1. 두 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 X 의 원소 x 에 Y 의 원소 y 가 다음 보기와 같이 대응될 때, 이 중 X 에서 Y 로의 함수인 것을 모두 고른 것은?

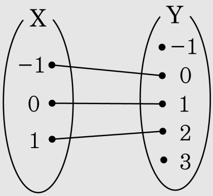
보 기

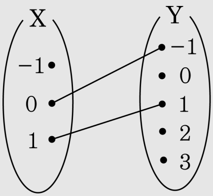
ㄱ $x \to x+1$ ㄴ $x \to 2x-1$

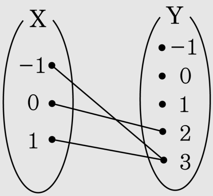
ㄷ $x \to x^2+2$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

해설

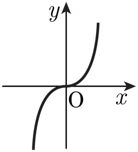
ㄱ


ㄴ


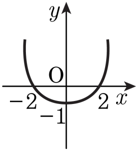
ㄷ


2. 다음 함수의 그래프 중 일대일 대응이 <u>아닌</u> 것은?

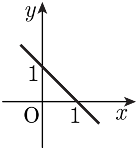
①



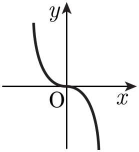
②



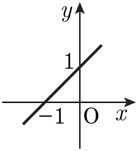
③



④



⑤



해설

치역과 공역이 같고 임의의 두 실수 x_1 , x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 일 때 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 를 만족해야하므로 정답은 ②번이다.

3. 다음 중 역함수가 존재하지 <u>않는</u> 것은?

① $y = x - 2$

② $y = x^2$

③ $y = x^3$

④ $y = x^2 - 2x$ (단, $x \geq 1$)

⑤ $y = |x - 1|$ (단, $x \geq 1$)

해설

일대일 대응이 아닌 것은 ②번이다.
그러므로 ②번 그래프는 역함수가 존재하지 않는다.

4. 함수 $f(x)=2x-5$ 의 역함수를 $y=f^{-1}(x)$ 라 할 때, $f^{-1}(-3)$ 의 값은 얼마인가?

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3

해설

$f(x)=y=2x-5$ 에서 x 와 y 를 바꾸면 $x=2y-5$

$x=2y-5$ 를 y 에 대하여 정리하면

$y=\frac{1}{2}(x+5)$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x+5)$

$\therefore f^{-1}(-3)=1$

|다른풀이| $f^{-1}(-3)=a$ 로 놓으면

$f(a)=-3$ 에서 $f(a)=2a-5=-3$, $2a=2$

$\therefore a=f^{-1}(-3)=1$

5. $x \neq 0$일 때, $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x}$을 간단히 하면?

① $\frac{1}{2x}$ ② $\frac{1}{6x}$ ③ $\frac{5}{6x}$ ④ $\frac{11}{6x}$ ⑤ $\frac{1}{6x^3}$

해설

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x}=\frac{6}{6x}+\frac{3}{6x}+\frac{2}{6x}=\frac{11}{6x}$$

6. 분수식 $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-4}$ 을 간단히 하면 $\dfrac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$ 일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① -6　② -3　③ 0　④ 3　⑤ 6

해설

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}$$
$$=\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-3}\right)+\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-4}\right)$$
$$=\frac{-2}{(x-1)(x-3)}+\frac{-2}{(x-2)(x-4)}$$
$$=\frac{-2(x^2-6x+8+x^2-4x+3)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$$
$$=\frac{-2(2x^2-10x+11)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$$
$$=\frac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$$
$\therefore\ a=-4,\ b=20,\ c=-22$

$\therefore\ a+b+c=-6$

7. 유리식 $\dfrac{x^2-4}{x^2-1} \div \dfrac{x^2-x-2}{x^2+x}$ 를 간단히 하면?

① $\dfrac{x}{x+1}$ ② $\dfrac{x}{x-1}$ ③ $\dfrac{x+2}{x-1}$

④ $\dfrac{x+2}{(x+1)(x-2)}$ ⑤ $\dfrac{x(x+2)}{(x+1)(x-1)}$

해설

$$(\text{준식}) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+1)(x-1)} \times \frac{x(x+1)}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{x(x+2)}{(x+1)(x-1)}$$

8. $x : y = 4 : 5$일 때, $\dfrac{x+y}{2x-y}$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x : y = 4 : 5,\ x = 4k, y = 5k(k \neq 0)$이므로

$$\frac{x+y}{2x-y} = \frac{4k+5k}{8k-5k} = \frac{9k}{3k} = 3$$

9. 분수함수 $y=\dfrac{3x-1}{x+1}$ 의 점근선을 $x=a$, $y=b$ 라고 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

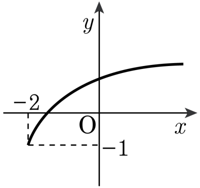
$$y=\frac{3x-1}{x+1}=\frac{-4}{x+1}+3$$ 에서

점근선은 $x=-1,\ y=3$

$a=-1,\ b=3$

$a+b=2$

10. 다음 그래프는 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 평행 이동한 것이다. 이 그래프의 함수는?



① $y = \sqrt{x-2}+1$

② $y = \sqrt{x-2}-1$

③ $y = \sqrt{x+2}+1$

④ $y = \sqrt{x+2}-1$

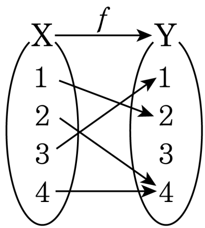
⑤ $y = -\sqrt{x-2}-1$

해설

x축으로 -2만큼
y축으로 -1만큼 평행이동했으므로
x 대신 $x+2$, y 대신 $y+1$을 대입하면
$y = \sqrt{x+2}-1$

11. 다음 그림과 같은 대응에 대한 다음 설명 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

㉠ 함수가 아니다.
㉡ 정의역은 1, 2, 3, 4이다.
㉢ 공역은 1, 2, 3, 4이다.
㉣ 치역은 1, 2, 3, 4이다.
㉤ 일대일대응이다.



① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

㉠ 주어진 대응 x 의 각 원소에 y 가 1개씩 대응하므로 함수이다.
㉡, ㉢ 정의역과 공역은 모두 1, 2, 3, 4 이다.
㉣ 치역은 1, 2, 4이다.
㉤ $f(2) = f(4) = 4$ 이고, $\mathrm{Y} \neq f(x)$ 이므로 일대일대응이 아니다.

12. 자연수의 집합을 N, 양의 유리수 집합을 Q^{+}라고 할 때, 함수 f가 $f : Q^{+} \to N \times N$으로 정의될 때, 다음 중 일대일 대응인 것은? (단, p, q는 서로소)

① $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = (p,\ 0)$

② $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = (0,\ q)$

③ $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = (p+q,\ 0)$

④ $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = (0,\ pq)$

⑤ $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = (p,\ q)$

해설

① $\dfrac{2}{3} \neq \dfrac{2}{5}$ 일 때

$f\left(\dfrac{2}{3}\right) = f\left(\dfrac{2}{5}\right) = (2.\ 0)$

②, ③, ④도 같은 방법으로

일대일 대응이 아님을 보일 수 있다.

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 $f(x)$ 는 항등함수이고, $g(x) = -2$ 인 상수함수일 때, $f(4)+g(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

$f(x)$ 는 항등함수이므로 $f(x) = x$ 에서 $f(4) = 4$

$g(x) = -2$ 에서 $g(-1) = -2$

$\therefore f(4) + g(-1) = 4 - 2 = 2$

14. 두 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y=\{a,\ b,\ c,\ d\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 개수는?

① 12 개 ② 27 개 ③ 36 개 ④ 64 개 ⑤ 81 개

해설

집합 X 의 원소 $-1,\ 0,\ 1$ 에 대응될 수 있는
집합 Y 의 원소가 각각 4 개씩이므로
$4 \times 4 \times 4 = 64$(개)

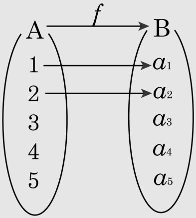
15. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에서 집합 $B = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\}$ 로의 대응 f 중 $f(1) = a_1,\ f(2) = a_2$ 인 함수 f 의 개수는?

① 8 개　② 25 개　③ 64 개

④ 81 개　⑤ 125 개

해설

$f(1) = a_1,\ f(2) = a_2$ 인 함수 $f : A \rightarrow B$ 는 다음 그림에서 A 의 원소 3, 4, 5 에 B 의 원소 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ 중 하나를 각각 대응시키면 된다.



따라서, 구하는 함수의 개수는 $5 \times 5 \times 5 = 125$ (개)

16. 두 함수 $f(x) = -x + a$, $g(x) = ax + b$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = 2x - 4$ 일 때, ab 의 값은 얼마인가?

① -2　　② -3　　③ -4　　④ -5　　⑤ -6

해설

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(ax + b)$
$= -(ax + b) + a = -ax + a - b$ 이므로 $-ax + a - b = 2x - 4$
그런데, 이것은 x 에 대한 항등식이므로
$a = -2, b = 2$
$\therefore ab = -4$

17. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 세 함수 f, g, h 에 대하여 $(h \circ g)(x) = 3x + 4$, $f(x) = x^2$ 일 때, $(h \circ (g \circ f))(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 16

해설

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(2) &= ((h \circ g) \circ f)(2) \\ &= (h \circ g)(f(2)) \\ &= (h \circ g)(4) \\ &= 3 \times 4 + 4 = 16\end{aligned}$$

18. 두 함수 $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = x^2 + 1$에 대하여 $(g \circ f)(2)$의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\therefore\ (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 2$

19. 두 함수 $f(x) = ax + b,\ g(x) = ax + c$에 대하여 $f \circ g = g \circ f$가 성립하기 위한 필요충분조건은 무엇인가?

① $a = 1$ 또는 $b = c$ ② $a = 1$

③ $b = c$ ④ $a = 0$ 또는 $b = c$

⑤ $a = 0$

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(ax + c) \\ &= a(ax + c) + b \\ &= a^2x + ac + b\end{aligned}$$

마찬가지로 $(g \circ f)(x) = a^2x + ab + c$

$\therefore\ ac + b = ab + c$

즉, $(a - 1)(b - c) = 0$

$\therefore\ a = 1$ 또는 $b = c$

20. 함수 $y=x^2-2x\ (x\geq 1\ )$의 역함수를 구하면?

① $y=x^2+2x\ (x\geq 1)$

② $y=x^2-2x\ (x\leq 1)$

③ $y=\sqrt{x+1}\ (x\geq -1)$

④ $y=\sqrt{x+1}+1\ (x\geq -1)$

⑤ $y=\sqrt{-x+1}+1\ (x\leq 1)$

해설

$y=x^2-2x$에서 $x^2-2x+1=y+1$

$(x-1)^2=y+1,\ x-1=\sqrt{y+1}\ (\because x\geq 1)$

$\therefore x=\sqrt{y+1}+1$

x와 y를 바꾸어 쓰면 $y=\sqrt{x+1}+1$

이 때, 원래의 함수

$y=x^2-2x=(x-1)^2-1\ (x\geq 1\ )$의 치역

$\{y|y\geq -1\}$ 이

역함수 $y=\sqrt{x+1}+1$의 정의역이 되므로

구하는 역함수는 $y=\sqrt{x+1}+1\ (x\geq -1)$

21. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은 무엇인가?

① $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$

② $g \circ f \neq f \circ g$

③ $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

④ $f \circ f^{-1} = I$

⑤ $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$

해설

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \neq g^{-1} \circ f^{-1}$

즉, 옳지 않은 것은 ③이다.

22. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 $f^{-1}(3) = 1$, $(f \circ f)(x) = x$ 일 때, $f(3)$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 에서 $f = f^{-1}$
따라서 $f(3) = f^{-1}(3) = 1$

23. 함수 $y = |x+1| - |x-3|$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M-m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = |x+1| - |x-3|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$y = -(x+1) + x - 3 = -4$

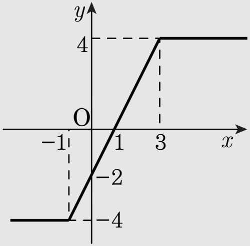
ii) $-1 \le x < 3$ 일 때

$y = x + 1 + x - 3 = 2x - 2$

iii) $x \ge 3$ 일 때

$y = x + 1 - (x-3) = 4$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로



$M = 4, m = -4$

$\therefore M - m = 4 - (-4)$

$= 8$

24. $a<0,\ b<0$일 때, 다음 중 옳은 것을 고르면?

① $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$

② $\dfrac{\sqrt{b}}{a}=\sqrt{\dfrac{b}{a^2}}$

③ $\sqrt{a^2b^2}=ab$

④ $\sqrt{-ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$

⑤ $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$

해설

① $\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b}$

② $\sqrt{\dfrac{b}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}}=\dfrac{\sqrt{b}}{-a}$

③ $\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}=(-a)(-b)=ab$

④ $\sqrt{-ab}=\sqrt{-a}\sqrt{b}=\sqrt{(-1)a}\ \sqrt{b}$
$=-\sqrt{-1}\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{a}\sqrt{b}i$

⑤ $\sqrt{ab}=-\sqrt{a}\sqrt{b}$

25. 유리수 a, b가 등식 $(a+\sqrt{2})^2 = 6 + b\sqrt{2}$를 만족시킬 때, ab의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$a^2 + 2\sqrt{2}a + (\sqrt{2})^2 = 6 + b\sqrt{2}$

무리수의 상등에 의하여

유리수 부분 : $(a^2+2) = 6$, $a^2 = 4$

무리수 부분 : $2a\sqrt{2} = b\sqrt{2}$, $2a = b$

$$\begin{cases} a = 2, b = 4, \ ab = 8 \\ a = -2, b = -4, \ ab = (-2)(-4) = 8 \end{cases}$$

$\therefore ab = 8$

26. $1 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $y = -\sqrt{3x+1}+4$ 의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

$$y = -\sqrt{3x+1}+4 = -\sqrt{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}+4$$

주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

$x = 1$ 일 때, 최댓값 $a = -\sqrt{3+1}+4 = 2$

$x = 5$ 일 때, 최솟값 $b = -\sqrt{15+1}+4 = 0$

$\therefore\ a-b = 2-0 = 2$

27. $x > 2$에서 정의된 두 함수 $f(x), g(x)$가

$f(x) = \sqrt{x-2} + 2$, $g(x) = \dfrac{1}{x-2} + 2$일 때, $(f \circ g)(3) + (g \circ f)(3)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$

$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$

$\therefore (f \circ g)(3) + (g \circ f)(3) = 6$

28. 자연수의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 $f(1) = 1$이고 $f(x+1) = f(x) + 4\sqrt{f(x)} + 4$가 성립할 때, $f(6)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 121

해설

$f(x+1) = f(x) + 4\sqrt{f(x)} + 4 = (\sqrt{f(x)} + 2)^2$
$f(1) = 1$, $f(2) = 3^2$, $f(3) = 5^2$,
$f(4) = 7^2$, $f(5) = 9^2$, $f(6) = 11^2 = 121$

29. 함수 $f(x)=2x^2+1$, $g(x)=3x^3$ 에 대하여 다음 <보기> 에 있는 함수 중 그 그래프가 원점에 대하여 대칭인 것을 모두 고른 것은 ?

보기

Ⅰ. $f(g(x))$ Ⅱ. $g(g(x))$

Ⅲ. $\{g(x)\}^2$ Ⅳ. $\dfrac{g(x)}{f(x)}$

① Ⅰ, Ⅱ ② Ⅰ, Ⅳ ③ Ⅱ, Ⅲ ④ Ⅱ, Ⅳ ⑤ Ⅲ, Ⅳ

해설

$f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$ 에서

Ⅰ. $F(x)=f(g(x))$ 로 놓으면

$F(-x)=f(g(-x))=f(-g(x))=f(g(x))$

$\therefore\ F(-x)=F(x)$

Ⅱ. $F(x)=g(g(x))$ 로 놓으면

$F(-x)=g(g(-x))=g(-g(x))=-g(g(x))$

$\therefore\ F(-x)=-F(x)$

Ⅲ. $F(x)=\{g(x)\}^2$ 로 놓으면

$F(-x)=\{g(-x)\}^2$

$=\{-g(x)\}^2=\{g(x)\}^2$

$\therefore\ F(-x)=F(x)$

Ⅳ. $F(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 로 놓으면

$F(-x)=\dfrac{g(-x)}{f(-x)}=-\dfrac{g(x)}{f(x)}$

$\therefore\ F(-x)=-F(x)$

따라서 원점에 대하여 대칭인 함수는 Ⅱ, Ⅳ

30. 무리식 $\sqrt{2x+5}+\sqrt{15-3x}$가 실수값을 갖도록 하는 정수 x의 개수는?

① 6개　② 7개　③ 8개　④ 9개　⑤ 10개

해설

$2x+5 \geq 0,\ 2x \geq -5 \quad \therefore x \geq -2.5$

$15-3x \geq 0,\ 15 \geq 3x \quad \therefore 5 \geq x$

$\therefore -2.5 \leq x \leq 5$

$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ 총 8개

31. $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라고 할 때, $\frac{a}{b}=p+\sqrt{q}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3}+1=2.\times\times\times$

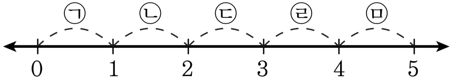
$a=2,\ b=\sqrt{3}-1$

$\frac{a}{b}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{2}=\sqrt{3}+1$

$\therefore p=1,\ q=3$

$\therefore p+q=4$

32. $f(a,\ b) = \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$ 로 정의할 때 $f(2,\ 1)+f(3,\ 2)+f(4,\ 3)+f(5,\ 4)+\cdots+f(10,\ 9)$ 의 값이 k 라 하면, 다음 중 실수 k 에 대응하는 수는 직선 위에서 어느 위치에 있는가? (단, $a>b>0$)



▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

$a>b$ 일 때, $f(a,\ b) = \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$

$\therefore\ f(2,\ 1)+f(3,\ 2)+f(4,\ 3)+\cdots+f(10,\ 9)$

$= (\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots$

$\quad +(\sqrt{10}-\sqrt{9})$

$= -1+\sqrt{10} = k$

그런데 $\sqrt{9}<\sqrt{10}<\sqrt{16}$ 에서

$2<-1+\sqrt{10}<3$ 이므로

k 는 ㉢안에 있다.

33. $(1+\sqrt{2})x=\sqrt{3-2\sqrt{2}}$, $(1-\sqrt{2})y=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ 일 때, x^2+xy+y^2 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 33

해설

$$(1+\sqrt{2})x=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-1$$

$$\therefore\ x=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=3-2\sqrt{2}$$

$$(1-\sqrt{2})y=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1$$

$$\therefore\ y=\frac{\sqrt{2}+1}{-\sqrt{2}+1}=-3-2\sqrt{2}$$

$$\therefore\ x+y=-4\sqrt{2},\ xy=-1$$

$$\begin{aligned}x^2+xy+y^2&=(x+y)^2-xy\\&=(-4\sqrt{2})^2-(-1)=33\end{aligned}$$

34. $x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 일 때, $x^2 - x - 2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 에서 $2x = \sqrt{5}+1$

$2x - 1 = \sqrt{5}$의 양변을 제곱하면

$4x^2 - 4x + 1 = 5 \quad \therefore \ x^2 - x - 1 = 0$

$\therefore \ x^2 - x - 2 = x^2 - x - 1 - 1 = 0 - 1 = -1$

35. 정의역이 $\{x \mid x \le 3\}$, 치역이 $\{y \mid y \ge 4\}$ 인 무리함수 $f(x) = \sqrt{a(x-p)} + q$ 에 대하여 $f(1) = 6$ 일 때, $a+p+q$ 의 값을 구하면?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

정의역은 $\{x \mid a(x-p) \ge 0\} = \{x \mid x \le 3\}$ 이므로 $a < 0,\ p = 3$

치역은 $\{y \mid y \ge 4\}$이므로 $q = 4$

$\therefore\ f(x) = \sqrt{a(x-3)} + 4$

이때, $f(1) = 6$이므로

$\sqrt{-2a} + 4 = 6,\ \sqrt{-2a} = 2\ ,\ -2a = 4$

$\therefore\ a = -2$

$\therefore\ a + p + q = -2 + 3 + 4 = 5$

36. 무리함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 후 y축에 대하여 대칭이동하면 점$(1,\ 3)$을 지난다. 이 때, 상수 a의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행 이동한 함수의 그래프의 식은

$y = \sqrt{a(x-2)}$

이것을 다시 y축에 대하여 대칭이동한 함수의 그래프의 식은 $y = \sqrt{a(-x-2)}$

이 때, 이 그래프가 점$(1,\ 3)$을 지나므로

$3 = \sqrt{-3a},\ -3a = 9$

$\therefore\ a = -3$

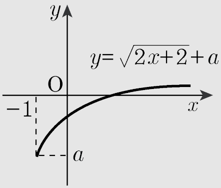
37. 함수 $y = \sqrt{2x+2} + a$ 의 그래프가 제 1 , 3 , 4 사분면을 지나도록 하는 정수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = \sqrt{2x+2} + a = \sqrt{2(x+1)} + a$
주어진 함수는 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.
따라서 이 함수의 그래프가 제 1 , 3 , 4 사분면을 지나려면 $x = 0$ 일 때, $y < 0$ 이어야 한다.



$\sqrt{2} + a < 0$ 이므로 $a < -\sqrt{2}$
따라서 정수 a 의 최댓값은 -2 이다.

38. $y=-\sqrt{4-2x}+1$의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① 정의역은 $\{x \mid x \leq 2\}$이다.

② 치역은 $\{y \mid y \leq 1\}$이다.

③ 평행이동하면 $y=-\sqrt{2x}$와 겹쳐진다.

④ 그래프는 제 2사분면을 지나지 않는다.

⑤ 이 그래프는 x축과 점 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$에서 만난다.

해설

③ 평행이동하면 $y=-\sqrt{-2x}$와 겹쳐진다.

④, ⑤ 꼭지점이 $(2,\ 1)$이고 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$을 지난다.

$\therefore 1, 3, 4,$분면을 지난다.

39. 무리함수 $y=\sqrt{kx}$ 의 그래프가 두 점 $(2,\ 2)$, $(3,\ 6)$ 을 잇는 선분과 만나도록 하는 정수 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 11 개

해설

함수 $y=\sqrt{kx}$ 의 그래프가 점 $(2,\ 2)$ 를 지날 때

$2=\sqrt{2k},\quad 2k=4$

$\therefore k=2$

또, 함수 $y=\sqrt{kx}$ 의 그래프가 점 $(3,\ 6)$ 을 지날 때

$6=\sqrt{3k},\quad 3k=36$

$\therefore k=12$

따라서 구하는 실수 k 의 값의 범위는

$2\le k\le 12$ 이므로

정수 k 는 $2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 12$ 의 11 개다.

40. $y = \sqrt{x-1} + 2$의 역함수는?

① $y = x^2 + 4x + 3(x \geq 2)$

② $y = x^2 - 4x + 5(x \geq 2)$

③ $y = x^2 + 4x + 3(x \geq 1)$

④ $y = x^2 - 4x + 5(x \geq 1)$

⑤ $y = x^2 - 3x + 2(x \geq 3)$

해설

$y - 2 = \sqrt{x-1}$ 에서 $\sqrt{x-1} \geq 0$이므로 $y \geq 2$
또 양변을 제곱하면, $(y-2)^2 = x - 1$
$\therefore\ x = y^2 - 4y + 5\ (y \geq 2)$
x와 y를 바꾸면 $y = x^2 - 4x + 5\ (x \geq 2)$

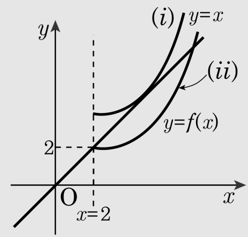
41. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + k(x \geq 2)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k 의 값의 범위는?

① $0 < k < \dfrac{25}{4}$　② $k < \dfrac{25}{4}$　③ $6 \leq k \leq \dfrac{25}{4}$

④ $6 < k \leq \dfrac{25}{4}$　⑤ $6 \leq k < \dfrac{25}{4}$

해설

주어진 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은 $y = x$ 위에 있다.



따라서, 조건을 만족하려면 $f(x) = x^2 - 4x + k = (x-2)^2 + k - 4(x \geq 2)$ 의 그래프와 직선 $y = x$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

(i) $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$가 접할 때,

$x^2 - 4x + k = x,\ x^2 - 5x + k = 0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D = 5^2 - 4k = 0$

$\therefore \mathrm{k} = \dfrac{25}{4}$

(ii) $y = f(x)$ 의 그래프가 점 $(2,\ 2)$를 지날 때

$2^2 - 4 \cdot 2 + k = 2$ 이므로 $k = 6$

(i), (ii) 에서 $6 \leq k < \dfrac{25}{4}$

42. $|y-1|=x+a$ 의 그래프와 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 4 일 때, 양수 a 의 값은?

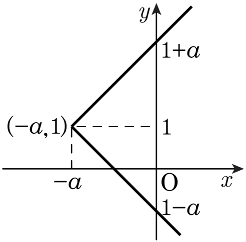
① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$|y-1|=x+a$ 의 그래프는 $|y|=x$를 x 축 음의 방향으로 a, y 축 양의 방향으로 1 만큼 평행이동시킨 그래프이므로 다음 그림과 같다.

이때, y 절편은 $|y-1|=a$ 에서 $y=1\pm a$

$\therefore\ S=\dfrac{1}{2}\cdot 2a\cdot a=4 \qquad \therefore\ a=2(a>0)$



43. 함수 $y = a|x+1| - b|x-1| + 2$ 의 그래프가 y축에 대하여 대칭이기 위한 필요충분조건을 구하면?

① $a+b=0$ ② $a-b=0$ ③ $a+b=1$

④ $a-b=1$ ⑤ $a+b=2$

해설

$y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이면 $f(x)=f(-x)$이다.

$f(x)=a|x+1|-b|x-1|+2$ 라 하면

$f(-x)=a|-x+1|-b|-x-1|+2$

$=-b|x+1|+a|x-1|+2$

$f(x)=f(-x)$ 에서 $a=-b$

$\therefore\ a+b=0$

44. $\dfrac{a}{b+c-a}=\dfrac{b}{c+a-b}=\dfrac{c}{a+b-c}$ 의 값들의 합은?

① 0　　② $-\dfrac{1}{2}$　　③ $\dfrac{1}{2}$　　④ $\dfrac{2}{3}$　　⑤ -1

해설

(분모의 합)

$= (b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c) = a+b+c$

i) $a+b+c \neq 0$ 일 때, 가비의 리를 이용하면

$$\frac{a}{b+c-a}=\frac{b}{c+a-b}=\frac{c}{a+b-c}$$

$$=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$$

ii) $a+b+c=0$ 일 때,

$b+c=-a,\ c+a=-b,\ a+b=-c$ 이므로

$$\frac{a}{-a-a}=\frac{b}{-b-b}=\frac{c}{-c-c}=-\frac{1}{2}$$

i), ii) 에서 구하는 값은 1 또는 $-\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ 분수식의 값들의 합은 $\dfrac{1}{2}$

45. 양수 $a,\ b,\ c,\ d$ 는 $a : b = c : d$가 성립한다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $ad + bc = 2ad$

② $\dfrac{ad}{bc} = 1$

③ $\dfrac{bc-1}{bc} + \dfrac{1}{ad} = 1$

④ $\dfrac{1}{bc} - \dfrac{1}{ad} = 0$

⑤ $a - b = \dfrac{1}{c-d}$

해설

①, ② $ad = bc$

③ $\dfrac{adbc - ad + bc}{adbc} = \dfrac{adbc}{adbc} = 1$

④ $\dfrac{1}{bc} = \dfrac{1}{ad}$

46. 어느 대학의 입학시험에서 영문과와 수학과의 지원자 수의 비는 3 : 4이고, 합격자의 수의 비는 5 : 6, 불합격자의 수의 비는 5 : 8이다. 이 대학의 수학과의 경쟁률을 구하면?

① 10 : 3 ② 5 : 3 ③ 4 : 1 ④ 5 : 2 ⑤ 4 : 3

해설

영문과 합격자 수를 5α라 하면,
수학과 합격자 수는 6α
영문과 불합격자 수를 5β라 하면,
수학과 합격자 수는 8β

$\therefore\ (5\alpha+5\beta):(6\alpha+8\beta)=3:4$

$\Rightarrow\ 18\alpha+24\beta=20\alpha+20\beta$

$\therefore\ \alpha=2\beta$

$$\therefore \text{수학과 경쟁률} = \frac{\text{지원자 수}}{\text{합격자 수}} = \frac{6\alpha+8\beta}{6\alpha} = \frac{10\alpha}{6\alpha} = \frac{5}{3}$$

$\Rightarrow\ 5:3$

47. 분수함수 $y = \dfrac{x-4}{x-3}$의 정의역이 $\{x \mid x \geq 0\}$일 때, 다음 중 치역을 바르게 구한 것은?

① $\left\{y \mid -\dfrac{4}{3} < y < 1\right\}$

② $\left\{y \mid \dfrac{4}{3} \leq y < -1\right\}$

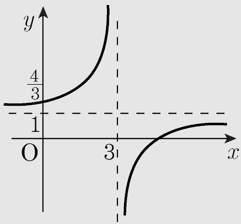
③ $-1 \leq y < \dfrac{4}{3}$을 제외한 실수 전체

④ $1 \leq y < \dfrac{4}{3}$을 제외한 실수 전체

⑤ $-\dfrac{4}{3} \leq y \leq 1$을 제외한 실수 전체

해설

$$y = \frac{x-4}{x-3} = \frac{x-3-1}{x-3} = 1 + \frac{-1}{x-3}$$



$x = 0$일 때, $y = \dfrac{-4}{-3} = \dfrac{4}{3}$이므로,

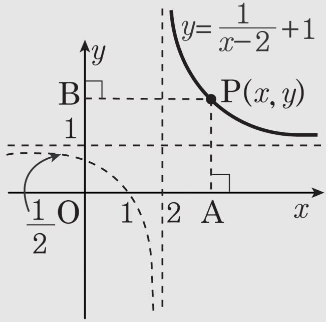
치역은 $1 \leq y < \dfrac{4}{3}$을 제외한 실수 전체

48. 분수함수 $y = \dfrac{1}{x-2} + 1(x > 2)$ 의 그래프 위의 한 점 P(x, y) 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 A, B 라 하자. 이 때, $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설



위 그림에서 $\overline{PA} = y = \dfrac{1}{x-2} + 1$ $\overline{PB} = x(x > 2)$

$\therefore\ \overline{PA} + \overline{PB} = x + \dfrac{1}{x-2} + 1 = x - 2 + \dfrac{1}{x-2} + 3$

$\geq 2\sqrt{(x-2) \cdot \dfrac{1}{x-2}} + 3 = 5$

(단, 등호는 $x - 2 = \dfrac{1}{x-2}$ 일 때 성립)

49. 함수 $y=-\frac{2}{x}+2$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 서로 만나지 않을 때, 정수 k의 개수는?

① 3 개 ② 4 개 ③ 5 개 ④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

$-\frac{2}{x}+2=2x+k$ 에서 $-2+2x=2x^2+kx$

$2x^2+(k-2)x+2=0$이 이차방정식의 판별식을

D라 하면 $D=(k-2)^2-16<0$에서

$k^2-4k-12<0,\ (k+2)(k-6)<0$

$\therefore\ -2<k<6$

따라서 이를 만족하는 정수 k의 값은

$-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$의 7개이다.

50. $x^2 \neq 1$이고 $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$이라 할 때 $f(-x)$는?

① $\dfrac{1}{f(x)}$　② $-f(x)$　③ $\dfrac{1}{f(-x)}$

④ $-f(-x)$　⑤ $f(x)$

해설

$f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$에서

$$f(-x) = \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)} = \frac{1}{f(x)}$$