

1. 다음 중 옳게 연결된 것은?

- ① $\{x \mid x \text{는 홀수}\} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$
- ② $\{x \mid x \text{는 짝수}\} = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$
- ③ $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 5, 10\}$
- ④ $\{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 배수}\} = \{6, 12, 18, \dots\}$
- ⑤ $\{x \mid x \text{는 } 5 \text{이하의 자연수}\} = \{1, 2, 3, 4\}$

해설

- ③ $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 5, 10\}$ 이다.

2. 집합 $A = \{\emptyset, 1, 2, \{1, 2\}\}$ 에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\emptyset \in A$

㉡ $\emptyset \subset A$

㉢ $\{1\} \in A$

㉣ $\{1, 2\} \subset A$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉣

④ ㉠, ㉡, ㉣

⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ 공집합은 집합 A 의 원소이다.

㉡ 공집합은 집합 A 의 부분집합이다.

㉣ 1, 2를 포함한 집합은 부분집합도 되고 원소도 된다.

3. 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $\{\emptyset\} \subset \emptyset$
- ② $\{a, b, c\} \subset \{a, b, c, d\}$
- ③ $A = \{x \mid x \text{는 } 5\text{보다 작은 자연수}\}$ 이면, $\{1, 2, 3, 4\} \subset A$ 이다.
- ④ $\{1, 2, 3, 4\} \subset A$ 이고 $A \subset B$ 이면 $\{1, 4\} \subset B$
- ⑤ $\{4, 5\} \subset \{5, 4\}$

해설

- ① $\{\emptyset\} \not\subset \emptyset$

4. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 } 3 \text{의 배수}\}$ 의 부분집합을 모두 고르면?

- ① $\{3, 4, 5, 6\}$

② $\emptyset$

③ $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{이하의 홀수}\}$

④ $\{3\}$

⑤ $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{의 약수}\}$

해설

- $A = \{3, 6, 9\}$
- ③ $\{1, 3, 5, 7, 9\} \not\subset A$
- ⑤ $\{1, 3, 9\} \not\subset A$

5. 두 집합 $A = \{x \mid a \leq 2x + 1 \leq 9\}$, $B = \{x \mid -2 \leq x \leq b\}$ 가 서로 같을 때, 상수 a, b 의 합은? (단, 집합 A, B 는 공집합이 아니다.)

① -3

② -1

③ 1

④ 3

⑤ 5

해설

$a \leq 2x + 1 \leq 9$ 에서

$a - 1 \leq 2x \leq 8, \frac{a - 1}{2} \leq x \leq 4$

$\therefore A = \left\{ x \mid \frac{a - 1}{2} \leq x \leq 4 \right\},$

$B = \{x \mid -2 \leq x \leq b\}$

이때, $A = B$ 이므로

$\frac{a - 1}{2} = -2, b = 4$

$a = -3, b = 4$

$\therefore a + b = 1$

6. 다음 중 옳은 것은? (정답 2개)

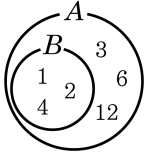
20의 약수의 모임: A
4의 배수의 모임: B
100이하 짝수의 모임: C
10이하의 소수: D

- ① $A \cap B = \emptyset$
- ② $A \cap D = \{2, 5\}$
- ③ $B \cap C = \{4, 8, 12, \dots, 100\}$
- ④ $A \cup D = \{1, 3, 5, 7, 10\}$
- ⑤ $9 \in B \cup D$

해설

A 는 20의 약수의 모임이므로
 $A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$,
 B 는 4의 배수의 모임이므로
 $B = \{4, 8, 12, 16, 20, \dots\}$,
 C 는 100이하 짝수의 모임이므로
 $C = \{2, 4, 6, 8, \dots, 100\}$,
 D 는 10이하의 소수이므로
 $D = \{2, 3, 5, 7\}$ 이다.
① $A \cap B = \{4, 20\}$
④ $A \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 20\}$
⑤ $B \cup D = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 12, 16, \dots\}$ 이므로 9는 $B \cup D$ 에 속하지 않는다.

7. 다음 벤다이어그램을 보고, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?
(답2개)



- ① $A = \{3, 6, 12\}$ ② $B = \{1, 2, 4\}$ ③ $A \subset B$
④ $A \cap B = A$ ⑤ $A \cup B = A$

해설

- ① 집합 A 는 집합 B 부분을 포함하므로 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이다.
③ 집합 A 는 집합 B 부분을 포함하므로 $B \subset A$ 이다.
④ $A \cap B = B$ 이다.

8. 두 집합 $A = \{3, a-4, 9\}$, $B = \{7, b+3, 10\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{7, 9\}$ 일 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

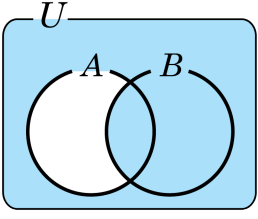
이므로

$$7 \in A \text{ 이므로 } a-4=7 \quad \therefore a=11$$

$$9 \in B \text{ 이므로 } b+3=9 \quad \therefore b=6$$

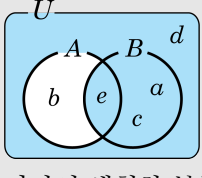
$$\therefore a-b=11-6=5$$

9. $U = \{a, b, c, d, e\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{b, e\}, B = \{a, c, e\}$ 일 때, 다음 벤 다이어그램에서 색칠된 부분을 나타내는 집합은?



- ① $\{a, b, c, d\}$ ② $\{a, b, c, e\}$ ③ $\{a, c, d, e\}$
④ $\{a, b, d, e\}$ ⑤ $\{a, b, c, d, e\}$

해설



따라서 색칠한 부분이 나타내는 집합은 $\{a, c, d, e\}$ 이다.

10. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) - A = \emptyset$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A \subset B$

② $A \cap B = \emptyset$

③ $A \cap B = A$

④ $A \cup B = A$

⑤ $A \cup B = U$

해설

B 집합이 A 집합 안에 포함된다는 의미이므로 ④가 정답이다.

11. 두 집합 $A = \{1, 5, a\}$, $B = \{5, 7, b\}$ 이고 $A \subset B$ 일 때, 다음 설명 중 옳지 않은 것을 골라라.

- $\textcircled{\tiny{㉠}} \ a = 5$

$\textcircled{\tiny{㉡}} \ b = 1$

$\textcircled{\tiny{㉢}} \ B \subset A$

$\textcircled{\tiny{㉣}} \ A = B$

$\textcircled{\tiny{㉤}} \ a + b = 8$

▶ 답 :

▶ 정답 : $\textcircled{\tiny{㉠}}$

해설

$A \subset B$ 조건을 만족하기 위해선 집합 A 의 모든 원소가 집합 B 안에 포함되어야 하므로 $b = 1$ 이고,
 a 는 1, 5, 7 중 한 가지가 되어야하지만 이미 집합 A 에 1, 5 가 존재하므로 $a = 7$ 이 되어 $A = B$ 가 된다.
 $\textcircled{\tiny{㉠}} \ a = 7$

12. 두 집합 A, B 가 각각 공집합이 아닐 때, <보기>에서 서로소인 것은 모두 몇 개인가?

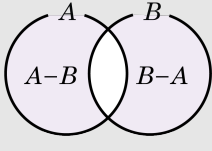
보기

- $\supsetneq A$ 와 $A \cup B$
- $\supsetneq A - B$ 와 B
- $\supsetneq B - A$ 와 A
- $\supsetneq A - B$ 와 $B - A$

- ① 없다.
- ② 1 개
- ③ 2 개
- ④ 3 개
- ⑤ 4 개

해설

$\supsetneq, \supsetneq, \supsetneq$ 3개이다.



13. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cup B$ 와 집합 B 가 다음과 같을 때, 다음 중 집합 A 가 될 수 없는 것은?

$A \cup B = \{x|x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}, B = \{x|x \text{는 } 3 \text{미만의 자연수}\}$

- ① {1, 4, 8}
- ② { $x|x$ 는 5보다 큰 2의 배수}
- ③ { $x|x$ 는 10보다 작은 4의배수}
- ④ { $x|x$ 는 8의 약수}
- ⑤ { $x|x$ 는 12의 약수}

해설

집합 $B = \{1, 2\}$ 이고, $A \cup B = \{1, 2, 4, 8\}$ 이므로
집합 A 는 원소 4, 8 을 반드시 포함하는 $A \cup B$ 의 부분집합이다.
⑤ { $x|x$ 는 12의 약수} = {1, 2, 3, 4, 6, 12} $\not\subset$ {1, 2, 4, 8}

14. $U = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 에 대하여 $A = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$,
 $B^c = \{x \mid x \text{는 } 2 \text{의 배수}\}$ 일 때, $A^c - B^c$ 은?

① $\{3, 5\}$

② $\{3, 7\}$

③ $\{3, 5, 7\}$

④ $\{3, 5, 7, 9\}$

⑤ $\{3, 5, 7, 8, 9\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B^c = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ 이므로

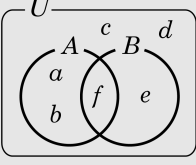
$A^c - B^c = \{3, 5, 6, 7, 9, 10\} - \{2, 4, 6, 8, 10\} = \{3, 5, 7, 9\}$ 이다.

15. 전체집합 $U = \{a, b, c, d, e, f\}$ 의 부분집합 A, B 에 대하여 $A - B = \{a, b\}, B - A = \{e\}, A^c \cap B^c = \{c, d\}$ 일 때, 집합 A^c 은?

- ① $\{b\}$
- ② $\{e\}$
- ③ $\{b, e\}$
- ④ $\{c, d\}$
- ⑤ $\{c, d, e\}$

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같으므로 $A^c = \{c, d, e\}$ 이다.



16. 두 집합 $A = \{x|x\text{는 } 10 \text{ 이하의 짝수}\}, B = \{x|x\text{는 } 6\text{의 약수}\}$ 에 대하여 보기의 조건을 모두 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

보기

㉠ $A \cap X = X$

㉡ $(A - B) \cup X = X$

▶ 답 : 개

▶ 정답 : 4개

해설

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, B = \{1, 2, 3, 6\}$ 이고 $(A - B) \subset X \subset A$ 이다.
따라서 $\{4, 8, 10\} \subset X \subset \{2, 4, 6, 8, 10\}$ 이므로 집합 X 의 개수는 $2 \times 2 = 4(\text{개})$ 이다.

17. 세 집합 $A = \{3, 7, a\}$, $B = \{3, b, 15\}$, $C = \{c, 7, 15\}$ 에 대하여 $(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) = \emptyset$ 이 성립할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) = \emptyset$ 에서

$A - B = \emptyset, B - C = \emptyset, C - A = \emptyset$

즉, $A \subset B, B \subset C, C \subset A$ 이므로

$A = B = C$

$\therefore a = 15, b = 7, c = 3$

$a + b + c = 25$

18. 자연수 k 의 양의 배수를 원소로 하는 집합을 A_k 라 할 때 $A_3 \cap (A_2 \cup A_4) = A_k$ 를 만족하는 k 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 6

⑤ 12

해설

$$A_3 \cap (A_2 \cup A_4) = A_3 \cap A_2 = A_6$$

19. 두 집합 A, B 에 대하여 연산 $\star$ 를 $A \star B = A^c \cap B^c$ 으로 정의할 때 다음 중 $(A \star A) \star B$ 와 같은 집합은?

- ① A ② B ③ $A \cap B$ ④ $A \cup B$ ⑤ $A - B$

해설

$A \star A = A^c \cap A^c = A^c$ 이므로 $(A \star A) \star B = A^c \star B = (A^c)^c \cap B^c = A \cap B^c = A - B$

20. 세 집합 $A = \{x|x \text{는 한국인}\}$, $B = \{x|x \text{는 학생}\}$, $C = \{x|x \text{는 여자}\}$ 에 대하여 한국의 남학생을 나타내는 집합을 모두 고르면?

- ① $(A \cup B) - C$
- ② $A \cup B \cup C$
- ③ $(A \cap B) - C$
- ④ $A \cap B \cap C^c$
- ⑤ $(A - B)^c \cap C^c$

해설

한국 학생 중 여학생을 뺀 것 또는 한국 학생 중 여자가 아닌 사람이므로 $(A \cap B) - C$ 또는 $A \cap B \cap C^c$ 이다.

21. 다음 두 조건 p, q 에 대하여 ‘ $\sim p$ 또는 q ’의 부정은?

$$p : -1 < x \leq 3, \quad q : 0 < x \leq 2$$

- ① $-1 < x \leq 0$ 또는 $2 < x \leq 3$
- ② $-1 < x < 0$ 또는 $2 \leq x \leq 3$
- ③ $-1 < x \leq 3$
- ④ $0 < x \leq 2$
- ⑤ x 는 모든 실수

해설

$\sim (\sim p \text{ 또는 } q) \leftrightarrow p$ 이고 $\sim q$ 그런데
 $\sim q : x \leq 0$ 또는 $x > 2$ 이므로 p 이고 $\sim q$
 $\leftrightarrow (-1 < x \leq 3)$ 이고 $(x \leq 0$ 또는 $x > 2)$
 $\leftrightarrow (-1 < x \leq 3$ 이고 $x \leq 0)$ 또는 $(-1 < x \leq 3$ 이고 $x > 2)$
 $\leftrightarrow -1 < x \leq 0$ 또는 $2 < x \leq 3$

22. 실수 x 에 대한 두 조건 $p : 0 \leq x \leq 2$, $q : x + a \leq 0$ 이 있다. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참일 때, a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하면 $p \rightarrow q$ 가 참이므로 $P \subset Q$ 이다. $P = \{x|0 \leq x \leq 2\}$, $Q = \{x|x \leq -a\}$

위의 그림에서 $P \subset Q$ 이라면 $2 \leq -a$, $a \leq -2$ 따라서 a 의 최댓값은 -2

23. 두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때, 보기에서 반드시 참인 것을 모두 고르면?

$\neg p \rightarrow r$	$\neg r \rightarrow p$	$\neg p \rightarrow \sim r$
$\neg q \rightarrow \sim r$	$\neg r \rightarrow \sim p$	

- ① $\neg, \neg$

② $\neg, \neg, \neg$

③ $\neg, \neg$
- ④ $\neg, \neg, \neg$

⑤ $\neg, \neg, \neg$

해설

$p \rightarrow q$ 가 참이고, 또한 $r \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 그 대우명제인 $q \rightarrow \sim r$ 가 참. $\therefore p \rightarrow q \rightarrow \sim r$
즉, $p \rightarrow \sim r, q \rightarrow \sim r$ 가 참이고 또한 $p \rightarrow \sim r$ 이 참이므로 그 대우인 $r \rightarrow \sim p$ 도 참이다.
따라서 $\neg, \neg, \neg$ 이 참이다.

24. 어떤 건물에 불이 나서 경찰이 조사하였더니 누군가 방화한 것이고, ‘방화범은 반드시 건물 안에 있었다.’라는 사실을 알아내었으며 불이 난 시간에 건물 안에 있었던 용의자를 잡아 범인으로 단정하였다. 이러한 단정은 반드시 옳은가? 또, 그 근거를 논리적으로 옳게 설명한 것은?
- ① 그렇다. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 $\sim q \rightarrow p$ 도 반드시 참이다.
 - ② 그렇다. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이라 하여 $q \rightarrow p$ 가 반드시 참이 되는 것은 아니다.
 - ③ 아니다. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 반드시 참이다.
 - ④ 아니다. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이라 하여 $q \rightarrow p$ 가 반드시 참이 되는 것은 아니다.
 - ⑤ 아니다. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 $\sim q \rightarrow \sim p$ 는 반드시 참이다.

해설

‘방화범은 반드시 건물 안에 있었다.’가 참이라고 해서 ‘건물 안에 있었던 사람이 방화범이다.’도 참이라고 할 수는 없다. 즉, 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이라 하여 그 역인 $q \rightarrow p$ 가 반드시 참인 것은 아니다.

25. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, q 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 충분조건, r 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 s 이기 위한 어떤 조건인지 써라.

▶ 답: 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$

q 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow q$

q 는 s 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow s$

r 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow r$

 $s \Rightarrow r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 에서 $s \Rightarrow p$

그러나 $p \Rightarrow s$ 인지는 알 수 없다.

$\therefore p$ 는 s 이기 위한 필요조건이다.

26. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때, $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

산술-기하평균 부등식에 의해

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{b}{a} \times \frac{c}{b} \times \frac{a}{c}} = 3$$

$$\therefore \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3$$

27. 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 = 5$ 를 만족할 때, $x + 2y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$$(1^2 + 2^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 2y)^2$$

$x^2 + y^2 = 5$ 이므로

$$25 \geq (x + 2y)^2$$

$$\therefore -5 \leq x + 2y \leq 5$$

$$\therefore M = 5, m = -5$$

$$\therefore M - m = 5 - (-5) = 10$$

28. 다음 중 무한집합인 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

- ① $A = \{5, 10, 15, 20, 25, \dots, 100\}$
- ② $B = \{x \mid x \text{는 } 1 \text{ 보다 작은 분수}\}$
- ③ $C = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{ 의 배수인 짝수}\}$
- ④ $D = \{x \mid x \text{는 } 2 \times n, n \text{은 } 10 \text{ 보다 작은 자연수}\}$
- ⑤ $E = \left\{x \mid x \text{는 } \frac{100}{x} \text{을 자연수로 만드는 자연수}\right\}$

해설

- ① $A = \{5, 10, 15, 20, 25, \dots, 100\}$ 이므로 유한집합이다.
- ② $B = \{x \mid x \text{는 } 1 \text{ 보다 작은 분수}\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ 이므로 무한집합이다.
- ③ $C = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{ 의 배수인 짝수}\} = \{6, 12, \dots\}$ 이므로 무한집합이다.
- ④ $D = \{x \mid x \text{는 } 2 \times n, n \text{은 } 10 \text{ 보다 작은 자연수}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots, 18\}$ 이므로 유한집합이다.
- ⑤ $E = \left\{x \mid x \text{는 } \frac{100}{x} \text{을 자연수로 만드는 자연수}\right\} = \{1, 2, 4, 5, 20, 25, 50, 100\}$ 이므로 유한집합이다.

29. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 15 \text{ 이하의 소수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{ 미만의 소수}\}$ 에 대하여 $B \subset X \subset A$ 를 만족하는 X 의 개수를 모두 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 16 개

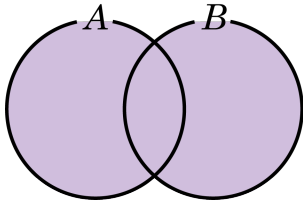
해설

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}, B = \{2, 3\}$$

집합 X 는 원소 2 와 3 을 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로
부분집합의 개수는

$$2^{6-2} = 2^4 = 16 \text{ (개)}$$

30. 두 집합 $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 24\}$, $B = \{4 \times x \mid x \in A\}$ 에 대하여 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합의 원소의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 96

해설

$B = \{4 \times x \mid x \in A\}$ 는 집합 A 의 원소를 x 에 대입한 수들의 집합이다.
원소나열법으로 고쳐보면,
 $B = \{4, 8, 16, 32, 64, 96\}$ 이 된다.
색칠한 부분의 원소는 $\{1, 2, 4, 8, 16, 24, 32, 64, 96\}$ 이다.
이때, 가장 큰 원소는 96 이다.

31. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A - B = \emptyset$ 일 때, $A = \{1, 2, 3, 6\}$ 이라면 집합 B 로 알맞지 않은 것은?

① $B = \{1, 2, 3, 6, 8\}$

② $B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$

③ $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$

④ $B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$

⑤ $B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$

해설

$A - B = \emptyset$ 이면 집합 A 의 모든 원소는 집합 B 에 속한다.

32. 전체집합 U 의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 중에서 옳지 않은 것은?

- ①

$A - B^c = A \cap B$
- ②

$A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B)$
- ③

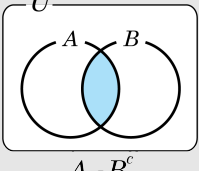
$A^c \cap (A \cup B) = A - B$
- ④

$(A^c \cap B) - A = B \cap A^c$
- ⑤

$(A - B)^c = A^c \cup B$

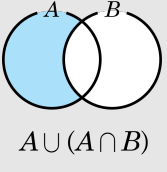
해설

①



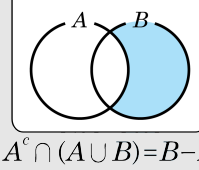
$A - B^c$

②



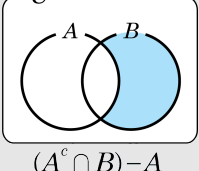
$A \cup (A \cap B)$

③



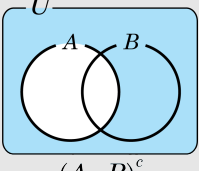
$A^c \cap (A \cup B) = B - A$

④



$(A^c \cap B) - A$

⑤



$(A - B)^c$

33. 학생 수가 40 명인 어느 학급에서 두 종류의 치약 A , B 를 사용해 본 학생 수를 조사했더니 각각 20명, 30 명이었다. 두 종류의 치약을 모두 사용해 본 학생 수의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하면?

- ① 10
- ② 20
- ③ 30
- ④ 40
- ⑤ 50

해설

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 $= 50 - n(A \cap B)$
 $n(A \cap B) = 50 - n(A \cup B) \cdots \textcircled{1}$
i) $n(A \cap B)$ 가 최대인 경우는 치약 A를 사용한 학생이 모두 치약 B를 사용한 경우이다 $\Rightarrow M = 20$
ii) $n(A \cap B)$ 가 최소인 경우는 $\textcircled{1}$ 에서 $n(A \cup B)$ 가 최대인 경우이다.
 $\Rightarrow n(A \cup B) = 40, n(A \cap B) = 10 = m$
 $\therefore m + M = 10 + 20 = 30$

34. 전체집합 U 의 임의의 부분집합을 A 라 하고 조건 p, q 를 만족시키는 집합을 P, Q 라 하자. $(A \cap P) \cup (A^c \cap Q) = (A \cap P) \cup Q$ 가 성립할 때 다음 중 참인 명제는?

① $\sim q \rightarrow p$

② $p \rightarrow q$

③ $p \leftrightarrow q$

④ $q \rightarrow p$

⑤ $q \rightarrow \sim p$

해설

집합 A 가 전체집합 U 의 임의의 부분집합이므로 $A = U$ 라 놓으면, 좌변 : $(U \cap P) \cup (\emptyset \cap Q) = P \cup \emptyset = P$
우변 : $(U \cap P) \cup Q = P \cup Q \therefore P = P \cup Q$ 이므로 $Q \subset P$
 $\therefore q \rightarrow p$ 는 참이다.

35. 다음은 ‘자연수 n 에 대하여, n^2 이 3의 배수이면 n 도 3의 배수이다.’라는 명제를 대우를 이용하여 증명하는 과정이다. (가), (나), (다), (라), (마)에 들어갈 알맞은 식 또는 수끼리 짝지은 것을 고르면?

대우는 ‘자연수 n 에 대하여, n 이 3의 배수가 아니면 n^2 도 3의 배수가 아니다.’이다. 3의 배수가 아닌 자연수 n 은 3으로 나누면 나머지가 1 또는 2이므로
 $n = (\text{가})$ 또는 $n = (\text{나})$ (단, k 는 음이 아닌 정수)로 가정할 수 있다.
(i) $n = (\text{가})$ 일 때
 $n^2 = 3(\text{다}) + 1$
(ii) $n = (\text{나})$ 일 때
 $n^2 = 3(\text{라}) + 1$
이 되어 n^2 은 3으로 나누면 나머지가 (마)인 자연수가 된다.
(i), (ii)에 의하여 n 이 3의 배수가 아니면 n^2 도 3의 배수가 아니다. 그러므로 주어진 명제는 참인 명제이다.

① $3k - 2, 3k - 1, (3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1), 2$

② $3k - 1, 3k - 2, (3k^2 - 4k + 1), (3k^2 - 2k), 1$

③ $3k + 2, 3k + 1, (3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1), 2$

④ $3k - 2, 3k - 1, (3k^2 - 4k + 1), (3k^2 - 2k), 1$

⑤ $3k + 1, 3k + 2, (3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1), 1$

해설

3의 배수가 아닌 수들은 3으로 나뉘서 1 또는 2가 남아야 하므로 $3k + 1$ 또는 $3k + 2$ 이어야 한다.
제곱을 하여 계산하면 (다), (라)는 각각 $(3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1)$ 가 되고, 나머지가 1인 자연수가 된다.
따라서 주어진 명제는 참인 명제이다.

36. 다음 중 명제 $|\alpha - \beta| = |\alpha + \beta|$ 의 필요조건이기는 하지만 충분조건은 아닌 것을 찾으면? (단, α, β 는 실수)

① $\alpha\beta < 1$

② $\alpha\beta = -1$

③ $\alpha\beta = 0$

④ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$

⑤ $\alpha^2 - \beta^2 = 0$

해설

$$|\alpha - \beta| = |\alpha + \beta| \rightarrow (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 \rightarrow -2\alpha\beta = 2\alpha\beta$$

$$\rightarrow \alpha\beta = 0$$

0 은 1 보다 작으므로 $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha\beta < 1$ 라고 말할 수 있다.

따라서, $\alpha\beta < 1$ 는 $\alpha\beta = 0$ 의 필요조건이다.

37. 전체 집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A - B)^c = B - A$ 가 성립할 필요충분조건을 구하면?

- ① $A \cap B = \emptyset$
- ② $A \cup B = U$
- ③ $A \subset B^c$
- ④ $A^c \cup B = U$
- ⑤ $A = B^c$

해설

$(A - B)^c = (A \cap B^c)^c = A^c \cup B$, $B - A = A^c \cap B$ $A^c \cup B = A^c \cap B$ 에서 $A^c = B$
즉, $A = B^c$

38. 두 조건 $p : a - 4 < x \leq a + 5$, $q : |x| \leq 1$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 정수 a 의 개수는?

- ① 6개 ② 7개 ③ 8개 ④ 9개 ⑤ 10개

해설

p 가 q 이기 위한 필요조건이므로 $p \leftarrow q$ 가 참이 되어야 한다. p , q 의 진리집합을 각각 P , Q 라 하면 $Q \subset P$ 이므로 $q : -1 \leq x \leq 1$ 에서 $a + 5 \geq 1$, $a - 4 < -1$ 따라서 $a \geq -4$, $a < 3$ 이다.
즉, $-4 \leq a < 3$ 이므로 정수 a 의 개수는 7 개이다.

39. $x > 2$ 일 때, $x + \frac{1}{x-2}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x > 2$ 에서 $x - 2 > 0$ 이므로
산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{x-2} &= x - 2 + \frac{1}{x-2} + 2 \\&\geq 2\sqrt{(x-2) \times \frac{1}{x-2}} + 2 \\&= 2 + 2 = 4\end{aligned}$$

(단, 등호는 $x = 3$ 일 때 성립)

40. 좌표평면 위의 점 A(1, 2)를 지나는 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a > 0, b > 0$)이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 B, C라 할 때, $\triangle OBC$ 의 최소 넓이는?

- ① 3 ② 3.5 ③ 4 ④ 4.5 ⑤ 5

해설

B(a , 0), C(0, b)이므로
 $\triangle OBC$ 의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}ab \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 은 점 (1, 2)를 지나므로

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}} = 2\sqrt{\frac{1}{S}}$$

$\therefore S \geq 4$

41. 자연수 n 에 대하여 집합 $A_n = \left\{x \mid \langle x \rangle - x = \frac{1}{2n}\right\}$ 으로 정할 때,
 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\langle x \rangle$ 는 x 보다 작지 않은 최소
 정수이다.)

- ㉠

자연수 i, j 에 대하여 $(i \neq j), A_i \cap A_j = \phi$
- ㉡

$\frac{1994}{4} \in A_2$
- ㉢

$A_2 \subset A_1$
- ㉤

$-\frac{7}{6} \in A_3$

- ①

㉠
- ②

㉠, ㉢
- ③

㉠, ㉤
- ④

㉡, ㉢, ㉤
- ⑤

㉠, ㉡, ㉤

해설

$\langle x \rangle$ 를 k 라 하면 $k-1 < x \leq k$

$$\langle x \rangle - x = \frac{1}{2n} \Leftrightarrow x = \langle x \rangle - \frac{1}{2n}$$

$$A_n = \left\{k - \frac{1}{2n} \mid k \text{는 정수}\right\}$$

$$A_1 = \left\{\cdots - \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \cdots\right\}$$

$$A_2 = \left\{\cdots - \frac{9}{4}, -\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \cdots\right\}$$

$$A_3 = \left\{\cdots - \frac{13}{6}, -\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{11}{6}, \cdots\right\}$$

따라서,
 자연수 i, j 에 대하여 $\Rightarrow A_i \cap A_j = \phi$

$$\frac{1994}{4} = 498 + \frac{2}{4} \notin A_2,$$

$$-\frac{7}{6} \in A_3$$

42. 주사위 A, B 두 개를 던져서 나올 수 있는 두 자리 자연수의 집합을 A 라 할 때, $n(A)$ 를 구하여라.

- ① 6
- ② 12
- ③ 24
- ④ 30
- ⑤ 36

해설

$A = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33$
 $\cdots 64, 65, 66\}$
 $n(A) = 36$

43. 자연수 N 에 대해 $A_N = \{x \mid x \text{는 } N \text{보다 작은 소수}\}$ 로 정의한다. A_N 의 진부분집합의 개수가 15 개일 때, N 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 19

해설

A_N 의 진부분집합의 개수 : 15 개
→ A_N 의 부분집합의 개수 : 16 개
→ $2^{n(A_N)} = 16, n(A_N) = 4$,
 A_N 은 N 보다 작은 소수를 원소로 가지므로 원소의 개수가 4 개가 되려면 $A_N = \{2, 3, 5, 7\}$,
따라서 N 의 최솟값은 8 , 최댓값은 11 이므로 N 의 최댓값과 최솟값의 합은 19

44. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중에서 소수를 n 개 포함하는 집합의 개수를 x_n 이라 할 때, $x_1 + x_2 + x_3$ 의 값을 구하면?

① 26 ② 27 ③ 28 ④ 29 ⑤ 30

해설

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 소수는 2, 3, 5
소수 1개 포함하는 부분집합: $2^2 \times 3 = 12$
소수 2개 포함하는 부분집합: $2^2 \times 3 = 12$
소수 3개 포함하는 부분집합: $2^2 = 4$
 $\therefore x_1 + x_2 + x_3 = 28$

해설

구하는 것은 적어도 소수 1개를 원소로 하는 부분집합의 개수와 같다.
 $\therefore 2^5 - 2^2 = 28$

45. 집합 $A = \{x|x \text{는 } m \text{보다 작거나 같은 자연수}\}$ 의 부분집합 중 원소가 2 개 이상인 부분집합을 차례로 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_N$ 이라 할 때, 다음 조건을 만족하는 m 값을 구하여라. (단, $S(A)$ 는 집합 A 의 원소의 총합이다.)
- $$S(A_1) + S(A_2) + S(A_3) + \dots + S(A_N) = 225$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$A = \{x|x \text{는 } m \text{보다 작거나 같은 자연수}\} = \{1, 2, 3, \dots, m\}$

집합 A 의 모든 부분 집합에 각 원소가 포함되는 횟수는 2^{m-1} (번)이고, 원소가 1 개 이하인 부분집합에 각 원소가 포함되는 횟수는 1 번이므로,

$$S(A_1) + S(A_2) + S(A_3) + \dots + S(A_N) = (2^{m-1} - 1) \times \left(\frac{m(m+1)}{2} \right) = 225$$

$225 = 3^2 \times 5^2$ 이고, $2^{m-1} - 1 \leq 255$ 인 범위에서 $2^{m-1} - 1$ 은 $5^2 = 25$ 의 배수가 될 수 없으므로,

$\frac{m(m+1)}{2}$ 은 5의 배수가 되어야 한다.

$\frac{m(m+1)}{2}$ 이 5의 배수가 되도록 작은 수부터 차례로 넣어보면 $m = 5$

47. 두 집합 $A = \{1, a^2, 8\}$, $B = \{2, a + 2, 3a\}$ 에서 $A - B = \{1, 8\}$ 일 때 a 의 값은? (단, a 는 자연수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$A = \{1, a^2, 8\}$, $B = \{2, a + 2, 3a\}$, $A - B = \{1, 8\}$ 이므로 $a^2 = 2$ 또는 $a^2 = a + 2$ 또는 $a^2 = 3a$ 이다.
 a 는 자연수이므로 $a^2 = 3a$ 에서 $a = 3$ 과 $a^2 = a + 2$ 에서 $a = 2$ 이다.

48. 집합 A, B 에 대한 연산 Δ 를 $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ 라고 정의할 때, 임의의 집합 A, B, C 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?
- ① $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$
- ② $A\Delta A\Delta A\Delta \cdots \Delta A \neq \phi$
- ③ $A^c\Delta B^c = A\Delta B$
- ④ $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$
- ⑤ $A\Delta(B \cap C) = (A\Delta B) \cap (A\Delta C)$

해설

- ① 벤 다이어그램을 그려 보면 성립함을 알 수 있다.
- ② $A\Delta A = (A \cup A) - (A \cap A) = A - A = \phi$
 $(A\Delta A)\Delta A = \phi\Delta A = (\phi \cup A) - (\phi \cap A) = A$
 $(A\Delta A\Delta A)\Delta A = A\Delta A = \phi$
 $A\Delta A\Delta A\Delta \cdots \Delta A$
└───────────┘
 n 개
- 에서 n 이 홀수이면 A , 짝수이면 ϕ 임을 알 수 있다.
- ③ $A^c\Delta B^c = (A^c \cup B^c) - (A^c \cap B^c) = (A \cap B)^c \cap (A \cup B) = (A \cup B) - (A \cap B) = A\Delta B$
- ④ 벤 다이어그램을 그려 보면 성립함을 알 수 있다.
- ⑤ 벤 다이어그램을 그려 보면 성립하지 않음을 알 수 있다.

49. 60 명의 학생이 세 클럽 중 적어도 한 클럽에 속해 있다. 그 학생의 집합을 각각 A, B, C 라 할 때. $n(A) = 42, n(B) = 36, n(C) = 27, n(A \cap B \cap C) = 10, n(A \cap B) = 26$ 일 때, C 에만 속하는 학생수를 구하여라.

▶ 답 : 명

▶ 정답 : 8명

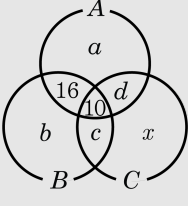
해설

다음 벤다이어그램에서 구하는 학생수는 x 이다.

$n(A \cup B \cup C) = 60$ 이므로 $a + b + c + d + x = 34 \cdots \textcircled{㉠}$

$a + d = 16, b + c = 10$ 이므로 $a + b + c + d = 26 \cdots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡} : x = 8$



50. 실수 a, b, c 가 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 을 만족한다. $ab + bc + ca$ 의 최댓값, 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M + m$ 의 값은?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ -1 ④ 1 ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

a, b, c 가 실수이므로 $(a + b + c)^2 \geq 0$

$\therefore a^2 + b^2 + c^2 \geq -2(ab + bc + ca) \cdots \textcircled{㉠}$

또한 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \cdots \textcircled{㉡}$

①, ②에서

$$-\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \leq ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$$

$a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 이므로

$$-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1$$

$$\therefore M = 1, m = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore M + m = \frac{1}{2}$$