

1. 함수 $f(x) = |4x + a| + b$ 는 $x = 3$ 일 때, 최솟값 -2 를 가진다. 이때, 상수 a, b 의 값에 대하여 $b - a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$f(x) = |4x + a| + b = \left| 4 \left(x + \frac{a}{4} \right) \right| + b$ 의 그래프는

$y = |4x|$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 $-\frac{a}{4}$ 만큼, y 축의 방향

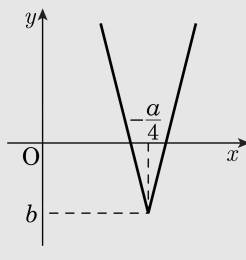
으로 b 만큼 평행이동한것이므로 다음
그림과 같다.

따라서 $x = -\frac{a}{4}$ 일 때

최솟값 b 를 가지므로 $-\frac{a}{4} = 3, b = -2$

따라서 $a = -12, b = -2$ 이므로

$\therefore b - a = 10$



2. $1 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $y = -\sqrt{3x+1} + 4$ 의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$y = -\sqrt{3x+1} + 4 = -\sqrt{3\left(x + \frac{1}{3}\right)} + 4$$

주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

$x = 1$ 일 때, 최댓값 $a = -\sqrt{3+1} + 4 = 2$

$x = 5$ 일 때, 최솟값 $b = -\sqrt{15+1} + 4 = 0$

$\therefore a - b = 2 - 0 = 2$

3. $x > 2$ 에서 정의된 두 함수 $f(x), g(x)$ 가

$f(x) = \sqrt{x-2} + 2, g(x) = \frac{1}{x-2} + 2$ 일 때, $(f \circ g)(3) + (g \circ f)(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$$

$$\therefore (f \circ g)(3) + (g \circ f)(3) = 6$$

4. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 3x - 2$ 에 대하여 $(f \circ g)(1) = 2$, $(g \circ f)(2) = 3$ 을 만족하는 상수 a , b 의 합 $4a + b$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(f \circ g)(1) = 2$ 에서

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = a + b$

$\therefore a + b = 2$

5. 두 함수 $f(x) = \frac{x-1}{x}, g(x) = 1-x$ 에 대하여 $g(x) = f^{-1}\left(\frac{9}{10}\right)$ 이 성립할 때, 이를 만족시키는 실수 x 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

먼저 $f^{-1}(x)$ 를 구해보면

$$y = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow x = 1 - \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{1-x} = f^{-1}(x)$$

$$\therefore f^{-1}\left(\frac{9}{10}\right) = 10$$

$$\Rightarrow g(x) = 1-x = 10 \quad x = -9$$

6. $w : x = 4 : 3$, $y : z = 3 : 2$, $z : x = 1 : 6$ 일 때, $w : y$ 는?

- ① $1 : 3$ ② $16 : 3$ ③ $20 : 3$ ④ $27 : 4$ ⑤ $12 : 1$

해설

$$\frac{w}{y} = \frac{w}{x} \cdot \frac{x}{z} \cdot \frac{z}{y} = \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$$

7. 무리식 $\sqrt{2-x} + \frac{1}{\sqrt{x+3}}$ 의 값이 실수가 되도록 x 의 범위를 정할 때, 정수 x 의 개수는?

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

$$2-x \geq 0, x+3 > 0$$

$\therefore -3 < x \leq 2$ 이므로 정수의 개수는 5개

8. x, y 는 실수이고 $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = -\sqrt{\frac{x}{y}}$ 일 때, $\sqrt{(y-x)^2} + (\sqrt{x-y})^2 - 2\sqrt{y^2}$ 을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2x$

해설

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = -\sqrt{\frac{x}{y}} \text{ 이 성립하므로 } y < 0, x \geq 0$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{(y-x)^2} + (\sqrt{x-y})^2 - 2\sqrt{y^2} \\ &= |y-x| + x-y - 2|y| \\ &= -y+x+x-y+2y=2x \end{aligned}$$

9. $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라고 할 때, $\frac{1}{b}-a$ 의 값은?

① $1-\sqrt{3}$

② $1+\sqrt{3}$

③ $3+\sqrt{3}$

④ $3-\sqrt{3}$

⑤ $-\frac{5+\sqrt{3}}{2}$

해설

$$\sqrt{12-6\sqrt{3}} = \sqrt{9-3\sqrt{3}} = 3-\sqrt{3}$$

$$1 < \sqrt{3} < 2, -2 < -\sqrt{3} < -1, 1 < 3-\sqrt{3} < 2$$

$$a=1, b=3-\sqrt{3}-1=2-\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{b}-a = \frac{1}{2-\sqrt{3}}-1 = 2+\sqrt{3}-1 = 1+\sqrt{3}$$

10. 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$ 에서 치역의 원소의 개수가 2개인 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답: 개

▷ 정답 : 36 개

해설

원소가 2 개인 치역은

 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\},$

{3, 4}로 6 개이다.

정의역의 원소가 3 개, 공역의 원소가 2 개인 함수의 개수는

 $2^3 = 8$ 인데

이 중에서 지역의 원소가 1 개인 함수가 각각 2 개이므로 $8-2=6$

따라서 $6 \times 6 = 36$ 개

11. 함수 $y = |x - 1| - |x - 2|$ 의 그래프와 직선 $y = kx$ 가 세 점에서 만날 때, 상수 k 의 값이 될 수 없는 것은?

- ㉠ $\frac{1}{2}$ ㉡ $\frac{1}{3}$ ㉢ $\frac{1}{4}$ ㉣ $\frac{1}{5}$ ㉤ $\frac{1}{6}$

해설

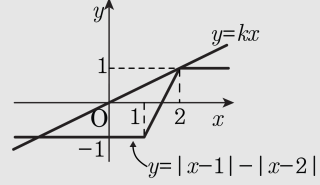
$$y = |x - 1| - |x - 2|$$

$$(i) \ x \geq 2 \text{ 일 때, } y = x - 1 - (x - 2) = 1$$

$$(ii) \ 1 \leq x < 2 \text{ 일 때, } y = x - 1 + x - 2 = 2x - 3$$

$$(iii) \ x < 1 \text{ 일 때, } y = -(x - 1) + (x - 2) = -1$$

$y = |x - 1| - |x - 2|$ 의 그래프는 다음의 그림과 같다.



$y = kx$ 의 그래프는 원점을 지나는 직선이므로 $y = kx$ 의 그래프가 점 $(2, 1)$ 을 지날 때

$$1 = 2k \quad \therefore k = \frac{1}{2}$$

따라서 두 그래프가 세 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는

$$0 < k < \frac{1}{2} \text{ 이다.}$$

그러므로 보기 중 위 범위에 속하지 않는 것은 ㉠이다.

12. 분수식 $\frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b} = \frac{a+b}{c}$ 의 값을 구하면?

- ① $-1, 2$ ② $1, 2$ ③ $2, \frac{1}{2}$ ④ $1, \frac{1}{2}$ ⑤ $-1, \frac{1}{2}$

해설

$$\frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b} = \frac{a+b}{c} = k$$

$$b+c = ak \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a+c = bk \cdots \textcircled{㉡}$$

$$a+b = ck \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} + \textcircled{㉢} \text{하면}$$

$$2(a+b+c) = k(a+b+c)$$

$$\text{i) } a+b+c \neq 0 \text{ 이면 } k = 2$$

$$\text{ii) } a+b+c = 0 \text{ 일 때 } b+c = -a$$

$$\frac{b+c}{a} = \frac{-a}{a} = -1$$

$$\therefore k = -1, 2$$

13. 소비자 단체에서 백화점의 할인 판매 상품의 가격을 조사하였더니, 각 백화점들은 상품의 정가를 원가보다 높게 거짓으로 표시하여 할인 판매를 하고 있었다. 표시된 정가보다 20 %를 할인하여 팔아도 12 %의 이익을 남기도록 하고 있었다면, 정가는 원가보다 몇 %를 더 높여 표시되었는가? (여기서, 원가는 업자의 이윤까지 포함된 정상적인 판매 가격이다.)

- ① 24 % ② 28 % ③ 32 % ④ 36 % ⑤ 40 %

해설

원가를 A 원이라 하고, $x\%$ 높게 정가를 정했다고 하자.

표시된 정가는 $A\left(1 + \frac{x}{100}\right)$ 원

할인 판매 가격은 $A\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{20}{100}\right)$ 이다.

원가에 12%의 이익이 있게 파는 가격은

$A\left(1 + \frac{12}{100}\right)$ 이므로

$A\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{20}{100}\right) = A\left(1 + \frac{12}{100}\right)$

$\frac{100+x}{100} \cdot \frac{80}{100} A = \frac{112}{100} A$

$\frac{100+x}{100} = \frac{112}{100} \cdot \frac{100}{80} = \frac{7}{5}$

$\therefore x = \frac{7}{5} \times 100 - 100 = 40(\%)$

14. 분수함수 $y = \frac{2x+3}{x+2}$ 의 치역이 $\{y \mid y > 2\}$ 일 때, 다음 중 정의역을
바르게 구한 것은?

① $\{x \mid -3 < x < -2\}$

② $\{x \mid x < -2\}$

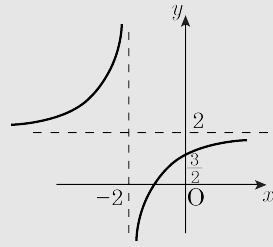
③ $\{x \mid -2 < x\}$

④ $\{x \mid -2 \leq x < 2\}$

⑤ $\{x \mid -2 \leq x < 3\}$

해설

$$y = \frac{2x+3}{x+2} = \frac{2(x+2)-1}{x+2} = 2 + \frac{-1}{x+2}$$



정의역은 $\{x \mid x < -2\}$

15. $2 \leq x \leq 3$ 에서 부등식 $ax + 1 \leq \frac{x+1}{x-1} \leq bx + 1$ 이 항상 성립할 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하면?

- ① $\frac{1}{3}$
- ② $\frac{2}{3}$
- ③ 1
- ④ $\frac{4}{3}$
- ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$$y = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 1$$

따라서, 분수함수 $y = \frac{x+1}{x-1}$ 의 그래프는

$y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

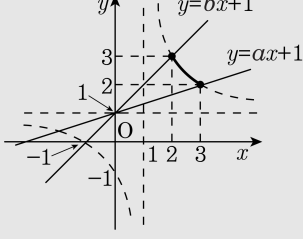
1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

두 직선 $y = ax + 1$, $y = bx + 1$ 은 a , b 의 값에

관계없이 점 $(0, 1)$ 을 지나는 직선이므로

$2 \leq x \leq 3$ 에서 $ax + 1 \leq \frac{x+1}{x-1} \leq bx + 1$ 이 항상 성립하려면 다음
그림에서 $a \leq \frac{1}{3}$, $b \geq 1$

따라서, a 의 최댓값은 $\frac{1}{3}$, b 의 최솟값은 1이므로 그 합은 $\frac{4}{3}$



16. 일차함수 $f(x)$ 는 실수 x 에 대하여 다음을 만족한다. $xf(x)+f(1-x)=x^2+2$ 이 때, $f(100)$ 의 값은?

① -101 ② -100 ③ 0 ④ 100 ⑤ 101

해설

$f(x) = ax + b$ 라 놓으면
 $x(ax + b) + a(1 - x) + b = x^2 + 2$
 $ax^2 + (-a + b)x + (a + b) = x^2 + 2$
위 식은 x 에 대한 항등식이므로
 $a = 1, b = 1$
이때 $f(x) = x + 1$ 이므로 $f(100) = 101$

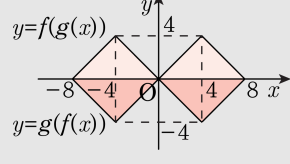
17. 함수 $f(x) = 4 - |x|$, $g(x) = -4 + |x|$ 에서, $y = f(g(x))$ 와 $y = g(f(x))$ 로 둘러싸여있는 영역의 넓이는?

① 36 ② 64 ③ 72 ④ 54 ⑤ 108

해설

i) $y = f(g(x)) = 4 - |-4 + |x||$ 에서
 $x \geq 4$ 일 때, $y = 4 - (-4 + x) = -x + 8$
 $0 \leq x < 4$ 일 때, $y = 4 + (-4 + x) = x$
 $-4 \leq x < 0$ 일 때, $y = 4 + (-4 - x) = -x$
 $x < -4$ 일 때, $y = 4 - (-4 - x) = x + 8$

ii) $y = g(f(x)) = -4 + |4 - |x||$ 에서
 $x \geq 4$ 일 때, $y = -4 - (4 - x) = x - 8$
 $0 \leq x < 4$ 일 때, $y = -4 + (4 - x) = -x$
 $-4 \leq x < 0$ 일 때, $y = -4 + (4 + x) = x$
 $x < -4$ 일 때, $y = -4 - (4 + x) = -x - 8$



그림의 색칠 부분 넓이를 계산하면

$$\therefore 8 \times 8 = 64$$

18. $|y-x|+|y+x|=2$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 ?

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

절댓값의 정의에 의하여

(i) $y-x \geq 0, y+x \geq 0$ 일 때,

$$y-x+y+x=2$$

$$\therefore y=1$$

(ii) $y-x \geq 0, y+x < 0$ 일 때,

$$y-x-y-x=2$$

$$\therefore x=-1$$

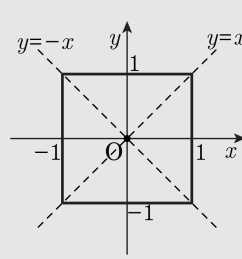
(iii) $y-x < 0, y+x \geq 0$ 일 때, $-y+x+y+x=2$

$$\therefore x=1$$

(iv) $y-x < 0, y+x < 0$ 일 때, $-y+x-y-x=2$

$$\therefore y=-1$$

$$\therefore S=2 \times 2=4$$



19. a, b, c 가 실수일 때, $a + b = 4ab$, $b + c = 6bc$, $c + a = 8ca$ 이다.
 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 의 값을 구한 것은?

- ① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ 9 ④ 18 ⑤ 1

해설

준식을 변형하면 $\frac{a+b}{ab} = 4 \dots ①$

$$\frac{b+c}{bc} = 6 \dots ②$$

$$\frac{c+a}{ca} = 8 \dots ③ \text{에서}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = 4 \dots ①'$$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{b+c}{bc} = 6 \dots ②'$$

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{a} = \frac{a+c}{ca} = 8 \dots ③'$$

①' + ②' + ③' 하면

$$2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 18$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 9$$

20. 곡선 $y = \sqrt{2x-4}$ 와 직선 $y = x+a$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 a 값의 범위를 정하면?

- ① $-2 < a < -\frac{3}{2}$
- ② $-2 \leq a < -\frac{3}{2}$
- ③ $a < -\frac{3}{2}$
- ④ $a \leq -\frac{3}{2}$
- ⑤ $a > -\frac{3}{2}$

해설

그림에서 직선이 그래프와 두점에서 만나는 것은

직선 $y = x+a$ 가 $(2, 0)$ 을 지날 때부터 직선이 $y = \sqrt{2x-4}$ 의 그래프와 접하기 전까지이다.

i) $y = x+a$ 에 $(2, 0)$ 을 대입하면 $a = -2$

ii) $y = \sqrt{2x-4}$ 와 직선 $y = x+a$ 가 접하기 위해서는 두 식을 연립한 식의 판별식 $D = 0$ 이어야 한다.

$$\sqrt{2x-4} = x+a$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2 + 2x(a-1) + a^2 + 4 = 0$$

$$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - a^2 - 4 = 0$$

$$-2a - 3 > 0, a < -\frac{3}{2}$$

i) , ii)로 부터 $-2 \leq a < -\frac{3}{2}$

