5. 두 이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0, x^2+(a-1)x+a^2=0$중 적어도 하나가 실근을 갖기 위한 상수 a의 값의 범위는?

① $a<\frac{1}{2},\ 2<a$ ② $a\le 1,\ 3\le a$ ③ $a\le\frac{1}{2},\ 3<a$

④ $a\le\frac{1}{2},\ 2<a$ ⑤ $a\le\frac{1}{3},\ a\ge 2$

해설

각각 실근을 가질 조건은 차례로

$\frac{D_1}{4}=a^2-(a+2)\ge 0$에서

$(a-2)(a+1)\ge 0,\ a\le -1,\ a\ge 2\cdots$ ①

또, $D_2=(a-1)^2-4a^2\ge 0$에서

$(3a-1)(a+1)\le 0,\ \ -1\le a\le\frac{1}{3}\cdots$ ②

따라서, 적어도 하나가 실근을 갖기 위한

a의 범위는 ① 또는 ②이므로

$a\le\frac{1}{3},\ a\ge 2$

6. 이차부등식 $x(x+1) < ax(x+1) - 1$을 만족하는 해가 없을 때, 상수 a값의 범위는?

① $-2 \leq a < 1$

② $-2 < a < 1$

③ $-3 \leq a < 1$

④ $-3 < a < 1$

⑤ $a < -2$ 또는 $a > 1$

해설

$x^2 + x < ax^2 + ax - 1$에서

$(a-1)x^2 + (a-1)x - 1 > 0$가 해가 없으려면

$a - 1 < 0$, $D \leq 0$

$D = (a-1)^2 + 4(a-1) \leq 0$

$(a-1)(a+3) \leq 0$

$\therefore -3 \leq a \leq 1$

$a - 1 < 0$에서 $a \neq 1$

$\therefore \quad -3 \leq a < 1$

7. 이차방정식 $4x^2+8kx+8k-3=0$이 실근을 가질 때, 실수 k의 값의 범위는?

① $k \le \frac{1}{2}$ 또는 $k \ge \frac{3}{2}$　　② $k < \frac{1}{2}$ 또는 $k > \frac{3}{2}$

③ $\frac{1}{2} < k < \frac{3}{2}$　　④ $\frac{1}{2} \le k \le \frac{3}{2}$

⑤ 모든 실수

해설

$\frac{D}{4} \ge 0$에서 $(4k)^2-4(8k-3) \ge 0$

$16k^2-32k+12 \ge 0$

$4k^2-8k+3 \ge 0$

$(2k-3)(2k-1) \ge 0$

$\therefore\ k \le \frac{1}{2}$ 또는 $k \ge \frac{3}{2}$

8. 이차방정식 $2x^2 + 2kx + k + 2 = 0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 이차부등식 $x^2 - kx + k + 3 \geq 0$가 절대부등식이 되기 위한 실수 k값의 범위를 구하면?

① $1 - \sqrt{5} < k < 1 + \sqrt{5}$

② $1 - \sqrt{5} \leq k \leq 1 + \sqrt{5}$

③ $-2 < k < 1 - \sqrt{5}$ 또는 $1 + \sqrt{5} < k < 6$

④ $-2 \leq k < 1 - \sqrt{5}$ 또는 $1 + \sqrt{5} < k \leq 6$

⑤ $-2 < k \leq 1 - \sqrt{5}$ 또는 $1 + \sqrt{5} \leq k < 6$

해설

ⅰ) 서로 다른 두 실근을 가지려면,
$D' = k^2 - (2k + 4) > 0$이므로
$k^2 - 2k - 4 > 0$
$k < 1 - \sqrt{5}$ 또는 $k > 1 + \sqrt{5}$ $\cdots$ ①
ⅱ) $x^2 - kx + k + 3 \geq 0$이 절대부등식이 되려면
$D = k^2 - 4(k + 3) \leq 0$이므로 $(k + 2)(k - 6) \leq 0$
$-2 \leq k \leq 6$ $\cdots$ ②
①, ②의 공통범위는
$-2 \leq k < 1 - \sqrt{5}$ 또는 $1 + \sqrt{5} < k \leq 6$

9. x의 이차방정식 $mx^2+2(1-2m)x+m=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 m의 범위를 구하면?

① $0<m<\frac{1}{3}$ ② $m<\frac{1}{3},\ m>1$
③ $m<0,\ 0<m<\frac{1}{3},\ m>1$ ④ $m<0\ ,\ m>1$
⑤ $\frac{1}{3}<m<1$

해설

이차방정식이므로 $m\neq 0 \quad \cdots ㉠$

$\frac{D}{4}=(1-2m)^2-m^2>0$에서

$(m-1)(3m-1)>0,\ \ m<\frac{1}{3},\ \ m>1 \quad \cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $m<0,\ \ 0<m<\frac{1}{3},\ \ m>1$

10. 부등식 $5-x>2|x+1|$의 해와 $ax^2+bx+7>0$의 해가 같도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은?

① -7 ② -5 ③ 5 ④ 7 ⑤ 0

해설

$5-x>2|x+1|$ 을 풀면

(i) $x \geq -1$ 일 때

$5-x>2x+2,\ x<1 \quad \therefore -1 \leq x < 1$

(ii) $x<-1$ 일 때

$5-x>-2x-2,\ x>-7 \quad \therefore -7<x<-1$

(i), (ii) 에 따라 $-7<x<1$

$ax^2+bx+7>0 \Leftrightarrow -7<x<1$ 이므로 $a<0$ 이고

$ax^2+bx+7=a(x+7)(x-1)$

계수를 비교하면

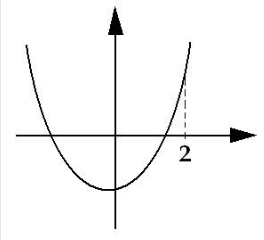
$a=-1, b=-6 \quad \therefore\ a+b=-7$

11. $x > 2$인 모든 실수 x에 대하여 $x^2 - 2kx + k - 1 > 0$을 성립하게 하는 실수 k의 최댓값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$D/4 = k^2 - k + 1 > 0$이므로 서로 다른 두 실근을 가진다.



문제의 조건을 만족하기 위해서는 대칭축이 2보다 왼쪽에 있어야 하고 $f(2) \geq 0$의 두 조건을 모두 만족해야 한다.

대칭축 조건에서 $k < 2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f(2) = 3 - 3k \geq 0$에서 $k \leq 1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $k \leq 1$

k의 최댓값은 1이다.

12. 모든 실수 x에 대하여 $x^2 + px + p$가 -3보다 항상 크기 위한 정수 p의 최댓값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x^2 + px + p > -3$

$x^2 + px + (p + 3) > 0$

$D = p^2 - 4(p + 3) = p^2 - 4p - 12 < 0$

$(p - 6)(p + 2) < 0$

$-2 < p < 6$

$\therefore$ 최대정수 : 5

13. 모든 실수 x 에 대하여 다항식 $(m+1)x^2-2(m-1)x+3$ 의 값이 항상 2보다 크도록 하는 상수 m 의 범위가 $a<m<b$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(m+1)x^2-2(m-1)x+3>2$

$(m+1)x^2-2(m-1)x+1>0$ 이므로

$m\neq-1,\ m>-1$ 이고, $D<0$ 이다.

$\dfrac{D}{4}=m^2-3m<0 \qquad \therefore\ 0<m<3$

$\therefore a=0,\ b=3$

$\therefore a+b=3$