

1. 실수 전체의 집합을 R 이라 할 때, 다음 중 R 에서 R 로의 함수가 될 수 없는 것은 무엇인가?

① $y = 0$

② $y = -x + 4$

③ $y = (x - 1)^2$

④ $x = y^2 + 4$

⑤ $y = x^3$

해설

4일 때, $5 = y^2 + 4$, $y^2 = 1$ 에서 $y = \pm 1$
즉, $x = 5$ 에 대응하는 y 의 값이
 $-1, 1$ 의 두 개이므로 함수가 될 수 없다.

2. 집합 $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$ 를 $f(x) = |x|$ 라 하자. 이때 함수 f 의 치역의 부분집합의 개수는?

① 2개

② 4개

③ 6개

④ 8개

⑤ 16개

해설

$f(-1) = f(1) = 1, f(0) = 0, f(2) = 2$ 이므로 함수 f 의 치역은 $\{0, 1, 2\}$ 이다.

원소의 개수가 3인 집합의 부분집합은 $2^3 = 8$ (개)이다.

3. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로 대응되는 함수의 개수를 a , 일대일 대응의 개수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a + b = 64$

해설

정의역과 공역의 개수가 다르므로
일대일 대응은 없고, 정의역의 개수가 A
공역의 개수가 B 일 때 함수 개수는 B^A 이다.

$$\therefore 4^3 = 64$$

$$\therefore a + b = 64$$

4. 두 함수 $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 4x + a$ 에 대하여 $(g \circ f)(x) = 12x + 7$ 이 성립할 때, 상수 a 의 값은?

① -3

② -1

③ 1

④ 3

⑤ 5

해설

$f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 4x + a$ 이므로

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 1)$$

$$= 4(3x + 1) + a$$

$$= 12x + 4 + a$$

따라서 $12x + 4 + a = 12x + 7$ 에서 $4 + a = 7$

$$\therefore a = 3$$

5. 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면 무엇인가?

보기

- ㉠ 두 함수 f, g 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 이다.
- ㉡ 함수 f 가 일대일대응이면 역함수 f^{-1} 가 존재한다.
- ㉢ 함수 $f: X \rightarrow Y$ 에 대하여 f^{-1} 가 존재하면 $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$ 이다.
(단, $X \neq Y$)

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠. $f \circ g \neq g \circ f$

㉢. $f: X \rightarrow Y, f^{-1}: Y \rightarrow X$ 이므로,

$f \circ f^{-1}: Y \rightarrow Y, f^{-1} \circ f: X \rightarrow X$

그런데, 조건에서 $X \neq Y$ 이다.

$\therefore f \circ f^{-1} \neq f^{-1} \circ f$

따라서, 옳은 것은 ㉡뿐이다.

6. $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 4} \times \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 4x + 3} \div \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 + 3x - 4}$ 을 간단히 하면 ?

① $\frac{4}{x-3}$

② $\frac{1}{x+4}$

③ $\frac{2}{x+2}$

④ 1

⑤ 0

해설

(주어진 식)

$$= \frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+4)} \times \frac{(x+1)(2x+1)}{(x-1)(x-3)}$$

$$\div \frac{(x-2)(2x+1)}{(x-1)(x+4)}$$

$$= \frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+4)} \times \frac{(x+1)(2x+1)}{(x-1)(x-3)}$$

$$\times \frac{(x-1)(x+4)}{(x-2)(2x+1)} = 1$$

7. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$ 을 간단히 하면?

① $\frac{98}{99}$

② $\frac{100}{99}$

③ $\frac{99}{100}$

④ $\frac{101}{100}$

⑤ $\frac{100}{101}$

해설

이항분리 이용

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \\ &= 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} \end{aligned}$$

8. $\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}}$ 을 간단히 하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2} - 1}}$$

$$= \frac{1}{\frac{-1}{\sqrt{2} - 1}} = 1 - \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2} + 1}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2} + 1}} = 1 + \sqrt{2}$$

$$\therefore (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = -1$$

9. $x : y = 3 : 4$ 일 때, $\frac{x^2 - y^2}{x^2 - xy}$ 의 값을 구하면 $\frac{n}{m}$ (m, n 은 서로소인 정수)이다. 이때, $m + n$ 의 값을 구하면?

- ① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

$x : y = 3 : 4$ 일 때, $x = \frac{3}{4}y$ 이므로

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 - xy} = \frac{\frac{9}{16}y^2 - y^2}{\frac{9}{16}y^2 - \frac{3}{4}y^2} = \frac{7}{3}$$

$$\therefore m = 3, n = 7$$

10. 다음 함수 중 그 그래프를 평행이동시켰을 때, 함수 $y = \frac{2x^2}{x+1}$ 의 그래프와 일치하는 것은?

① $y = \frac{1}{x}$

② $y = \frac{2}{x}$

③ $y = x + \frac{1}{x}$

④ $y = x + \frac{2}{x}$

⑤ $y = 2x + \frac{2}{x}$

해설

$2x^2 = (x+1)(2x-2) + 2$ 이므로

$$y = \frac{2x^2}{x+1} = (2x-2) + \frac{2}{x+1}$$

$$= 2(x+1) + \frac{2}{x+1} - 4$$

$$\therefore y + 4 = 2(x+1) + \frac{2}{x+1}$$

이것은 $y = 2x + \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축

방향으로 -1 , y 축 방향으로 -4 만큼 이동한 것이다.

11. $y = \frac{3-ax}{1-x}$ 의 그래프의 점근선이 $x = 1$, $y = -2$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$$y = \frac{3-ax}{1-x} = \frac{ax-3}{x-1} = \frac{a-3}{x-1} + a$$

이 분수함수의 점근선은 $x = 1$, $y = a$

$$\therefore a = -2$$

12. 함수 $y = \frac{ax+1}{x-1}$ 의 역함수가 그 자신이 되도록 a 의 값을 정하면?

① -1

② 1

③ -2

④ 2

⑤ 0

해설

$$y = \frac{ax+1}{x-1} \text{ 에서 } y(x-1) = ax+1$$

$$yx - y = ax + 1, yx - ax = 1 + y$$

$$x(y-a) = 1+y, x = \frac{1+y}{y-a}$$

$$\therefore y^{-1} = \frac{x+1}{x-a}$$

역함수가 본래 함수와 같으므로

$$\frac{x+1}{x-a} = \frac{ax+1}{x-1}$$

$$\therefore a = 1$$

13. $-1 < x < 1$ 일 때, $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2} \\ &= |x-1| + |x+1| = -(x-1) + (x+1) = 2\end{aligned}$$

14. $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축으로 m 만큼 y 축으로 n 만큼 평행이동하면 $y = \sqrt{2x+6} - 2$ 과 일치한다. $n - m$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$y = \sqrt{2x+6} - 2 = \sqrt{2(x+3)} - 2 \text{ 이므로}$$

$y = \sqrt{2x}$ 를 x 축으로 -3 만큼

y 축으로 -2 만큼 평행이동하면 서로 일치한다.

따라서 $m = -3, n = -2$ 이므로

$$\therefore n - m = 1$$

15. 무리함수 $y = -\sqrt{-2(x-2)} + 3$ 가 지나는 모든 사분면은?

① 1, 2 사분면

② 1, 4 사분면

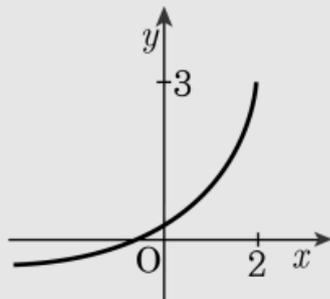
③ 1, 2, 3 사분면

④ 2, 3, 4 사분면

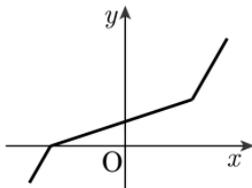
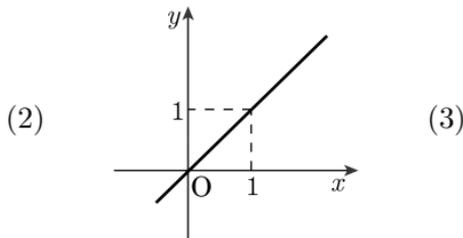
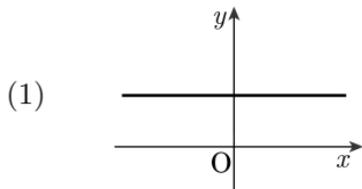
⑤ 1, 3, 4 사분면

해설

꼭지점이 $(2, 3)$ 이고 $(0, 1)$ 을 지나므로
 \therefore 1, 2, 3 사분면을 지난다.



16. 다음 함수의 그래프에서 일대일 대응. 상수함수, 항등함수인 것을 골라 적은 것 중 잘못된 것은?



① (1) 상수함수

② (2) 항등함수

③ (3) 일대일 대응

④ (1) 항등함수

⑤ (2) 일대일 대응

해설

일대일 대응의 그래프는 함수의 그래프 중 x 축에 평행한 직선을 그을 때, 교점이 오직 하나인 그래프이므로 (2), (3) 이다.

상수함수는 X 의 모든 원소가 Y 의 한 원소에만 대응되는 함수이므로 (1) 이다.

항등함수는 X 의 모든 원소가 자기 자신에 대응되는 함수이므로 (2) 이다.

17. 함수 $f(x) = \begin{cases} 2(x \geq 1) \\ 1(x < 1) \end{cases}$ 에서 $y = (f \circ f)(x)$ 의 식을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\text{i) } x \geq 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2) = 2$$

$$\text{ii) } x < 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(1) = 2$$

$$\therefore y = (f \circ f)(x) = 2$$

18. 두 집합 $X = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$, $Y = \{y \mid a \leq y \leq b\}$ 에서 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = 3x - 1$ 의 역함수 $f^{-1} : Y \rightarrow X$ 가 존재할 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

함수 $f(x)$ 는 역함수가 존재하므로 일대일 대응이다. 따라서 함수 $f(x)$ 는 점 $(0, a)$, $(2, b)$ 를 지나야 한다.

$$a = f(0) = -1, b = f(2) = 5$$

$$\therefore a + b = 4$$

19. 실수 전체 집합에서 정의된 함수 f 에 대하여 $f(3x+2) = 6x-3$ 이다.
함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

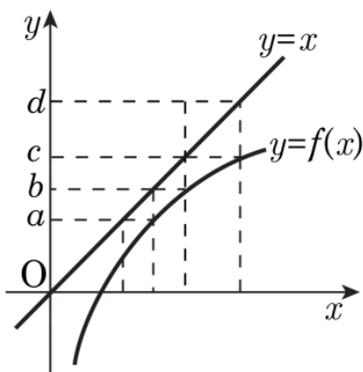
$f(3x+2) = 6x-3$ 에서 $3x+2 = t$ 라 하면

$f(t) = 2t-7$ 이므로 $f(x) = 2x-7$

$$\therefore g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

$$\therefore g(3) = \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 5$$

20. 아래의 그림은 두 함수 $y = f(x)$, $y = x$ 의 그래프이다. $f^{-1}(b)$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : c

해설

$$f^{-1}(b) = k \text{ 라 하면 } f(k) = b$$

$$f(c) = b \text{ 이므로 } k = c$$

$$\text{따라서 } f^{-1}(b) = c$$

21. 함수 $y = |2x - 4| - 4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$y = |2x - 4| - 4 = 2(x - 2) - 4$ 의 그래프는

$y = |2x|$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 2 만큼,

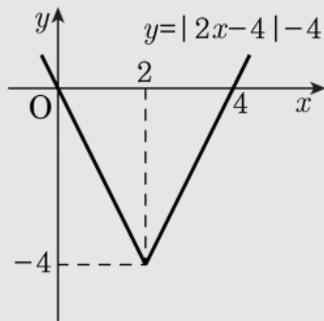
y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한

것이므로

다음 그림과 같다.

따라서 주어진 함수의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이

$$\text{는 } \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$



22. $\frac{x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$ 을 만족할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{(x+1)(x+2)} &= \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} \\ &= \frac{(a+b)x + 2a + b}{(x+1)(x+2)}\end{aligned}$$

$$a + b = 1, 2a + b = 3$$

$$\therefore a = 2, b = -1$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 2^2 + (-1)^2 = 5$$

23. A, B 두 마을의 인구의 비는 4 : 3, 남자의 비는 2 : 1, 여자의 비는 1 : 2이고 A 마을의 총인구가 6000 명일 때, A 마을의 여자의 수를 구하시오.

▶ 답: 명

▷ 정답: 1000 명

해설

A 마을의 남자는 x 명, 여자는 y 명이라 하면

B 마을의 남자는 $\frac{x}{2}$ 명, 여자는 $2y$ 명

6000 : (B 마을의 총 인구) = 4 : 3 에서

B 마을의 총 인구는 4500 명이다.

$$x + y = 6000, \quad x + 4y = 9000 \quad \therefore y = 1000(\text{명})$$

24. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 일 때, $\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \dots + \frac{1}{f(99)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 이므로

$$\frac{1}{f(x)} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준 식}) &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \\ &\quad (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{100} - \sqrt{99}) \\ &= \sqrt{100} - 1 = 10 - 1 = 9 \end{aligned}$$

25. $\sqrt{4 + \sqrt{12}}$ 의 정수 부분을 x , 소수 부분을 y 라 할 때, $(x+2y)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\sqrt{4 + \sqrt{12}} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1 = 2.\times\times\dots$$

$$\therefore x = 2, y = (\sqrt{3} + 1) - 2 = \sqrt{3} - 1$$

$$(x + 2y)^2 = \{2 + 2(\sqrt{3} - 1)\}^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$$

26. $x = \frac{2a}{a^2 + 1}$ 이고 $0 < a < 1$ 일 때, $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ 을 간단히 하면 ?

① $\frac{-2a}{\sqrt{a^2 + 1}}$

② $\frac{-2}{\sqrt{a^2 + 1}}$

③ $\frac{2a}{\sqrt{a^2 + 1}}$

④ $\frac{2}{\sqrt{a^2 + 1}}$

⑤ $\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$

해설

$$x = \frac{2a}{a^2 + 1} (0 < a < 1) \text{ 이므로}$$

$$1 + x = \frac{(a + 1)^2}{a^2 + 1}$$

$$1 - x = \frac{(a - 1)^2}{a^2 + 1}$$

$$(\text{준식}) = \frac{|a + 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} + \frac{|a - 1|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

$$= \frac{a + 1}{\sqrt{a^2 + 1}} + \frac{1 - a}{\sqrt{a^2 + 1}} (\because 0 < a < 1)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

27. $x = 2 + \sqrt{3}$, $y = 2 - \sqrt{3}$ 일 때, $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ 의 값으로 옳은 것은?

① $\sqrt{2}$

② 2

③ $\sqrt{6}$

④ $2\sqrt{2}$

⑤ $2\sqrt{3}$

해설

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + y + 2\sqrt{xy} \quad (x > 0, y > 0)$$

$$= 4 + 2 = 6$$

$$\therefore \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{6} \quad (\because \sqrt{x} + \sqrt{y} > 0)$$

해설

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}} + \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$$

28. $\sqrt{18 - 8\sqrt{2}}$ 의 정수 부분을 x , 소수 부분을 y 라 할 때, $x^2 - 2xy + y^2$ 의 값을 구하면?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$\sqrt{18 - 2\sqrt{32}} = \sqrt{16} - \sqrt{2} = 4 - \sqrt{2}$$

$$1 < \sqrt{2} < 2, 2 < 4 - \sqrt{2} < 3$$

$$x = 2, y = 2 - \sqrt{2}$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 = (2 - 2 + \sqrt{2})^2 = 2$$

29. 무리함수 $y = \sqrt{ax+b} + c (a > 0)$ 의 정의역이 $\{x \mid x \geq 1\}$ 이고, 치역이 $\{y \mid y \geq 2\}$ 일 때, $\frac{2a^2 + c^2 - 2b}{2a}$ 의 최솟값을 구하면?

① $-\sqrt{2}$

② 1

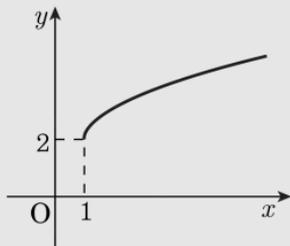
③ $2\sqrt{2}$

④ $2\sqrt{2} + 1$

⑤ $2\sqrt{2} + 2$

해설

정의역과 치역의 조건에 의하여 주어진 무리함수의 그래프는 다음과 같다. 즉 $y = \sqrt{a(x-1)} + 2$ 의 형태임을 알 수 있다.



$y = \sqrt{ax+b} + c$ 와 비교해보면 $b = -a, c = 2$ 이다.

$$\therefore \frac{2a^2 + c^2 - 2b}{2a} = \frac{2a^2 + 4 + 2a}{2a} = a + \frac{2}{a} + 1$$

$a > 0$ 이므로 $a + \frac{2}{a} \geq 2\sqrt{2}$

따라서 $a + \frac{2}{a} + 1 \geq 2\sqrt{2} + 1$ 이므로

최솟값은 $2\sqrt{2} + 1$ 이다.

30. 함수 $y = a\sqrt{bx}$ 에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $a > 0, b < 0$ 이면 정의역은 $\{x \mid x \leq 0\}$ 이다.

㉡ $b > 0$ 이면 치역은 $\{y \mid y \geq 0\}$ 이다.

㉢ $a < 0, b > 0$ 이면 제 1 사분면을 지난다.

㉣ $y = -a\sqrt{-bx}$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭이다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉡, ㉣

해설

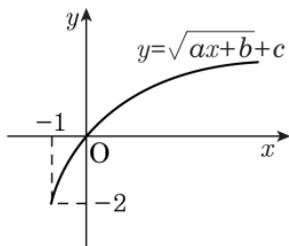
㉡ $a > 0$ 이면 치역은 $\{y \mid y \geq 0\}$ 이다.

㉢ $a < 0, b > 0$ 이면 제 4 사분면을 지난다.

㉣ $y = -a\sqrt{-bx}$ 의 그래프와 원점에 대하여 대칭이다.

따라서 옳은 것은 ㉠ 이다.

31. 함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

주어진 그래프에서 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 -1 만큼,

y 축의 방향으로 -2 만큼

평행이동한 것이므로

$$y = \sqrt{ax+b}+c$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{a(x+1)}-2$$

이것이 원점을 지나므로 $0 = \sqrt{a(0+1)}-2$

$$\therefore \sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4$$

$$y = \sqrt{4x+4}-2$$

$$\therefore a+b+c = 4+4-2 = 6$$

32. $-5 \leq x \leq 3$ 일 때, 함수 $y = 2\sqrt{4-x} - 7$ 의 최댓값을 m , 최솟값을 n 라 할 때, $m+n$ 의 값은?

① -8

② -6

③ -4

④ -2

⑤ 0

해설

$$y = 2\sqrt{4-x} - 7 = 2\sqrt{-(x-4)} - 7$$

주어진 함수의 그래프는 $y = 2\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 -7 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

$$x = -5 \text{ 일 때, 최댓값 } m = 2\sqrt{4 - (-5)} - 7 = -1$$

$$x = 3 \text{ 일 때, 최솟값 } n = 2\sqrt{4 - 3} - 7 = -5$$

$$\therefore m + n = -1 + (-5) = -6$$

33. 원점을 지나는 직선이 두 함수 $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만날 때, 세 점의 x 좌표의 값의 합을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

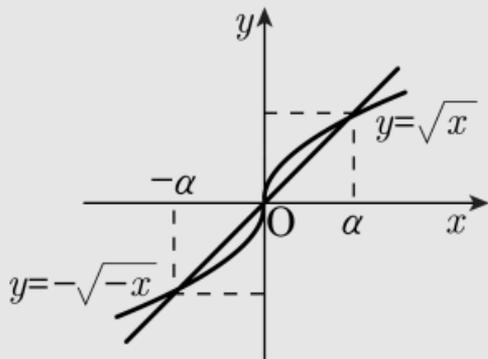
⑤ 2

해설

두 함수 $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프는

원점에 대하여 대칭이므로

다음 그림과 같이 원점을 지나는 직선과 서로 다른 세 점에서 만날 때, 세 점의 x 좌표의 값의 합은 항상 0이다.



34. $x > 2$ 에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 $f(x) = \sqrt{x-2} + 2$, $g(x) = \frac{1}{x-2} + 2$ 일 때 $(f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$$(f \cdot g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$$

$$(g \cdot f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$$

$$\therefore (f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3) = 6$$

35. $y = \sqrt{x-1} + 2$ 의 역함수는?

① $y = x^2 + 4x + 3(x \geq 2)$

② $y = x^2 - 4x + 5(x \geq 2)$

③ $y = x^2 + 4x + 3(x \geq 1)$

④ $y = x^2 - 4x + 5(x \geq 1)$

⑤ $y = x^2 - 3x + 2(x \geq 3)$

해설

$y - 2 = \sqrt{x-1}$ 에서 $\sqrt{x-1} \geq 0$ 이므로 $y \geq 2$

또 양변을 제곱하면, $(y-2)^2 = x-1$

$\therefore x = y^2 - 4y + 5 (y \geq 2)$

x 와 y 를 바꾸면 $y = x^2 - 4x + 5 (x \geq 2)$

36. $X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수}\}$ 이고, $f(x) = x^2 - 6x$ 로 정의되는 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 될 때, 상수 a 의 값을 하면?

① 3

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 10

해설

$X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수}\}$ 이므로
일대일 대응이 되려면
 $x^2 - 6x \geq x$ 가 되어야 한다.

부등식을 풀면

$x \leq 0$ 또는 $x \geq 7$

$x \geq a$ 이므로 $x \geq 7$ 을 만족하는 x 의 최솟값이 a 가 된다.

$\therefore a = 7$

37. 두 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에서 A 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x) = f(x^2)$ 으로 되는 A 에서 B 로의 함수 f 의 개수는?

① 12 개

② 20 개

③ 25 개

④ 27 개

⑤ 30 개

해설

$f(-1) = f(1), f(0) = f(0)$ 이므로

A 의 원소 1 이 대응하는 방법의 수는 5 가지

A 의 원소 0 이 대응하는 방법의 수는 5 가지

$\therefore 5 \times 5 = 25$ (가지)

38. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 에 대하여 $f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 6x - 1$ 이다. $f\left(\frac{4-x}{3}\right) = ax + b$ 일 때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?

① -36

② -20

③ -4

④ 20

⑤ 36

해설

$f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 6x - 1$ 에서 $\frac{x+1}{2} = t$ 라고 하면 $x = 2t - 1$ 이므로

$f(t) = 6(2t - 1) - 1 = 12t - 7 \quad \dots\dots \textcircled{7}$

$\textcircled{7}$ 에 t 대신에 $\frac{4-x}{3}$ 를 대입하면

$f\left(\frac{4-x}{3}\right) = 12\left(\frac{4-x}{3}\right) - 7 = 16 - 4x - 7 = -4x + 9$

$\therefore ab = (-4) \cdot 9 = -36$

39. 함수 $f(x) = x+2$ 에 대하여 $f \circ f = f^2$, $f \circ f^2 = f^3$, \dots , $f \circ f^{99} = f^{100}$ 으로 정의할 때, $f^{100}(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 201

해설

$$f(x) = x + 2$$

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f(f(x)) = f(x+2) = (x+2) + 2 \\ &= x + 2 \cdot 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^3(x) &= f(f^2(x)) = f(x+2 \cdot 2) = (x+2 \cdot 2) + 2 \\ &= x + 2 \cdot 3 \end{aligned}$$

⋮

$$f^{100}(x) = x + 2 \cdot 100$$

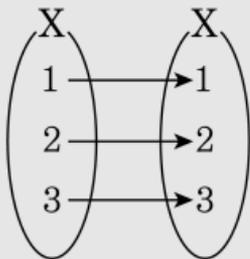
$$\therefore f^{100}(1) = 1 + 2 \cdot 100 = 201$$

40. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일 대응이고, $f \circ f = f$ 를 만족하는 함수는 모두 몇 개인가?

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일 대응이 되는 경우는 6 가지이고 이 중에서 $f \circ f = f$ 즉 $f = I$ (항등함수) 를 만족하는 것은 하나 뿐이다.



41. $\begin{cases} 2x+1 & (x \geq 1) \\ x+2 & (x < 1) \end{cases}$ 에 대하여 $f^{-1}(5) + f^{-1}(k) = -2$ 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -2$

해설

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & (x \geq 1) \\ x+2 & (x < 1) \end{cases} \text{ 에서}$$

$x \geq 1$ 일 때, $f(x) \geq 3$ 이며

$x < 1$ 일 때, $f(x) < 3$ 이다.

이 때, $f^{-1}(5) + f^{-1}(k) = -2$ 에서

$f^{-1}(5) = a$ 라고 놓으면

$$f(a) = 5 \geq 3 \text{ 이므로 } f(a) = 2a + 1 = 5$$

$$\therefore a = 2$$

그러므로 $f^{-1}(k) = -4$

$$f(-4) = -4 + 2 = k \quad (\because -4 < 3)$$

$$\therefore k = -2$$

42. 함수 $y = |x - 2| + |x + 1|$ 이 $x = m$ 일 때, 최솟값을 갖는다. 이를 만족시키는 정수 m 의 개수는?

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

$y = |x - 2| + |x + 1|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때,

$$y = -(x - 2) - (x + 1) = -2x + 1$$

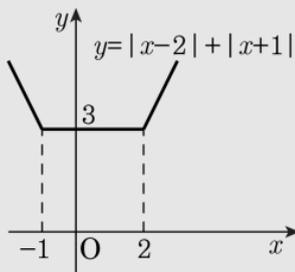
ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때,

$$y = -(x - 2) + (x + 1)$$

iii) $x \geq 2$ 일 때.

$$y = (x - 2) + (x + 1) = 2x - 1 = 3$$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로 y 의 최솟값은 3 이고 이때, 정수 m 은 $-1, 0, 1, 2$ 의 4 개다.



43. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에서 X 로의 함수 중 그 그래프가 원점에 대하여 대칭인 함수를 f 라 한다. <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ X 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$ 이다.
 ㉡ 함수 f 의 개수는 3개이다.
 ㉢ 함수 f 는 역함수를 갖는다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ 원점에 대하여 대칭이므로

$f(-x) = -f(x)$ 이다. \therefore 거짓

㉡ i) $f(-1) = 1, f(0) = 0, f(1) = -1$

ii) $f(-1) = 0, f(0) = 0, f(1) = 0$

iii) $f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$ 로 3개이다.

\therefore 참

㉢ 위 ㉡에서 ii)는 일대일대응이 아니므로

역함수를 갖지 않는다. \therefore 거짓

44. 분수함수 $y = \frac{x-4}{x-1}$ 의 정의역이 $\{x \mid -2 \leq x \leq 0\}$ 일 때, 다음 중 치역을 바르게 구한 것은?

① $\{y \mid -2 \leq y \leq 0\}$

② $\{y \mid -2 \leq y \leq 2\}$

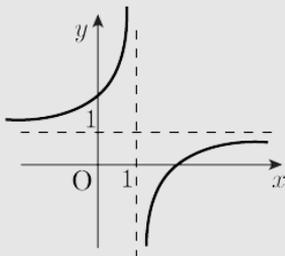
③ $\{y \mid -2 \leq y \leq 4\}$

④ $\{y \mid 0 \leq y \leq 2\}$

⑤ $\{y \mid 2 \leq y \leq 4\}$

해설

$$y = \frac{x-4}{x-1} = \frac{(x-1)-3}{x-1} = 1 + \frac{-3}{x-1}$$



$x = -2$ 일 때, $y = \frac{-2-4}{-2-1} = 2$ 이고,

$x = 0$ 일 때, $y = \frac{-4}{-1} = 4$ 이므로,

치역은 $\{y \mid 2 \leq y \leq 4\}$

45. 유리수 a, b, c 에 대하여 $\frac{1}{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{6}} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ 1

⑤ $\frac{4}{5}$

해설

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{6}} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} \text{ 에서}$$

$$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{6} = \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{4}, \quad c = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore a + b + c = \frac{1}{2}$$

46. 임의의 양수 x 에 대하여 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족할 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은?

(가) $f(2) = -3$

(나) 임의의 두 양수 x, y 에 대하여

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$f(1 \times 2) = f(1) + f(2) \text{ 에서}$$

$$f(1) = 0 \quad f(1) = f\left(\frac{1}{2} \times 2\right)$$

$$= f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) = 0 \text{ 이므로}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -f(2) = 3$$

47. 함수 $f(x) = 4 - |x|$, $g(x) = -4 + |x|$ 에서, $y = f(g(x))$ 와 $y = g(f(x))$ 로 둘러싸여있는 영역의 넓이는?

① 36

② 64

③ 72

④ 54

⑤ 108

해설

i) $y = f(g(x)) = 4 - |-4 + |x||$ 에서

$x \geq 4$ 일 때, $y = 4 - (-4 + x) = -x + 8$

$0 \leq x < 4$ 일 때, $y = 4 + (-4 + x) = x$

$-4 \leq x < 0$ 일 때, $y = 4 + (-4 - x) = -x$

$x < -4$ 일 때, $y = 4 - (-4 - x) = x + 8$

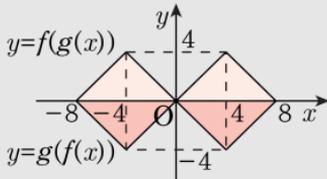
ii) $y = g(f(x)) = -4 + |4 - |x||$ 에서

$x \geq 4$ 일 때, $y = -4 - (4 - x) = x - 8$

$0 \leq x < 4$ 일 때, $y = -4 + (4 - x) = -x$

$-4 \leq x < 0$ 일 때, $y = -4 + (4 + x) = x$

$x < -4$ 일 때, $y = -4 - (4 + x) = -x - 8$



그림의 색칠 부분 넓이를 계산하면

$$\therefore 8 \times 8 = 64$$

48. 함수 $y = [x] - x$ 와 $y = \frac{1}{3}x$ 의 그래프가 만나는 점은 a 개이고, 이 점들의 x 좌표의 합은 b 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수이다.)

- ① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$-3 \leq x < -2$ 일 때, $[x] = -3$ 이므로

$$y = [x] - x = -3 - x$$

$-2 \leq x < -1$ 일 때, $[x] = -2$ 이므로

$$y = [x] - x = -2 - x$$

$-1 \leq x < 0$ 일 때, $[x] = -1$ 이므로

$$y = [x] - x = -1 - x$$

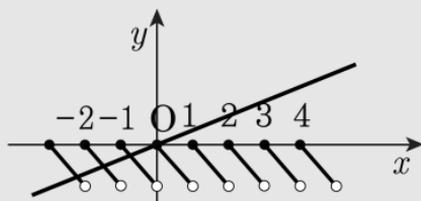
$0 \leq x < 1$ 일 때, $[x] = 0$ 이므로

$$y = [x] - x = -x$$

$1 \leq x < 2$ 일 때, $[x] = 1$ 이므로

$$y = [x] - x = 1 - x$$

따라서 $y = [x] - x$ 와 $y = \frac{1}{3}x$ 의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 두 그래프가 만나는 점은 4개이고
만나는 점의 x 좌표는 다음과 같다.

i) $-3 \leq x < -2$ 일 때, $-3 - x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = -\frac{9}{4}$

ii) $-2 \leq x < -1$ 일 때, $-2 - x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = -\frac{3}{2}$

iii) $-1 \leq x < 0$ 일 때, $-1 - x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = -\frac{3}{4}$

iv) $0 \leq x < 1$ 일 때, $-x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = 0$

$$\therefore a = 4, b = \left(-\frac{9}{4}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{2}$$

$$\therefore a + b = 4 + \left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

49. 0이 아닌 서로 다른 세 실수 x, y, z 가 $x + \frac{2}{y} = y + \frac{2}{z} = z + \frac{2}{x}$ 를 만족할 때, xyz 의 값을 구하면?

① $\pm\sqrt{2}$

② ± 3

③ $\pm 3\sqrt{2}$

④ $\pm 2\sqrt{2}$

⑤ $\pm 4\sqrt{2}$

해설

$$x + \frac{2}{y} = y + \frac{2}{z} \text{에서 } x - y = \frac{2(y - z)}{yz}$$

$$y + \frac{2}{z} = z + \frac{2}{x} \text{에서 } y - z = \frac{2(z - x)}{zx}$$

$$z + \frac{2}{x} = x + \frac{2}{y} \text{에서 } z - x = \frac{2(x - y)}{xy}$$

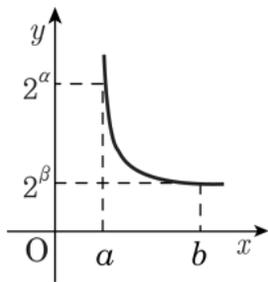
$$\therefore (x - y)(y - z)(z - x) = \frac{8(x - y)(y - z)(z - x)}{(xyz)^2}$$

$$x, y, z \text{가 서로 다른 실수이므로 } (xyz)^2 = 8$$

$$\therefore xyz = \pm 2\sqrt{2}$$

50. 함수 $y = f(x) = \frac{1}{2x}$ 의 그래프가 다음 그림과 같고, $ab = 16$ 일 때, $\alpha + \beta$ 의 값은?

- ① -6 ② -5 ③ -4
 ④ -3 ⑤ -2



해설

$f(x) = \frac{1}{2x}$ 의 그래프에서

$$f(a) = \frac{1}{2a} = 2^\alpha, f(b) = \frac{1}{2b} = 2^\beta$$

$f(a)$ 와 $f(b)$ 를 곱하면

$$f(a) \times f(b) = \frac{1}{2a} \times \frac{1}{2b} = 2^{\alpha+\beta}$$

$$\therefore 2^{\alpha+\beta} = \frac{1}{4ab} = \frac{1}{4 \times 16} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$$

$$\therefore \alpha + \beta = -6$$