1. 함수 $f(x) = |4x + a| + b$ 는 $x = 3$ 일 때, 최솟값 -2 를 가진다. 이때, 상수 $a,\ b$ 의 값에 대하여 $b - a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

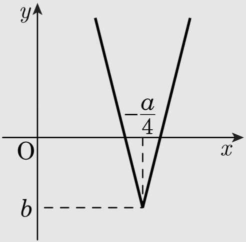
▷ 정답 : 10

해설

$f(x) = |4x + a| + b = \left|4\left(x + \frac{a}{4}\right)\right| + b$ 의 그래프는

$y = |4x|$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 $-\frac{a}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 $x = -\frac{a}{4}$ 일 때

최솟값 b 를 가지므로 $-\frac{a}{4} = 3,\ b = -2$

따라서 $a = -12,\ b = -2$ 이므로

$\therefore b - a = 10$

2. $1 \le x \le 5$ 에서 함수 $y = -\sqrt{3x+1}+4$ 의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$y = -\sqrt{3x+1}+4 = -\sqrt{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}+4$$

주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

$x=1$ 일 때, 최댓값 $a = -\sqrt{3+1}+4 = 2$

$x=5$ 일 때, 최솟값 $b = -\sqrt{15+1}+4 = 0$

$\therefore\ a-b = 2-0 = 2$

3. $x > 2$에서 정의된 두 함수 $f(x), g(x)$가

$f(x) = \sqrt{x-2} + 2$, $g(x) = \dfrac{1}{x-2} + 2$일 때, $(f \circ g)(3) + (g \circ f)(3)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$

$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$

$\therefore (f \circ g)(3) + (g \circ f)(3) = 6$

4. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 3x - 2$에 대하여 $(f \circ g)(1) = 2$, $(g \circ f)(2) = 3$을 만족하는 상수 a, b의 합 $4a + b$를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(f \circ g)(1) = 2$에서

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = a + b$

$\therefore a + b = 2$

5. 두 함수 $f(x) = \dfrac{x-1}{x}, g(x) = 1-x$에 대하여 $g(x) = f^{-1}\left(\dfrac{9}{10}\right)$이 성립할 때, 이를 만족시키는 실수 x 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

먼저 $f^{-1}(x)$ 를 구해보면

$$y = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad x = 1 - \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{1-x} = f^{-1}(x)$$

$$\therefore \quad f^{-1}\left(\frac{9}{10}\right) = 10$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = 1 - x = 10 \quad x = -9$$

6. $w : x = 4 : 3,\ y : z = 3 : 2,\ z : x = 1 : 6$일 때, $w : y$는?

① $1 : 3$ ② $16 : 3$ ③ $20 : 3$ ④ $27 : 4$ ⑤ $12 : 1$

해설

$$\frac{w}{y} = \frac{w}{x} \cdot \frac{x}{z} \cdot \frac{z}{y} = \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$$

7. 무리식 $\sqrt{2-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$ 의 값이 실수가 되도록 x의 범위를 정할 때, 정수 x의 개수는?

① 2개　② 3개　③ 4개　④ 5개　⑤ 6개

해설

$2-x \geq 0,\ \ x+3>0$

$\therefore -3<x\leq 2$ 이므로 정수의 개수는 5개

8. $x,\ y$는 실수이고 $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=-\sqrt{\dfrac{x}{y}}$일 때, $\sqrt{(y-x)^2}+(\sqrt{x-y})^2-2\sqrt{y^2}$을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2x$

해설

$\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=-\sqrt{\dfrac{x}{y}}$이 성립하므로 $y<0,\ x\geq 0$

$$\sqrt{(y-x)^2}+(\sqrt{x-y})^2-2\sqrt{y^2}$$
$$=|y-x|+x-y-2|y|$$
$$=-y+x+x-y+2y=2x$$

9. $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라고 할 때, $\dfrac{1}{b}-a$의 값은?

① $1-\sqrt{3}$ ② $1+\sqrt{3}$ ③ $3+\sqrt{3}$

④ $3-\sqrt{3}$ ⑤ $-\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}$

해설

$$\sqrt{12-2\sqrt{27}}=\sqrt{9}-\sqrt{3}=3-\sqrt{3}$$

$$1<\sqrt{3}<2,\ -2<-\sqrt{3}<-1,\ 1<3-\sqrt{3}<2$$

$$a=1,\ b=3-\sqrt{3}-1=2-\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{b}-a=\frac{1}{2-\sqrt{3}}-1=2+\sqrt{3}-1=1+\sqrt{3}$$

10. 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : X \to Y$ 에서 치역의 원소의 개수가 2 개인 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 36 개

해설

원소가 2 개인 치역은
$\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{1,\ 4\}$, $\{2,\ 3\}$, $\{2,\ 4\}$,
$\{3,\ 4\}$로 6 개이다.
정의역의 원소가 3 개, 공역의 원소가 2 개인함수의 개수는
$2^3 = 8$ 인데
이 중에서 치역의 원소가 1 개인 함수가 각각 2 개이므로 $8-2 = 6$
따라서 $6 \times 6 = 36$ 개

11. 함수 $y = |x-1| - |x-2|$ 의 그래프와 직선 $y = kx$ 가 세 점에서 만날 때, 상수 k 의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $\frac{1}{2}$　　② $\frac{1}{3}$　　③ $\frac{1}{4}$　　④ $\frac{1}{5}$　　⑤ $\frac{1}{6}$

해설

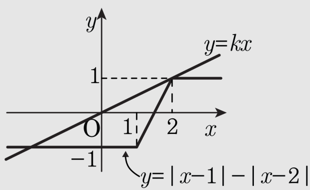
$y = |x-1| - |x-2|$

(i) $x \geq 2$ 일 때, $y = x - 1 - (x-2) = 1$

(ii) $1 \leq x < 2$ 일 때, $y = x - 1 + x - 2 = 2x - 3$

(iii) $x < 1$ 일 때, $y = -(x-1) + (x-2) = -1$

$y = |x-1| - |x-2|$ 의 그래프는 다음의 그림과 같다.



$y = kx$ 의 그래프는 원점을 지나는 직선이므로 $y = kx$ 의 그래프가 점 $(2,\ 1)$ 을 지날 때

$1 = 2k \quad \therefore k = \frac{1}{2}$

따라서 두 그래프가 세 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는

$0 < k < \frac{1}{2}$ 이다.

그러므로 보기 중 위 범위에 속하지 않는 것은 ① 이다.

12. 분수식 $\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{a+c}{b}=\dfrac{a+b}{c}$ 의 값을 구하면?

① $-1, 2$　② $1, 2$　③ $2, \dfrac{1}{2}$　④ $1, \dfrac{1}{2}$　⑤ $-1, \dfrac{1}{2}$

해설

$$\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}=\frac{a+b}{c}=k$$

$b+c=ak\cdots$ ㉠

$a+c=bk\cdots$ ㉡

$a+b=ck\cdots$ ㉢

㉠ + ㉡ + ㉢하면

$2(a+b+c)=k(a+b+c)$

i) $a+b+c\neq 0$이면 $k=2$

ii) $a+b+c=0$일 때 $b+c=-a$

$$\frac{b+c}{a}=\frac{-a}{a}=-1$$

$\therefore k=-1, 2$

13. 소비자 단체에서 백화점의 할인 판매 상품의 가격을 조사하였더니, 각 백화점들은 상품의 정가를 원가보다 높게 거짓으로 표시하여 할인 판매를 하고 있었다. 표시된 정가보다 20 %를 할인하여 팔아도 12 %의 이익을 남기도록 하고 있었다면, 정가는 원가보다 몇 %를 더 높여 표시되었는가? (여기서, 원가는 업자의 이윤까지 표함된 정상적인 판매 가격이다.)

① 24 % ② 28 % ③ 32 % ④ 36 % ⑤ 40 %

해설

원가를 A 원이라 하고, x %높게 정가를 정했다고 하자.

표시된 정가는 $A\left(1+\frac{x}{100}\right)$ 원

할인 판매 가격은 $A\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{20}{100}\right)$ 이다.

원가에 12 %의 이익이 있게 파는 가격은

$A\left(1+\frac{12}{100}\right)$ 이므로

$$A\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{20}{100}\right)=A\left(1+\frac{12}{100}\right)$$

$$\frac{100+x}{100}\cdot\frac{80}{100}A=\frac{112}{100}A$$

$$\frac{100+x}{100}=\frac{112}{100}\cdot\frac{100}{80}=\frac{7}{5}$$

$$\therefore x=\frac{7}{5}\times100-100=40(\%)$$

14. 분수함수 $y=\dfrac{2x+3}{x+2}$ 의 치역이 $\{y\,|\,y>2\}$ 일 때, 다음 중 정의역을 바르게 구한 것은?

① $\{x\,|\,-3<x<-2\}$

② $\{x\,|\,x<-2\}$

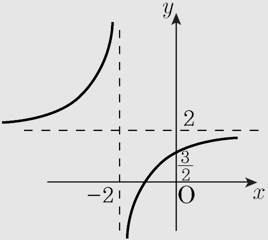
③ $\{x\,|\,-2<x\}$

④ $\{x\,|\,-2\le x<2\}$

⑤ $\{x\,|\,-2\le x<3\}$

해설

$$y=\frac{2x+3}{x+2}=\frac{2(x+2)-1}{x+2}=2+\frac{-1}{x+2}$$



정의역은 $\{x\,|\,x<-2\}$

15. $2 \le x \le 3$ 에서 부등식 $ax+1 \le \dfrac{x+1}{x-1} \le bx+1$ 이 항상 성립할 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하면?

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{3}$

해설

$$y = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{2}{x-1}+1$$

따라서, 분수함수 $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ 의 그래프는

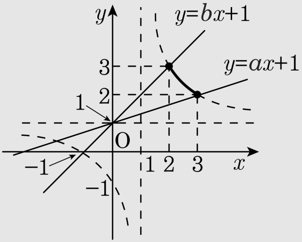
$y = \dfrac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

두 직선 $y = ax+1$, $y = bx+1$ 은 a, b 의 값에 관계없이 점 $(0,\ 1)$ 을 지나는 직선이므로

$2 \le x \le 3$ 에서 $ax+1 \le \dfrac{x+1}{x-1} \le bx+1$ 이 항상 성립하려면 다음 그림에서 $a \le \dfrac{1}{3}$, $b \ge 1$

따라서, a 의 최댓값은 $\dfrac{1}{3}$, b 의 최솟값은 1 이므로 그 합은 $\dfrac{4}{3}$



16. 일차함수 $f(x)$는 실수 x에 대하여 다음을 만족한다. $xf(x)+f(1-x)=x^2+2$ 이 때, $f(100)$ 의 값은?

① -101 ② -100 ③ 0 ④ 100 ⑤ 101

해설

$f(x)=ax+b$ 라 놓으면

$x(ax+b)+a(1-x)+b=x^2+2$

$ax^2+(-a+b)x+(a+b)=x^2+2$

위 식은 x에 대한 항등식이므로

$a=1,\ b=1$

이때 $f(x)=x+1$ 이므로 $f(100)=101$

17. 함수 $f(x)=4-|x|,\ g(x)=-4+|x|$ 에서, $y=f(g(x))$ 와 $y=g(f(x))$ 로 둘러싸여있는 영역의 넓이는?

① 36　② 64　③ 72　④ 54　⑤ 108

해설

i) $y=f(g(x))=4-|-4+|x||$ 에서

$x\ge 4$ 일 때, $y=4-(-4+x)=-x+8$

$0\le x<4$ 일 때, $y=4+(-4+x)=x$

$-4\le x<0$ 일 때, $y=4+(-4-x)=-x$

$x<-4$ 일 때, $y=4-(-4-x)=x+8$

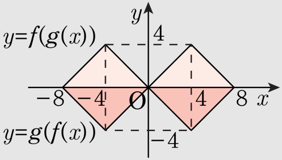
ii) $y=g(f(x))=-4+|4-|x||$ 에서

$x\ge 4$ 일 때, $y=-4-(4-x)=x-8$

$0\le x<4$ 일 때, $y=-4+(4-x)=-x$

$-4\le x<0$ 일 때, $y=-4+(4+x)=x$

$x<-4$ 일 때, $y=-4-(4+x)=-x-8$



그림의 색칠 부분 넓이를 계산하면

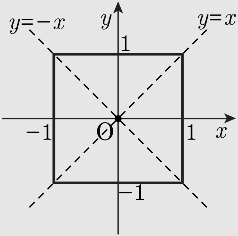
$\therefore\ 8\times 8=64$

18. $|y-x|+|y+x|=2$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 4　　② 6　　③ 8　　④ 10　　⑤ 12

해설

절댓값의 정의에 의하여



(i) $y-x \geq 0,\ y+x \geq 0$ 일 때,

$y-x+y+x=2$

$\therefore\ y=1$

(ii) $y-x \geq 0,\ y+x < 0$ 일 때,

$y-x-y-x=2$

$\therefore\ x=-1$

(iii) $y-x<0,\ y+x \geq 0$ 일 때, $-y+x+y+x=2$

$\therefore\ x=1$

(iv) $y-x<0,\ y+x<0$ 일 때, $-y+x-y-x=2$

$\therefore\ y=-1$

$\therefore\ S=2\times 2=4$

19. $a,\ b,\ c$가 실수일 때, $a+b=4ab,\ b+c=6bc,\ c+a=8ca$이다. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$의 값을 구한 것은?

① $\dfrac{1}{18}$　　② $\dfrac{1}{9}$　　③ 9　　④ 18　　⑤ 1

해설

준식을 변형하면 $\dfrac{a+b}{ab}=4\cdots$①

$\dfrac{b+c}{bc}=6\cdots$②

$\dfrac{c+a}{ca}=8\cdots$③에서

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{a+b}{ab}=4\cdots$①$'$

$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{b+c}{bc}=6\cdots$②$'$

$\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}=\dfrac{a+c}{ca}=8\cdots$③$'$

①$'$ + ②$'$ + ③$'$ 하면

$$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=18$$

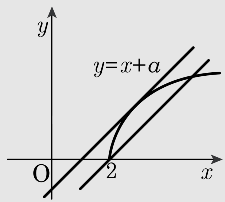
$$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=9$$

20. 곡선 $y = \sqrt{2x-4}$ 와 직선 $y = x + a$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 a 값의 범위를 정하면?

① $-2 < a < -\frac{3}{2}$ ② $-2 \le a < -\frac{3}{2}$ ③ $a < -\frac{3}{2}$

④ $a \le -\frac{3}{2}$ ⑤ $a > -\frac{3}{2}$

해설



그림에서 직선이 그래프와 두점에서 만나는 것은

직선 $y = x + a$ 가 (2, 0) 을 지날 때부터 직선이 $y = \sqrt{2x-4}$ 의 그래프와 접하기 전까지이다.

i) $y = x+a$ 에 (2, 0) 을 대입하면 $a = -2$

ii) $y = \sqrt{2x-4}$ 와 직선 $y = x + a$ 가 접하기 위해서는 두 식을 연립한 식의 판별식 $D = 0$ 이어야 한다.

$\sqrt{2x-4} = x + a$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2 + 2x(a-1) + a^2 + 4 = 0$

$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - a^2 - 4 = 0$

$-2a - 3 > 0$, $a < -\frac{3}{2}$

i) , ii)로 부터 $-2 \le a < -\frac{3}{2}$