

1. 두 집합 $A = \{x, y, \{x, y, \emptyset\}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 9 \text{의 약수}\}$ 일 때, $n(A) - n(B)$ 를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$$A = \{x, y, \{x, y, \emptyset\}\},$$

$$B = \{x \mid x \text{는 } 9 \text{의 약수}\} = \{1, 3, 9\} \text{ 에서}$$

$$n(A) = 3 \text{ 이고, } n(B) = 3 \text{ 이므로}$$

$$n(A) - n(B) = 0 \text{ 이다.}$$

2. 다음은 명제에 대한 설명이다. 옳은 것은?

① 어떤 명제가 참이면 그 역도 반드시 참이다.

② 어떤 명제가 참이면 그 명제의 대우도 참이다.

③ 어떤 명제의 역, 대우는 참, 거짓이 항상 일치한다.

④ 어떤 명제가 참이라고 해서 그 대우가 반드시 참인 것은 아니다.

⑤ 어떤 명제의 역의 역은 대우이다.

해설

명제가 참이면 그 명제의 대우도 항상 참이고, 명제가 거짓이면 그 명제의 대우도 항상 거짓이다.

3. 다음 (가), (나)에 들어갈 말을 알맞게 나열한 것은?

- $|a| = |b|$ 는 $a = b$ 이기 위한 (가) 조건이다.
- 3의 배수는 6의 배수이기 위한 (나) 조건이다.

① 필요, 필요

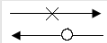
② 필요, 충분

③ 충분, 충분

④ 충분, 필요

⑤ 충분, 필요충분

해설

$|a| = |b|$  $a = b \therefore$ 필요

$\{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 배수}\} \supset \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 배수}\} \therefore$ 필요

4. 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 골라라.

보기

㉠ $A \subset B$

㉡ $n(B) - n(A) = \{5, 6\}$

㉢ $n(A) < n(B)$

㉣ $n(A) \subset n(B)$

㉤ $B \not\subset A$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉢

▷ 정답 : ㉤

해설

㉡ $n(B) - n(A) = 2$

㉣ $n(A) \not\subset n(B)$

5. 전체집합 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 조건 $x^2 - 2 > 0$ 의 진리집합은?

① $\emptyset$

② $\{0, 1\}$

③ $\{3, 4, 5\}$

④ $\{2, 3, 4, 5\}$

⑤ U

해설

주어진 조건 $x^2 - 2 > 0$ 에

$x = 0$ 을 대입하면 $0 - 2 > 0$ (거짓)

$x = 1$ 을 대입하면 $1 - 2 > 0$ (거짓)

$x = 2$ 를 대입하면 $4 - 2 > 0$ (참)

$x = 3$ 을 대입하면 $9 - 2 > 0$ (참)

$x = 4$ 를 대입하면 $16 - 2 > 0$ (참)

$x = 5$ 를 대입하면 $25 - 2 > 0$ (참)

따라서 구하는 진리집합은 $\{2, 3, 4, 5\}$

6. 다음 중 조건 p, q 에 대하여 명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓인 것은? (단, x, y 는 실수이다.)

① $p : x = 1, \quad q : x^2 - 3x + 2 = 0$

② $p : x^2 = 1, \quad q : |x| = 1$

③ $p : x, y$ 는 홀수이다.
 $q : x + y$ 는 짝수이다.

④ 세 집합 A, B, C 에 대하여
 $p : A \cup C = B \cup C, \quad q : A = B$

⑤ $p : \square ABCD$ 는 마름모이다.
 $q : \square ABCD$ 는 평행사변형이다.

해설

① $x = 1$ 이면 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 이므로 참이다.

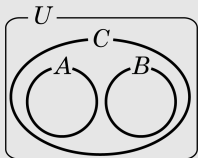
② $x^2 = 1$ 이면 $x = -1, 1$ 이므로

$$|x| = |-1| = |1| = 1$$

따라서, 주어진 명제는 참이다.

③ $x = 2m + 1, y = 2n + 1$ (m, n 은 정수) 이라 하면 $x + y = (2m + 1) + (2n + 1) = 2(m + n + 1)$ 이므로 참이다.

④ (반례) 벤 다이어그램에서 $A \subset C$ 이고 $B \subset C$ 이면 $A \cup C = B \cup C$ 이지만 $A \neq B$ 이다.



⑤ 마름모는 두 쌍의 대변이 각각 평행하므로 평행사변형이다.
 따라서, 주어진 명제는 참이다.

7. a, b 가 실수 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $|a| + |b| \geq |a + b|$

㉡ $|a + b| \geq |a - b|$

㉢ $|a - b| \geq |a| - |b|$

㉣ $|a + b| \geq ||a| - |b||$

① ㉠

② ㉡, ㉢

③ ㉠, ㉣

④ ㉠, ㉢, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ : $(|a| + |b|)^2 = a^2 + b^2 + 2|a| \cdot |b|$

$|a + b|^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$2|a||b| \geq 2ab$ (참)

㉡ : $|a + b|^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$|a - b|^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$2ab \geq -2ab \Rightarrow$ 알수없다 (거짓)

㉢ : $|a - b|^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(|a| - |b|)^2 = a^2 - 2|a||b| + b^2$

$-2ab \geq -2|a||b|$ ($\because |a||b| \geq ab$) (참)

㉣ : $|a + b|^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$||a| - |b||^2 = a^2 - 2|a||b| + b^2$

$2ab > -2|a||b|$ (참)

8. $x > 0, y > 0, xy = \frac{9}{2}$ 일 때 $5x + 10y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$$5x + 10y \geq 2\sqrt{50xy}$$

$$\begin{aligned}\text{그런데 } 2\sqrt{50xy} &= 2\sqrt{50 \times \frac{9}{2}} \\ &= 2\sqrt{25 \times 9} = 2 \times 15 = 30\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 30

9. 빗변의 길이가 5인 직각삼각형 중에서 넓이가 최대가 되는 삼각형의 넓이와 그 때 삼각형의 둘레의 길이를 더하면?

① $\frac{25}{4}$

② $5 + 5\sqrt{2}$

③ 25

④ $\frac{25}{4} + \sqrt{2}$

⑤ $\frac{45}{4} + 5\sqrt{2}$

해설

밑변과 높이를 각각 a, b 라 하면

$$a^2 + b^2 = 25 \text{ 이고}$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \text{ 에서 } 25 \geq 2ab$$

$$\therefore \frac{1}{2}ab \leq \frac{25}{4} \text{ 이므로}$$

삼각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{25}{4}$ 이고

$$a = b = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ 일 때}$$

둘레의 길이는 $5 + 5\sqrt{2}$

10. 세 집합 $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{b, c, d\}$, $C = \{a, b, e\}$ 에 대하여 $(B \cap X) \subset (C \cap X)$ 를 만족시키는 A 의 부분집합 X 의 개수는?

① 4개

② 7개

③ 8개

④ 15개

⑤ 16개

해설

X 는 B 의 원소이지만 C 의 원소가 아닌 c, d 를 원소로 가져서는 안된다. 또한 $B \cap C$ 의 원소인 b 는 X 의 원소가 되거나 되지 않아도 조건을 성립시킨다.

$\therefore \{a, b, e\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.

$\therefore 2^3 = 8(\text{개})$

11. $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ 를 만족하는 자연수 $a_k (k = 1, 2, \dots, 5)$ 를 원소로 하는 집합 A 와 집합 $B = \{a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, a_5^2\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{a_1, a_4\}$ 이고 $a_1 + a_4 = 10$ 이다. $A \cup B$ 의 원소의 합이 224 일 때, $a_2 + a_3 + a_5 + a_2^2 + a_3^2 + a_5^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 142

해설

$A \cap B = \{a_1, a_4\}$ 에서 a_1, a_4 모두 제곱수이고, 두 수의 합이 10 이므로 $a_1 = 1, a_4 = 9$

9 가 집합 B 의 원소이므로 집합 A 의 원소 중에는 3 이 포함되고, 또 9 가 집합 A 의 원소이므로 집합 B 의 원소 중에는 81 이 포함된다. 또, a_5 가 a_4 보다 크지만 a_5 가 10 보다 커지면 합집합이 224 보다 커지므로 a_5 는 10 이 되고, 차례로 대입하면 $a_3 = 4$ 가 된다.

$$A = \{1, 3, 4, 9, 10\}$$

$$B = \{1, 9, 16, 81, 100\}$$

$$\therefore a_2 + a_3 + a_5 + a_2^2 + a_3^2 + a_5^2 = 3 + 4 + 10 + 9 + 16 + 100 = 142$$

12. 두 집합 A, B 가 다음과 같을 때, $X \cap A = X$, $X \cup (A \cap B) = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

$$A = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{ 이하의 자연수}\}, B = \{3, 5, 7\}$$

- ① 2개 ② 4개 ③ 6개 ④ 8개 ⑤ 10개

해설

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A \cap B = \{3, 5\}, X \cap A = X \text{이므로 } X \subset A$$

$$X \cup (A \cap B) = X \text{이므로 } A \cap B \subset X$$

$$\{3, 5\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

따라서 집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 원소 3, 5를 반드시 포함하는 집합이므로

$$2^{5-2} = 2^3 = 8(\text{개})$$

13. 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은?

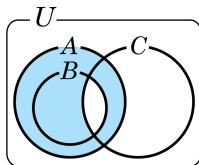
① $A - (B \cap C)$

② $(A - B) \cap C$

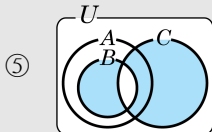
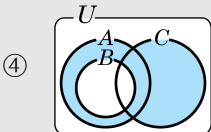
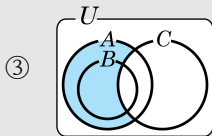
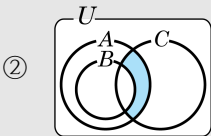
③ $(A \cup B) - C$

④ $(A \cup C) - B$

⑤ $(A \cap B) \cup C$



해설



14. 두 집합 $A = \{5, 2a + 1, 11\}$, $B = \{6 - a, 3a - 2, 13\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{7\}$ 일 때, $B - A$ 는?

① $\{5, 7, 11\}$

② $\{3, 7, 13\}$

③ $\{5, 11\}$

④ $\{3, 13\}$

⑤ $\{7\}$

해설

$A - B = \{7\}$ 이므로 $7 \in A$, $7 \in B$ 이다.

$$2a + 1 = 7 \quad \therefore a = 3$$

$$B = \{6 - 3, 3 \times 3 - 2, 13\} = \{3, 7, 13\}$$

$$B - A = \{3, 13\}$$

15. $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 $A \cup X = A$, $(A - B) \cap X = A - B$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

- ① 4 개 ② 8 개 ③ 16 개 ④ 32 개 ⑤ 64 개

해설

$A \cup X = A$ 이므로 $X \subset A$ 이고 $(A - B) \cap X = A - B$ 이므로 $(A - B) \subset X$ 이다. $\therefore (A - B) \subset X \subset A$

$A - B = \{6, 8, 10\}$ 이므로 집합 X 는 6, 8, 10 을 반드시 포함하는 A 의 부분집합이다.

따라서 $2^{5-3} = 2^2 = 4$ (개) 이다.

16. 유리수 전체의 집합을 Q 라 하고 자연수 n 에 대하여 집합 $A_n = \{x | x \in Q, <x> -x = \frac{1}{n}\}$ 이라 할 때, 다음 중 참인 것은? (단, $<x>$ 는 x 보다 큰 수 중 최소인 정수이다.)

① $A_1 = \emptyset$

② $A_4 \subset A_2$

③ $n(A_3) = 2$

④ $-\frac{5}{3} \in A_3$

⑤ $A_2 \cap A_4 = \emptyset$

해설

$$A_1 : <x> -x = 1 \Rightarrow x = \text{정수}$$

$$\therefore A_1 = \{\dots -1, 0, 1 \dots\}$$

$$A_2 : <x> -x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = n - \frac{1}{2} (n = \text{정수})$$

$$\therefore A_2 = \left\{ \dots -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \dots \right\}$$

$$A_3 : <x> -x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = n - \frac{1}{3} (n = \text{정수})$$

$$\therefore A_3 = \left\{ \dots -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \dots \right\}$$

$$A_4 : <x> -x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = n - \frac{1}{4} (n = \text{정수})$$

$$\therefore A_4 = \left\{ \dots -\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \dots \right\}$$

㉠ $A_1 \neq \emptyset$

㉡ $A_4 \not\subset A_2$

㉢ A_3 은 무한집합이므로 $n(A_3) \neq 2$

㉣ $-\frac{5}{3} \notin A_3$

㉤ $A_2 \cap A_4 = \emptyset$

17. 집합 P 에 대하여 $2^A = \{P \mid P \subset A\}$ 로 정의한다. $A = \{1, 2, 4\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\emptyset \in 2^A$

② $\emptyset \subset 2^A$

③ $\{\emptyset\} \in 2^A$

④ $\{\emptyset\} \subset 2^A$

⑤ $A \in 2^A$

해설

$2^A = \{P \mid P \subset A\}$ 는 집합 A 의 부분집합의 집합을 의미한다. 집합 A 의 부분집합은 $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}$ 이다.

따라서 2^A 를 원소나열법으로 나타내면 $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}\}$ 이다.

③ $\{\emptyset\} \notin 2^A$

18. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A^c \cup B^c) - B = \{1, 3, 7\}$, $(A \cap B) = \{2, 4\}$ 를 만족하는 집합 A 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

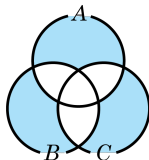
▷ 정답 : 8 개

해설

$$\begin{aligned}(A^c \cup B^c) - B &= (A \cap B)^c \cap B^c \\ &= ((A \cap B) \cup B)^c \\ &= B^c = \{1, 3, 7\}\end{aligned}$$

따라서 $B = \{2, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$ 이므로,
집합 A 는 원소 2, 4 를 반드시 포함하고 5, 6, 8, 9, 10 은 반드시 포함하지 않으므로
집합 A 의 개수는 $2^3 = 8$ (개)

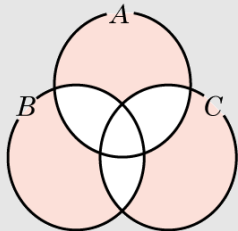
19. 1 에서 100 까지의 자연수 중에서 $A = \{x|x \text{는 } 2\text{의 배수}\}$, $B = \{x|x \text{는 } 3\text{의 배수}\}$, $C = \{x|x \text{는 } 5\text{의 배수}\}$ 일 때, 다음 벤 다이어그램에 색칠된 부분에 속하는 원소의 개수는?



- ① 48 개 ② 67 개 ③ 75 개
④ 77 개 ⑤ 85 개

해설

색칠한 부분에 속하는 원소의 개수는
 $n(A) + n(B) + n(C) - 2 \times n(A \cap B) - 2 \times n(B \cap C) - 2 \times n(C \cap A) + 3 \times n(A \cap B \cap C)$
 이다.



$n(A) = 50, n(B) = 33, n(C) = 20$, $A \cap B = \{x|x \text{는 } 6\text{의 배수}\}$ 이므로 $n(A \cap B) = 16$
 $B \cap C = \{x|x \text{는 } 15\text{의 배수}\}$ 이므로 $n(B \cap C) = 6$, $C \cap A = \{x|x \text{는 } 10\text{의 배수}\}$ 이므로 $n(C \cap A) = 10$
 $A \cap B \cap C = \{x|x \text{는 } 30\text{의 배수}\}$ 이므로 $n(A \cap B \cap C) = 3$
 따라서 $50 + 33 + 20 - 2 \times 16 - 2 \times 6 - 2 \times 10 + 3 \times 3 = 48$ 이다.

20. 중학생 120 명을 대상으로 수학, 과학, 영어 중 자신 있어 하는 과목을 선택하게 하였더니, 수학을 선택한 학생은 33 명, 과학을 선택한 학생은 40 명, 영어를 선택한 학생은 36 명이였다. 또, 두 과목을 선택한 학생은 모두 34 명, 세 과목을 모두 선택한 학생은 9 명이였다. 세 과목 중 어떤 과목도 선택하지 않은 학생 수를 구하여라.



답 :

명

▷ 정답 : 63 명

해설

중학생 전체의 집합을 U , 수학을 선택한 학생의 집합을 A , 과학을 선택한 학생의 집합을 B , 영어를 선택한 학생의 집합을 C 라 하면,

두 과목을 선택한 학생 수는 $n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 3n(A \cap B \cap C)$,

세 과목을 모두 선택한 학생 수는 $n(A \cap B \cap C)$,

세 과목 중 어떤 과목도 선택하지 않은 학생 수는 $n((A \cup B \cup C)^c)$

,

$n(U) = 120, n(A) = 33, n(B) = 40, n(C) = 36, n(A \cap B \cap C) = 9$

,

$n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 3n(A \cap B \cap C) = 34$ 이므로,

$n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) = 34 + 27 = 61$,

$n(A \cup B \cup C)$

$= n(A) + n(B) + n(C) - (n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)) + n(A \cap B \cap C)$

$= 33 + 40 + 36 - 61 + 9 = 57$

$\therefore n((A \cup B \cup C)^c) = n(U) - n(A \cup B \cup C) = 120 - 57 = 63$