1. $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ 일 때, $x \in X$ 인 임의의 x 에 대한 다음의 대응 중에서 함수가 아닌 것은?

① $x \to 1$
② $x \to |x|$
③ $x \to x^2 + 1$
④ $x \to 2x$
⑤ $x \to x^2 + x + 1$

해설

④ $f(-1) = -2$ 이므로 함숫값이 공역에 존재하지 않으므로 함수가 아니다.

2. 함수 $f(x)$ 는 임의의 두 실수 a, b 에 대하여 $f(a+b)=f(a)+f(b)$ 를 만족시킨다. 이러한 함수를 다음에서 고르면?

① $f(x)=|x|$ ② $f(x)=-x^2$

③ $f(x)=3x$ ④ $f(x)=2x+3$

⑤ $f(x)=x^3+3x$

해설

① $f(a+b)=|a+b|$

$f(a)+f(b)=|a|+|b|$

이 때 $|a+b|\le|a|+|b|$

② $f(a+b)=-(a+b)^2=-a^2-2ab-b^2$

$f(a)+f(b)=-a^2-b^2$

③ $f(a+b)=3(a+b)=3a+3b=f(a)+f(b)$

④ $f(a+b)=2(a+b)+3$

$f(a)+f(b)=2a+3+2b+3=2(a+b)+6$

⑤ $$\begin{aligned} f(a+b) &= (a+b)^3+3(a+b) \\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2+3) \\ f(a)+f(b) &= a^3+3a+b^3+3b \\ &= a^3+b^3+3(a+b) \\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2+3) \end{aligned}$$

3. 실수 x, y에 대하여 $f(xy) = f(x)f(y)$이고 f가 일대일대응일 때, $f(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

0이 아닌 x에 대하여 $y = 0$을
$f(xy) = f(x)f(y)$에 대입하자.
$f(0) = f(x)f(0) \Leftrightarrow f(0) - f(0)f(x) = 0$
$\Leftrightarrow f(0)[1 - f(x)] = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ 또는 $f(x) = 1$
만일 $f(x) = 1$이면
$f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 1$,$\cdots$ 이다.
위는 $f(x)$가 일대일대응이라는 것과 모순이므로
$f(x) = 1$은 부적당
$\therefore f(0) = 0$

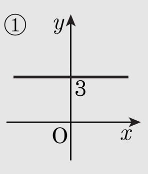
4. 다음 함수 중에서 일대일 대응인 것을 고르면?

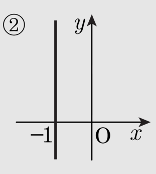
① $y=3$　　② $x=-1$　　③ $y=-x+1$

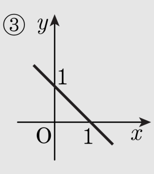
④ $y=|x|$　　⑤ $y=x^2$

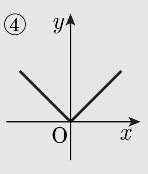
해설

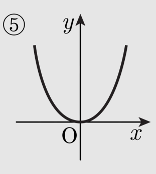
주어진 함수의 그래프를 살펴보면 다음과 같다.

①


②


③


④


⑤


여기서 임의의 두 수 x_1, x_2 에 대하여
$x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 을 만족하는 함수를 찾으면 된다.
따라서 만족하는 함수는 ③이다.

5. 두 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$, $Y = \{1,\ 2\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 8개

해설

1이 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
2가 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
3이 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
따라서 X에서 Y로의 함수의 개수는
$2 \times 2 \times 2 = 8$(개)

6. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 세 함수 $f,\ g,\ h$ 에 대하여 $(h\circ g)(x) = 3x+4$, $f(x) = x^2$ 일 때, $(h\circ(g\circ f))(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$$\begin{aligned}(h\circ(g\circ f))(2) &= ((h\circ g)\circ f)(2)\\ &= (h\circ g)(f(2))\\ &= (h\circ g)(4)\\ &= 3\times 4+4 = 16\end{aligned}$$

7. 함수 $f(x) = | 4x + a | + b$ 는 $x = 3$ 일 때, 최솟값 -2 를 가진다. 이때, 상수 a, b 의 값에 대하여 $b - a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

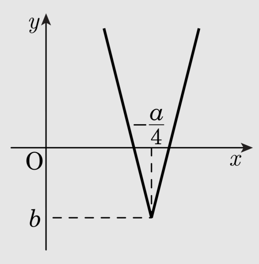
▷ 정답 : 10

해설

$f(x) = | 4x + a | + b = \left|4\left(x + \frac{a}{4}\right)\right| + b$ 의 그래프는

$y = | 4x |$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 $-\frac{a}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 $x = -\frac{a}{4}$ 일 때

최솟값 b 를 가지므로 $-\frac{a}{4} = 3,\ b = -2$

따라서 $a = -12,\ b = -2$ 이므로

$\therefore b - a = 10$

8. 다음 식을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} = 10$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1-\frac{x}{x-1}} = \frac{x-1}{x-1-x} = 1-x$$

$1-x=10$

$\therefore x=-9$

9. 함수 $y=\dfrac{2+x}{1-2x}$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=a, y=b$ 일 때, a 의 값을 구하면?

① -1 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ 0 ④ 1 ⑤ $\dfrac{1}{2}$

해설

$y=\dfrac{x+2}{-2x+1}$

$=\dfrac{x+2}{-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}$

$=\dfrac{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{5}{2}}{-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}$

$=\dfrac{\dfrac{5}{2}}{-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{2},\ b=-\dfrac{1}{2}$

10. 무리함수 $y=-\sqrt{-2(x-2)}+3$가 지나는 모든 사분면은?

① 1 , 2 사분면　　② 1 , 4 사분면

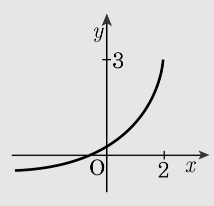
③ 1 , 2 , 3 사분면　　④ 2 , 3 , 4 사분면

⑤ 1 , 3 , 4 사분면

해설

꼭지점이 $(2,3)$ 이고 $(0,1)$ 을 지나므로

$\therefore$ $1,2,3$ 사분면을 지난다.



11. 공집합이 아닌 두집합 X, Y에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x) = x^2 - x - 3$, $g(x) = x + 5$ 에 대하여 $f = g$일 때, 정의역 X가 될 수 있는 집합의 개수는 a개이다. a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = g(x)$이므로 집합 X는 방정식 $f(x) = g(x)$를 만족하는 x의 값을 원소로 갖는 집합이다.
$x^2 - x - 3 = x + 5$에서 $x^2 - 2x - 8 = 0$, $(x - 4)(x + 2) = 0$
$\therefore\ x = 4$ 또는 $x = -2$
즉, 집합 $\{-2, 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역 X가 될 수 있으므로 집합 X의 개수는 $2^2 - 1 = 3$(개)이다.
$\therefore a = 3$

12. 함수 $f(x) = \begin{cases} 2(x \geq 1) \\ 1(x < 1) \end{cases}$ 에서 $y = (f \circ f)(x)$의 식을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답 : 2

해설

i) $x \geq 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2) = 2$
ii) $x < 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(1) = 2$
$\therefore\ y = (f \circ f)(x) = 2$

13. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -4x - 5$ 일 때, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 를 만족시키는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h \circ g)(-2)$ 의 값은 얼마인가?

① 5　　② 3　　③ 1　　④ −3　　⑤ −5

해설

$h(x) = ax + b$ 로 놓으면
$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2x + 3)$
$= a(2x + 3) + b = 2ax + 3a + b$
그런데, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 이므로
$2ax + 3a + b = -4x - 5,$
$2a = -4,\ 3a + b = -5$
즉, $a = -2, b = 1$ 이므로 $h(x) = -2x + 1$
$(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3) = -5$

해설

$(h \circ f)(x) = g(x)$ 에서
$h(f(x)) = g(x)$ 이고 $f(x) = 2x + 3$ 이므로
$h(2x + 3) = g(x)$
또한, $(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3)$
$h(3) = g(0) = -5$

14. $x \neq -1$ 인 실수에서 정의된 분수함수 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ 에 대하여 $f^2 = f \circ f, \ \cdots \ f^{n+1} = f^n \circ f$ 이 성립할 때, $f^{2005}\left(-\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f^2(x) = f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \dfrac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}} = x$ 이므로

따라서, $f^{2n}(x) = x$ 이다. (단, n 은 자연수)

$\therefore \ f^{2005}\left(-\frac{1}{2}\right) = f^{2004}\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$

15. 임의의 양수 a, b 에 대하여 $f(a)+f(b)=f(ab)$ 인 함수 $f(x)$ 가 있다. $f(2)=\alpha$, $f(3)=\beta$ 이고, f 의 역함수를 g 라 할 때, $g(\alpha+\beta)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$f(a)+f(b)=f(ab)$ 에 $a=2$, $b=3$ 을 대입하면
$f(2)+f(3)=f(6)$
$\therefore\ f(6)=\alpha+\beta$
$\therefore\ f^{-1}(\alpha+\beta)=6$
$\therefore\ g(\alpha+\beta)=6$

16. $f(x) = \begin{cases} x^2+1(x \geq 0) \\ x+1(x < 0) \end{cases}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(5)+g(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$g(5) = a$ 라 하면 $f^{-1}(5) = a$ 에서 $f(a) = 5$
그런데 $x \geq 0$ 일 때, $f(x) = x^2+1 \geq 1$ 이므로
$f(a) = a^2+1 = 5$
$\therefore a = 2(\because a \geq 0) \therefore g(5) = 2$
또, $g(0) = b$ 라 하면 $f^{-1}(0) = b$ 에서 $f(b) = 0$
그런데 $x < 0$ 일 때, $f(x) = x+1 < 1$ 이므로
$f(b) = b+1 = 0$
$\therefore b = -1 \therefore g(0) = -1$
$\therefore g(5)+g(0) = 2-1 = 1$

17. 분수식 $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2}{(y-x)(y-z)}+\frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\frac{x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \cdots$ ①

①에서 분자를 x에 관하여 정리하면

$x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)$

$=(z-y)x^2-(z^2-y^2)x+yz^2-y^2z$

$=(z-y)x^2-(z+y)(z-y)x+zy(z-y)$

$=(z-y)\left\{x^2-(z+y)x+zy\right\}$

$=(z-y)(x-z)(x-y)=(x-y)(y-z)(z-x)$

$\therefore$ (준식) $=\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=1$

18. $\frac{x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$ 을 만족할 때, a^2+b^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\frac{x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$$
$$= \frac{(a+b)x+2a+b}{(x+1)(x+2)}$$

$a+b=1, 2a+b=3$

$\therefore\ a=2,\ b=-1$

$\therefore\ a^2+b^2=2^2+(-1)^2=5$

19. $a : b = c : d$일 때 다음 등식 중 성립하지 <u>않는</u> 것은?(단, 분모는 모두 0 이 아니다.)

① $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$
② $\frac{a+d}{a-d} = \frac{b+c}{b-c}$
③ $\frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$
④ $\frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$
⑤ $\frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$

해설

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$에서

$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \cdots$ ㉠

$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \cdots$ ㉡

㉡ ÷ ㉠하면

$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$에서

$\frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d} \cdots$ ㉢

$\frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d} \cdots$ ㉣

㉣ ÷ ㉢하면

$\frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$에서 가비의 리를 이용하면

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$

$\therefore \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$

20. 무리식 $\sqrt{2-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$ 의 값이 실수가 되도록 x의 범위를 정할 때, 정수 x의 개수는?

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

$2-x \geq 0,\ x+3>0$

$\therefore -3<x\leq 2$ 이므로 정수의 개수는 5개

21. $\sqrt{10+\sqrt{96}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, $a+b+\frac{2}{a+b}$의 값을 구하면?

① $2\sqrt{6}$　② $\sqrt{6}$　③ $2-\sqrt{6}$
④ $3+\sqrt{6}$　⑤ $3+\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{10+\sqrt{96}}=\sqrt{10+2\sqrt{24}}=\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{4})^2}$
$=\sqrt{6}+2,\ 2+\sqrt{6}=4.\times\times\times$
$\therefore$ 정수 부분 a : 4 소수 부분 b : $=\sqrt{6}-2$
$\Rightarrow a+b+\frac{2}{a+b}=2+\sqrt{6}+\frac{2}{2+\sqrt{6}}$
$=\sqrt{6}+2+\frac{2(\sqrt{6}-2)}{(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)}$
$=2\sqrt{6}$

22. $a = \sqrt{2+\sqrt{3}}, b = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ 일 때, a^3+b^3 의 값을 구하여라. (단, p, q는 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : $3\sqrt{6}$

해설

$$a = \sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

$$b = \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

$a+b = \sqrt{6}, ab = 1$

$a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 6\sqrt{6} - 3\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$

23. 무리함수 $y = \sqrt{a-x}-1$ 의 그래프가 원점을 지나고 정의역이 $\{x \mid x \le \alpha\}$, 치역이 $\{y \mid y \ge \beta\}$ 일 때, $a+\alpha+\beta$ 의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

주어진 무리함수의 그래프가
점 $(0,\ 0)$ 을 지나므로
$0 = \sqrt{a-1}$
$\therefore a = 1$
즉, 주어진 무리함수는 $y = \sqrt{1-x}-1$ 이고
$1-x \ge 0$ 에서 $x \le 1$ 이므로
정의역은 $\{x \mid x \le 1\}$
$\therefore \alpha = 1$
또, $y = \sqrt{1-x}-1$ 에서
$y+1 = \sqrt{1-x}-1$ 이므로 $y+1 \ge 0$
치역은 $\{y \mid y \ge -1\}$
$\therefore \beta = -1$
$\therefore a+\alpha+\beta = 1$

24. 함수 $y = \sqrt{2x+6}+1$ 의 그래프의 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것을 나열하면?

㉠ $y = \sqrt{2x}$를 평행이동한 것이다.

㉡ $y = \sqrt{2x}$를 대칭이동한 것이다.

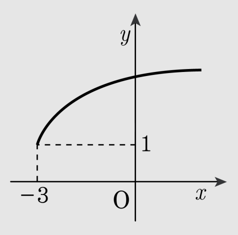
㉢ 정의역 : $\{x \mid x \geq 3$인 실수$\}$

㉣ 치역 : $\{y \mid y \geq 1$인 실수$\}$

① ㉡, ㉣ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉣

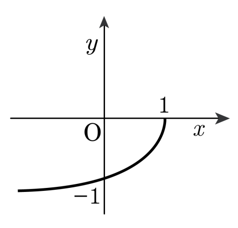
해설

$y = \sqrt{2(x+3)}+1$ 의 그래프는 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



㉠ $y = \sqrt{2x}$의 그래프를 x 축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한
것이다.
∴ 참
㉡ $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 평행이동한 것이다.
∴ 거짓
㉢ 정의역은 $\{x \mid x \geq -3$인 실수$\}$이다.
∴ 거짓
㉣ 치역은 $\{y \mid y \geq 1$인 실수$\}$이다.
∴ 참

25. $y = -\sqrt{ax+b}+c$의 그래프의 개형이 아래 그림과 같을 때, $a+b+c$의 값은?



① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$y = -\sqrt{ax+b}+c = -\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}+c$

점$(1, 0)$에서 시작이므로 $-\dfrac{b}{a} = 1,\ c = 0$

$\therefore b = -a,\ c = 0$

이것을 주어진 식에 대입하면 $y = -\sqrt{ax-a}$이고

주어진 그래프가 점$(0, -1)$를 지나므로

$-1 = -\sqrt{-a}$

양변을 제곱을 하면 $1 = -a$

$\therefore\ a = -1$

따라서 $a = -1,\ b = 1,\ c = 0$이므로

$a+b+c = -1+1+0 = 0$

26. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$, $g(x)=\sqrt{x}$ 에 대하여

$(f\circ g)(a)=\dfrac{1}{2}$ 일 때, $(g\circ f)(4a)$ 의 값은? (단, $a>0$)

① $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　② $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　③ $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　④ $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$　⑤ $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

해설

$(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(\sqrt{a})=\dfrac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}$ 이므로

$\dfrac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}=\dfrac{1}{2}$, $2\sqrt{a}=1+\sqrt{a}$

$\sqrt{a}=1$ $\therefore a=1$

$\therefore (g\circ f)(4a)=(g\circ f)(4)=g(f(4))=g\left(\dfrac{4}{5}\right)$

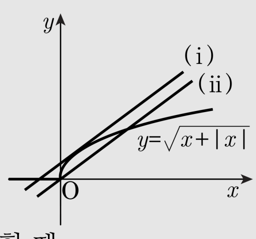
$=\sqrt{\dfrac{4}{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

27. 함수 $y = \sqrt{x+|x|}$와 직선 $y = x+k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < k < 0$　　② $-1 < k \leq 0$　　③ $0 < k < \frac{1}{2}$

④ $0 \leq k < \frac{1}{2}$　　⑤ $0 < k \leq \frac{1}{2}$

해설



$x \geq 0$일 때 $y = \sqrt{2x}$이고 $x < 0$일 때 $y = 0$이므로

$y = \sqrt{x+|x|}$의 그래프는

그림과 같고 직선 $y = x+k$와 서로 다른 세 점에서 만나려면

(i)과 (ii)사이에 존재해야 한다.

① 곡선 $y = \sqrt{2x}$와 직선 $y = x+k$가 접할 때

$\sqrt{2x} = x+k$에서 $2x = (x+k)^2$

$x^2 + 2(k-1)x + k^2 = 0$

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - k^2 = 0,\ -2k+1 = 0$

$\therefore k = \frac{1}{2}$

② 직선 $y = x+k$가 원점을 지날 때 $k = 0$

①, ②에서 구하는 k의 값의 범위는 $0 < k < \frac{1}{2}$

28. 자연수 n에 대하여 n^2을 오진법으로 표시했을 때 일의 자리수를 $f(n)$이라 하자. <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

ㄱ $f(3) = 4$

ㄴ $0 \le f(n) \le 4$

ㄷ $f(n) = 2$인 자연수 n은 없다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ. $f(3)$은 3^2을 오진법으로 표시한
일의 자리수이므로 $3^2 = 5 \times 1 + 4 = 14_{(5)}$ 에서
$f(3) = 4 \quad \therefore$ 참
ㄴ. 오진법으로 쓸 때 1의 자리에는
$0, 1, 2, 3, 4$만이 올 수 있으므로
$0 \le f(n) \le 4 \quad \therefore$ 참
ㄷ. $f(n) = 2$ 이므로
$n^2 = p_k 5^k + p_{k-1} 5^{k-1} + \cdots + p_2 5^2 + p_1 \cdot 5 + 2$
$(p_i = 0, 1, 2, 3, 4)$ 의 꼴로 나타낼 수 있다.
즉, n^2을 5로 나눈 나머지가 2가 된다는 뜻이다.
그런데 정수 l에 대하여
i) $n = 5l$이면 $n^2 = 25l^2$
즉, 5로 나눈 나머지는 0이다.
ii) $n = 5l + 1$이면 $n^2 = (5l+1)^2 = 25l^2 + 10l + 1$
즉, 5로 나눈 나머지는 1이다.
iii) $n = 5l + 2$이면 $n^2 = (5l+2)^2 = 25l^2 + 20l + 4$
즉, 5로 나눈 나머지는 4이다.
iv) $n = 5l + 3$이면 $n^2 = (5l+3)^2 = 25l^2 + 30l + 5 + 4$
즉, 5로 나눈 나머지는 4이다.
v) $n = 5l + 4$이면 $n^2 = (5l+4)^2 = 25l^2 + 40l + 15 + 1$
즉, 5로 나눈 나머지는 1이다.
모든 자연수 n은 i), ii), iii), iv), v)중
어느 한 꼴로 표현이 가능하므로
5로 나눈 나머지가 2가 되는 경우는 없다.
$\therefore$ 참

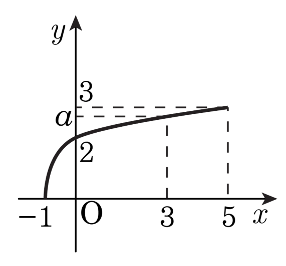
29. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 일 때, 함수 $f : X \to X$ 가 X 의 임의의 원소 x 에 대하여 $f(x) \le x$ 를 만족한다. 이 때, 함수 f 의 개수는?

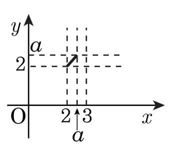
① 16 개　② 20 개　③ 24 개　④ 28 개　⑤ 32 개

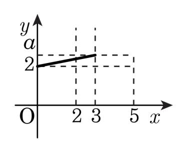
해설

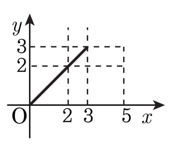
$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1 의 1 개 $\Leftarrow f(1) \le 1$
$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1, 2 의 2 개 $\Leftarrow f(2) \le 2$
$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1, 2, 3 의 3개 $\Leftarrow f(3) \le 3$
$f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1, 2, 3, 4 의 4개 $\Leftarrow f(4) \le 4$
따라서, 구하는 함수 f 의 개수는
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ (개)

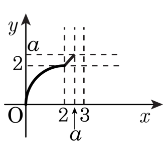
30. 실수 $-1 \le x \le 5$에서 정의된 함수 $y = f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같다. 합성함수 $(f \circ f)(x)$의 그래프는?

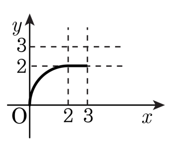


①


②


③


④


⑤


해설

실수 $-1 \le x \le 5$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$이므로 $(f \circ f)\ (x)$ 함수는 $f(f(x))$에서 $f(x)$의 치역을 정의역으로 하는 함수이다.
따라서 합성함수 $(f \circ f)(x)$는
$y = f(x)\ (0 \le x \le 3\ )$가 되고 치역은 $2 \le y \le a$ 이다.

31. 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수 f를 $f : x \to a|x-1|+(2-a)x+a$ 와 같이 정의한다. 함수 f의 역함수가 존재할 때, 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a < 1$　　② $a > 1$　　③ $0 < a < 2$
④ $-\frac{1}{2} < a < 2$　　⑤ $0 < a < \frac{2}{3}$

해설

역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 한다.
$f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$
$$= \begin{cases} 2x & (x \geq 1) \\ (2-2a)x + 2a & (x < 1) \end{cases}$$
가 일대일대응이려면 $x \geq 1$에서 증가함수이므로 $x < 1$에서도 증가함수 이어야 한다.
즉, $2 - 2a > 0$에서 $a < 1$

32. 함수 $f(x)=4x-1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 함수 $f(3x)$의 역함수를 $g(x)$로 나타내면 무엇인가?

① $g\left(\frac{x}{3}\right)$ ② $3g(x)$ ③ $g(3x)$
④ $\frac{1}{3}g(3x)$ ⑤ $\frac{1}{3}g(x)$

해설

$f(x)=4x-1$에서 $f(x)$를 y로 놓고
$y=4x-1$을 x에 관하여 정리하면
$x=\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}$
이 때, x와 y를 바꾸면
$f^{-1}(x)=g(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$
또, $f(3x)=12x-1$에서 $f(3x)=y$로 놓고
$y=12x-1$을 x에 관하여 정리하면
$x=\frac{1}{12}y+\frac{1}{12}$
$\therefore f^{-1}(3x)=\frac{1}{12}x+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{3}g(x)$

33. 두 함수 $f(x)=3x-1$, $g(x)=-x+2$ 에 대하여 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(1)$ 의 값은?

① -4　② -2　③ $-\frac{4}{3}$　④ 0　⑤ 1

해설

$g^{-1}(x)=-x+2$

$$\begin{aligned} g^{-1}(f(x)) &= g^{-1}(3x-1)=-(3x-1)+2 \\ &= -3x+3 \end{aligned}$$

$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ 이므로

$$\begin{aligned} (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(1) &= (f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(1) \\ &= (g^{-1}\circ f)(1) \\ &= g^{-1}(f(1))=0 \end{aligned}$$

34. 함수 $f(x)$가 $f(x)=\begin{cases} 2x-9 & (x \geq 0) \\ \frac{2}{3}x-9 & (x<0) \end{cases}$일 때, 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 모든 근의 합을 구하여라. (단, $f^{-1}(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.)

▶ 답:

▷ 정답: -18

해설

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면
$2x-9=x$에서 $x=9$
$\frac{2}{3}x-9=x$에서 $x=-27$
따라서, 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 모든 근의 합은
$9+(-27)=-18$

35. $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{20}}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{30}}$ 의 값은?

① $\frac{6-\sqrt{6}}{6}$　② $\frac{\sqrt{5}-1}{12}$　③ $\frac{10-\sqrt{2}}{20}$
④ $\frac{16-\sqrt{5}}{30}$　⑤ $\frac{\sqrt{30}-1}{2}$

해설

$\sqrt{2}=\sqrt{1}\times\sqrt{2},\ \sqrt{6}=\sqrt{2}\times\sqrt{3},\ \cdots,\ \sqrt{30}=\sqrt{5}\times\sqrt{6}$ 임을 이용한다.

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{20}}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{30}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{4}\times\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{5}\times\sqrt{4}}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}$$
$$=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$
$$=1-\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}}=\frac{6-\sqrt{6}}{6}$$

36. 세 자연수 $a,\ b,\ c$가 $\dfrac{2b}{a}=\dfrac{3c}{2b}=\dfrac{a}{3c}$를 만족하고 $a,\ b,\ c$의 최소공배수가 12일 때, $a+b+c$의 값은?

① 22　　② 20　　③ 18　　④ 16　　⑤ 14

해설

$a+2b+3c\neq 0$ ($\because a,\ b,\ c$는 자연수)이므로
가비의 리에 의하여
$\dfrac{2b}{a}=\dfrac{3c}{2b}=\dfrac{a}{3c}=\dfrac{a+2b+3c}{a+2b+3c}=1$에서
$a=3c,\ a=2b\ \therefore b=\dfrac{1}{2}a,\ \ c=\dfrac{1}{3}a$
$\therefore a\ :\ b\ :\ c=a\ :\ \dfrac{1}{2}a\ :\ \dfrac{1}{3}a$
$=6\ :\ 3\ :\ 2$
세 수의 최대공약수를 G라 하면
$a=6G,\ b=3G,\ c=2G$
(최소공배수)$=6G=12,\ G=2$
그러므로 $a=12,\ b=6,\ c=4$
$\therefore\ a+b+c=22$

37. 함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 역함수가 $f^{-1}(x)=\dfrac{2x-4}{-x+3}$ 일 때, 함수 $y=|x+a|+b+c$ 의 최솟값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

f^{-1} 의 역함수가 f 이므로 $f(x)=(f^{-1})^{-1}(x)$

$y=f^{-1}(x)=\dfrac{2x-4}{-x+3}$ 를

x에 대하여 풀면, $x=\dfrac{3y+4}{y+2}$

x와 y를 바꾸면, $y=f(x)=\dfrac{3x+4}{x+2}$

$f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 이므로 $a=3,\ b=4,\ c=2$

함수 $y=|x+3|+6$은 $x=-3$일 때, 최솟값 6을 갖는다.

38. $x = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$일 때, $x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 1$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 7

해설

$x = \sqrt{2}+1,\ (x-1)^2 = (\sqrt{2})^2$에서

$x^2 - 2x - 1 = 0$

(준식) $= (x^2 - 2x - 1)(x^2 + 2) + 3$

$= 0 \times (x^2 + 2) + 3 = 3$

39. 유리수 a, b, c에 대하여 $\dfrac{1}{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{6}}=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$일 때, $a+b+c$의 값을 구하면?

① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{3}$　③ $\dfrac{1}{2}$　④ 1　⑤ $\dfrac{4}{5}$

해설

$\dfrac{1}{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{6}}=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 에서

$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{6}=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

$=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}$

$=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$

$=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{2},\ \ b=\dfrac{1}{4},\ \ c=-\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ a+b+c=\dfrac{1}{2}$

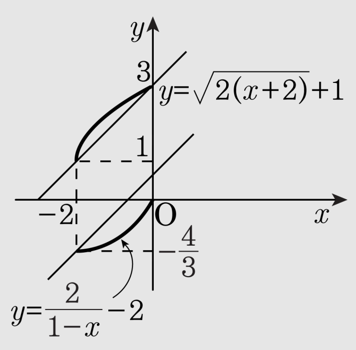
40. 정의역이 $\{x| -2 \leq x \leq 0\}$ 인 두 함수 $y = \sqrt{2(x+2)}+1$, $y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 에 대하여 $y = x+r$ 의 그래프가 $y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 의 그래프보다는 아래에 있고 $y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 의 그래프 보다는 위에 있을 때, r 은 범위가 $r_1 < r < r_2$ 라고 한다. $3r_1 - r_2$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$-2 \leq x \leq 0$ 에서

$y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 과 $y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 의 그래프를 나타내면 다음 그림과 같다.



이 때, $y = x+r$ 의 그래프가
$y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 의 그래프보다
아래에 있으므로 $r < 3$
또한, $y = x+r$ 의 그래프가
$y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 의 그래프보다
위에 있으므로 $r > \dfrac{2}{3}$

$\therefore \dfrac{2}{3} < r < 3$

따라서 $r_1 = \dfrac{2}{3}$, $r_2 = 3$ 이므로

$\therefore 3r_1 - r_2 = 3 \cdot \dfrac{2}{3} - 3 = -1$

41. 두 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(x)$ 가 기함수, $g(x)$ 가 우함수일 때, 다음 보기 중 우함수인 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $f(x)g(x)$	㉡ $f(x)+g(x)$
㉢ $\{f(x)\}^2$	㉣ $(f\circ g)(x)$

① ㉠ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉢, ㉣

해설

$f(x)$ 는 기함수, $g(x)$ 는 우함수이므로 $f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = g(x)$
㉠ $f(-x)g(-x) = -f(x)g(x)$ 이므로 $f(x)g(x)$ 는 기함수이다.
㉡ $f(-x)+g(-x) = -f(x)+g(x)$ 이므로 $f(x)+g(x)$ 는 우함수도 기함수도 아니다.
㉢ $\{f(-x)\}^2 = \{-f(x)\}^2 = \{f(x)\}^2$ 이므로 $\{f(x)\}^2$ 은 우함수이다.
㉣ $(f\circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(g(x)) = (f\circ g)(x)$ 이므로 $(f\circ g)(x)$ 는 우함수이다.
따라서 보기 중 우함수인 것은 ㉢, ㉣ 이다.

42. $\dfrac{x-3}{x-2}-\dfrac{x-2}{x-1}-\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}$ 를 간단히 하면?

① $\dfrac{2}{x(x-1)(x+1)(x+2)}$ ② $\dfrac{-2x}{x(x-1)(x+1)(x+2)}$

③ $\dfrac{-2x+1}{x(x-1)(x+1)(x+2)}$ ④ $\dfrac{-4x}{x(x-1)(x+1)(x+2)}$

⑤ $\dfrac{-4x+2}{x(x-1)(x+1)(x+2)}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \left(1+\frac{-1}{x-2}\right)-\left(1+\frac{-1}{x-1}\right)\\ &\quad-\left(1+\frac{-1}{x}\right)+\left(1+\frac{-1}{x+1}\right)\\ &=\frac{-1}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}+\frac{-1}{x+1}\\ &=\frac{-x+1+x-2}{(x-2)(x-1)}+\frac{x+1-x}{x(x+1)}\\ &=\frac{-x^2-x+x^2-3x+2}{x(x-1)(x+1)(x-2)}\\ &=\frac{-4x+2}{x(x-1)(x+1)(x+2)}\end{aligned}$$

43. a, b, c가 실수일 때, $a+b=4ab$, $b+c=10bc$, $c+a=6ca$이 성립한다. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$의 값을 구하라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

$a+b=4ab$에서 $\frac{a+b}{ab}=4$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=4$

같은 방법으로 $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=10$, $\frac{1}{c}+\frac{1}{a}=6$

$\therefore 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=20$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=10$

44. 함수 $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ 에 관한 설명 중 틀린 것을 고르면?

① 점근선 중 하나는 $x=-2$ 이다.

② 점근선 중 하나는 $y=2$ 이다.

③ 함수 $y=\dfrac{2}{x}+2$ 의 그래프를 x 축 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프다.

④ 이 그래프는 x축을 지난다.

⑤ 함수 $y=\dfrac{-5}{x+2}$ 의 그래프를 y 축 방향으로 2 만큼 평행이동한 그래프다.

해설

$y=\dfrac{2x-1}{x+2}=\dfrac{2(x+2)-5}{x+2}=\dfrac{-5}{x+2}+2$

그러므로 함수의 점근선은 $x=-2,\ y=2$이고

$y=\dfrac{-5}{x}$ 의 그래프를 x축 방향으로 -2만큼,

y축 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이다.

따라서 설명 중 틀린 것은 ③이다.

45. a, b가 양수일 때, $2 \leq x \leq 3$을 만족하는 임의의 실수 x에 대하여 $ax+2 \leq \dfrac{2x-1}{x-1} \leq bx+2$가 성립할 때, a의 최댓값과 b의 최솟값의 합을 구하면?

① $\dfrac{2}{3}$　　② 1　　③ $\dfrac{4}{3}$　　④ $\dfrac{5}{3}$　　⑤ 2

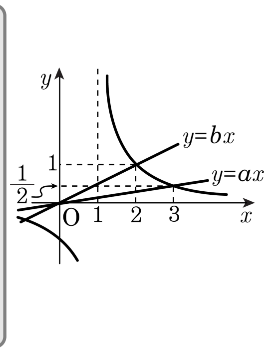
해설

$\dfrac{2x-1}{x-1} = 2 + \dfrac{1}{x-1}$ $(2 \leq x \leq 3)$이므로

$ax+2 \leq 2 + \dfrac{1}{x-1} \leq bx+2$

$ax \leq \dfrac{1}{x-1} \leq bx$

위의 그래프에 의하여 $a \leq \dfrac{1}{6}$, $b \geq \dfrac{1}{2}$



46. 함수 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 에 대하여 $f(2x)$를 $f(x)$로 나타내면 ?

① $\dfrac{2f(x)}{2f(x)-1}$ ② $\dfrac{2f(x)}{2f(x)+1}$ ③ $\dfrac{2f(x)}{f(x)-1}$
④ $\dfrac{2f(x)}{f(x)+1}$ ⑤ $\dfrac{2f(x)}{f(x)-2}$

해설

$f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 에서 $x=\dfrac{f(x)}{f(x)-1}$

$2x=\dfrac{2f(x)}{f(x)-1}$

$f(2x)=f\left(\dfrac{2f(x)}{f(x)-1}\right)=\dfrac{\dfrac{2f(x)}{f(x)-1}}{\dfrac{2f(x)}{f(x)-1}-1}$

$=\dfrac{2f(x)}{2f(x)-f(x)+1}=\dfrac{2f(x)}{f(x)+1}$

47. $x = a^2 + b^2$, $y = \frac{3}{2}ab$라 할 때, $\sqrt{(x+y)^2} - \sqrt{(x-y)^2}$을 간단히 하면?

① $-2(a^2+b^2)$　　② $-3ab$　　③ $2(a^2+b^2)$

④ $3ab$　　⑤ 0

해설

$x \pm y = a^2 \pm \frac{3}{2}ab + b^2 = a^2 \pm \frac{3}{2}ab + \frac{9}{16}b^2 + \frac{7}{16}b^2$

$= \left(a \pm \frac{3}{2}b\right)^2 + \frac{7}{16}b^2 \geq 0$

$\therefore\ x \pm y \geq 0$

$\sqrt{(x+y)^2} - \sqrt{(x-y)^2} = |x+y| - |x-y|$

$= (x+y) - (x-y) = 2y$

$= 2\left(\frac{3}{2}ab\right) = 3ab$

해설

(산술평균)≥ (기하평균) 으로부터

$x = a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2|ab| \geq \frac{3}{2}|ab| = |y|$

$\therefore\ x \pm y \geq 0$

$\sqrt{(x+y)^2} - \sqrt{(x-y)^2}$

$= |x+y| - |x-y|$

$= (x+y) - (x-y) = 2y$

$= 2\left(\frac{3}{2}ab\right) = 3ab$

48. $\sqrt{x} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}(a > 1)$ 일 때, $\frac{x-2-\sqrt{x^2-4x}}{x+2+\sqrt{x^2-4x}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{a(a-2)}$　② $\frac{1}{2a+4}$　③ $\frac{a}{2a+4}$
④ $\frac{a}{a+2}$　⑤ $\frac{1}{a(a+2)}$

해설

제곱하면 $x = a + \frac{1}{a} + 2$

$x - 2 = a + \frac{1}{a}$ 로부터,

$x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$

$= \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 4$

$= \left(a - \frac{1}{a}\right)^2$

그런데 $a > 1$ 로부터, $a - \frac{1}{a} > 0$

$\therefore \sqrt{x^2 - 4x} = a - \frac{1}{a}$ 에서 주어진 식

$= \frac{\frac{2}{a}}{2a+4} = \frac{1}{a(a+2)}$

49. 두 함수 $f(x) = \sqrt{2x+3}$, $g(x) = px + q(p > 0)$ 에 대하여 부등식 $f\left(x - \frac{3}{2}\right) \leq g(x) \leq f(x)$ 을 만족하는 x의 범위가 $2 \leq x \leq 3$일 때, 실수 $q - p$의 값을 구하면?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

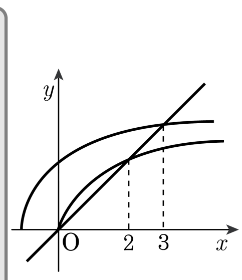
해설

$f\left(x - \frac{3}{2}\right) = \sqrt{2x}$

$\sqrt{2x} \leq px+q \leq \sqrt{2}x+3$ 의 해가 $2 \leq x \leq 3$ 이므로
그래프가 그림과 같아야 한다.

$\therefore\ g(2) = 2, g(3) = 3 \quad \therefore g(x) = x$

$q - p = -1$

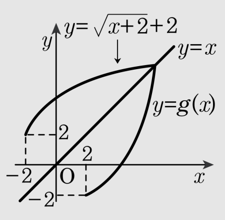


50. 무리함수 $y = \sqrt{x+2}+2$의 역함수를 $y = g(x)$라 할 때, 연립방정식 $\begin{cases} y = \sqrt{x+2}+2 \\ y = g(x) \end{cases}$ 의 근을 $x = \alpha,\ y = \beta$라 하자. 이 때, $\alpha^2 - 5\beta$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설



두 함수 $y = \sqrt{x+2}+2,\ y = g(x)$의 그래프는
직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로 그림과 같이
그 교점은 직선 $y = x$위에 있다.

즉, 연립방정식 $\begin{cases} y = \sqrt{x+2}+2 \\ y = g(x) \end{cases}$ 의 근은
$y = x$를 만족한다. $(\alpha = \beta)$
따라서, $y = \sqrt{x+2}+2$ 와 $y = x$를 연립하면 된다.

$x = \sqrt{x+2}+2$ 에서 $x-2 = \sqrt{x+2}$
$x^2 - 4x + 4 = x + 2$
$x^2 - 5x + 2 = 0$
$\therefore\ \alpha^2 - 5\alpha + 2 = 0$
$\therefore\ \alpha^2 - 5\beta = \alpha^2 - 5\alpha\ (\because \alpha = \beta)$
$= -2$