1. 다음 중 옳게 연결된 것은?

① $\{x \mid x\text{는 홀수}\} = \{2, 4, 6, 8, \cdots\}$

② $\{x \mid x\text{는 짝수}\} = \{1, 3, 5, 7, \cdots\}$

③ $\{x \mid x\text{는 } 10\text{의 약수}\} = \{1, 2, 5, 10\}$

④ $\{x \mid x\text{는 } 3\text{의 배수}\} = \{6, 12, 18 \cdots\}$

⑤ $\{x \mid x\text{는 } 5\text{이하의 자연수}\} = \{1, 2, 3, 4\}$

해설

③ $\{x \mid x\text{는 } 10\text{의 약수}\} = \{1, 2, 5, 10\}$ 이다.

2. 집합 $A = \{\varnothing, 1, 2, \{1, 2\}\}$ 에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\varnothing \in A$　　㉡ $\varnothing \subset A$

㉢ $\{1\} \in A$　　㉣ $\{1, 2\} \subset A$

① ㉠, ㉡　　② ㉠, ㉢　　③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉡, ㉣　　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ 공집합은 집합 A의 원소이다.
㉡ 공집합은 집합 A의 부분집합이다.
㉣ 1, 2를 포함한 집합은 부분집합도 되고 원소도 된다.

3. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\{\varnothing\} \subset \varnothing$

② $\{a,\ b,\ c\} \subset \{a,\ b,\ c,\ d\}$

③ $A = \{x \mid x$는 5보다 작은 자연수$\}$ 이면, $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\} \subset A$ 이다.

④ $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\} \subset A$ 이고 $A \subset B$ 이면 $\{1,\ 4\} \subset B$

⑤ $\{4,\ 5\} \subset \{5,\ 4\}$

해설

① $\{\varnothing\} \not\subset \varnothing$

4. 집합 $A=\{x \mid x$는 10 이하의 3의 배수$\}$ 의 부분집합을 모두 고르면?

① $\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ ② $\varnothing$

③ $\{x \mid x$는 10이하의 홀수$\}$ ④ $\{3\}$

⑤ $\{x \mid x$는 9의 약수$\}$

해설

$A=\{3,\ 6,\ 9\}$

③ $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\} \not\subset A$

⑤ $\{1,\ 3,\ 9\} \not\subset A$

5. 두 집합 $A=\{x\mid a\le 2x+1\le 9\}$, $B=\{x\mid -2\le x\le b\}$가 서로 같을 때, 상수 a, b 의 합은? (단, 집합 A, B 는 공집합이 아니다.)

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$a\le 2x+1\le 9$에서

$a-1\le 2x\le 8$, $\dfrac{a-1}{2}\le x\le 4$

$\therefore A=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{a-1}{2}\le x\le 4\right\}$,

$B=\{x\mid -2\le x\le b\}$

이때, $A=B$이므로

$\dfrac{a-1}{2}=-2$, $b=4$

$a=-3$, $b=4$

$\therefore a+b=1$

6. 다음 중 옳은 것은? (정답 2 개)

20 의 약수의 모임 : A 4 의 배수의 모임 : B 100 이하 짝수의 모임 : C 10 이하의 소수 : D

① $A \cap B = \varnothing$

② $A \cap D = \{2,\ 5\}$

③ $B \cap C = \{4,\ 8,\ 12,\ \cdots,\ 100\}$

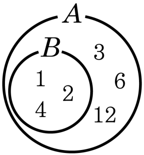
④ $A \cup D = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 10\}$

⑤ $9 \in B \cup D$

해설

A 는 20 의 약수의 모임이므로
$A = \{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20\}$,
B 는 4 의 배수의 모임이므로
$B = \{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ \cdots\}$,
C 는 100 이하 짝수의 모임이므로
$C = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots,\ 100\}$,
D 는 10 이하의 소수이므로
$D = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ 이다.
① $A \cap B = \{4,\ 20\}$
④ $A \cup D = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 10,\ 20\}$
⑤ $B \cup D = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 12,\ 16,\ \cdots\}$ 이므로 9 는 $B \cup D$ 에 속하지 않는다.

7. 다음 벤다이어그램을 보고, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?
(답2 개)



① $A=\{3,\ 6,\ 12\}$ ② $B=\{1,\ 2,\ 4\}$ ③ $A\subset B$

④ $A\cap B=A$ ⑤ $A\cup B=A$

해설

① 집합 A는 집합 B부분을 포함하므로 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$ 이다.
③ 집합 A는 집합 B부분을 포함하므로 $B\subset A$ 이다.
④ $A\cap B=B$ 이다.

8. 두 집합 $A=\{3,\ a-4,\ 9\}$, $B=\{7,\ b+3,\ 10\}$ 에 대하여 $A\cap B=\{7,9\}$ 일 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

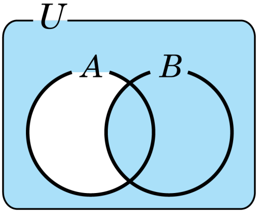
이므로

$7\in A$ 이므로 $a-4=7\quad \therefore a=11$

$9\in B$ 이므로 $b+3=9\quad \therefore b=6$

$\therefore a-b=11-6=5$

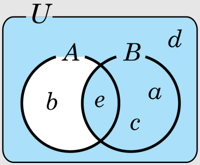
9. $U=\{a,b,c,d,e\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A=\{b,e\}$, $B=\{a,c,e\}$ 일 때, 다음 벤 다이어그램에서 색칠된 부분을 나타내는 집합은?



① $\{a,b,c,d\}$ ② $\{a,b,c,e\}$ ③ $\{a,c,d,e\}$

④ $\{a,b,d,e\}$ ⑤ $\{a,b,c,d,e\}$

해설



따라서 색칠한 부분이 나타내는 집합은 $\{a,c,d,e\}$ 이다.

10. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) - A = \varnothing$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A \subset B$ ② $A \cap B = \varnothing$ ③ $A \cap B = A$

④ $A \cup B = A$ ⑤ $A \cup B = U$

해설

B 집합이 A 집합 안에 포함된다는 의미이므로 ④가 정답이다.

11. 두 집합 $A=\{1,\ 5,\ a\}$, $B=\{5,\ 7,\ b\}$ 이고 $A\subset B$ 일 때, 다음 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것을 골라라.

㉠ $a=5$	㉡ $b=1$	㉢ $B\subset A$
㉣ $A=B$	㉤ $a+b=8$	

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

해설

$A\subset B$ 조건을 만족하기 위해선 집합 A 의 모든 원소가 집합 B 안에 포함되어야 하므로 $b=1$ 이고,
a 는 1, 5, 7 중 한 가지가 되어야하지만 이미 집합 A 에 1, 5 가 존재하므로 $a=7$ 이 되어 $A=B$ 가 된다.
㉠ $a=7$

12. 두 집합 A, B가 각각 공집합이 아닐 때, <보기>에서 서로소인 것은 모두 몇 개인가?

보기

ㄱ. A 와 $A \cup B$

ㄴ. $A - B$ 와 B

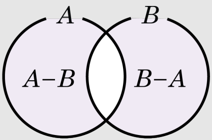
ㄷ. $B - A$ 와 A

ㄹ. $A - B$ 와 $B - A$

① 없다. ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

ㄴ, ㄷ, ㄹ 3개이다.



13. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cup B$ 와 집합 B 가 다음과 같을 때, 다음 중 집합 A 가 될 수 <u>없는</u> 것은?

$A \cup B = \{x \mid x$는 8의 약수$\}$, $B = \{x \mid x$는 3미만의 자연수$\}$

① $\{1,\ 4,\ 8\}$

② $\{x \mid x$는 5보다 큰 2의 배수$\}$

③ $\{x \mid x$는 10보다 작은 4의배수$\}$

④ $\{x \mid x$는 8의 약수$\}$

⑤ $\{x \mid x$는 12의 약수$\}$

해설

집합 $B = \{1,\ 2\}$ 이고, $A \cup B = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$ 이므로
집합 A 는 원소 4, 8 을 반드시 포함하는 $A \cup B$ 의 부분집합이다.
⑤ $\{x \mid x$는 12의 약수$\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\} \not\subset \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$

14. $U = \{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$ 에 대하여 $A = \{x \mid x$는 8의 약수$\}$, $B^c = \{x \mid x$는 2의 배수$\}$ 일 때, $A^c - B^c$ 은?

① $\{3, 5\}$ ② $\{3, 7\}$ ③ $\{3, 5, 7\}$

④ $\{3, 5, 7, 9\}$ ⑤ $\{3, 5, 7, 8, 9\}$

해설

$U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$, $A = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $B^c = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$ 이므로

$A^c - B = \{3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10\} - \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\} = \{3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ 이다.

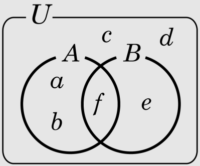
15. 전체집합 $U = \{a, b, c, d, e, f\}$ 의 부분집합 A, B 에 대하여 $A - B = \{a, b\}$, $B - A = \{e\}$, $A^c \cap B^c = \{c, d\}$ 일 때, 집합 A^c 은?

① $\{b\}$　　② $\{e\}$　　③ $\{b, e\}$

④ $\{c, d\}$　　⑤ $\{c, d, e\}$

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같으므로 $A^c = \{c, d, e\}$ 이다.



16. 두 집합 $A = \{x | x$는 10 이하의 짝수$\}$, $B = \{x | x$는 6의 약수$\}$ 에 대하여 보기의 조건을 모두 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

보기

㉠ $A \cap X = X$ ㉡ $(A - B) \cup X = X$

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 4 개

해설

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 6\}$ 이고 $(A - B) \subset X \subset A$ 이다. 따라서 $\{4, 8, 10\} \subset X \subset \{2, 4, 6, 8, 10\}$ 이므로 집합 X 의 개수는 $2 \times 2 = 4$(개) 이다.

17. 세 집합 $A = \{3,\ 7,\ a\}$, $B = \{3,\ b,\ 15\}$, $C = \{c,\ 7,\ 15\}$에 대하여 $(A-B) \cup (B-C) \cup (C-A) = \varnothing$이 성립할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$(A-B) \cup (B-C) \cup (C-A) = \varnothing$에서

$A-B=\varnothing$, $B-C=\varnothing$, $C-A=\varnothing$

즉, $A \subset B$, $B \subset C$, $C \subset A$이므로

$A=B=C$

$\therefore a=15$, $b=7$, $c=3$

$a+b+c=25$

18. 자연수 k의 양의 배수를 원소로 하는 집합을 A_k라 할 때 $A_3 \cap (A_2 \cup A_4) = A_k$를 만족하는 k의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 6 ⑤ 12

해설

$$A_3 \cap (A_2 \cup A_4) = A_3 \cap A_2 = A_6$$

19. 두 집합 A, B에 대하여 연산 ★를 $A★B = A^c \cap B^c$ 으로 정의할 때 다음 중 $(A★A)★B$와 같은 집합은?

① A ② B ③ $A \cap B$ ④ $A \cup B$ ⑤ $A - B$

해설

$A★A = A^c \cap A^c = A^c$ 이므로 $(A★A)★B = A^C★B = (A^C)^C \cap B^C = A \cap B^C = A - B$

20. 세 집합 $A = \{x|x$는 한국인$\}$, $B = \{x|x$는 학생$\}$, $C = \{x|x$는 여자$\}$에 대하여 한국의 남학생을 나타내는 집합을 모두 고르면?

① $(A \cup B) - C$
② $A \cup B \cup C$
③ $(A \cap B) - C$
④ $A \cap B \cap C^c$
⑤ $(A - B)^c \cap C^c$

해설

한국 학생 중 여학생을 뺀 것 또는 한국 학생 중 여자가 아닌 사람이므로
$(A \cap B) - C$ 또는 $A \cap B \cap C^c$ 이다.

21. 다음 두 조건 p, q 에 대하여 '$\sim p$ 또는 q'의 부정은?

$p \ : \ -1 < x \leq 3, \quad q \ : \ 0 < x \leq 2$

① $-1 < x \leq 0$ 또는 $2 < x \leq 3$

② $-1 < x < 0$ 또는 $2 \leq x \leq 3$

③ $-1 < x \leq 3$

④ $0 < x \leq 2$

⑤ x 는 모든 실수

해설

$\sim(\sim p$ 또는 $q) \ \leftrightarrow \ p$ 이고 $\sim q$ 그런데

$\sim q \ : \ x \leq 0$ 또는 $x > 2$ 이므로 p 이고 $\sim q$

$\leftrightarrow \ (-1 < x \leq 3)$ 이고 $(x \leq 0$ 또는 $x > 2)$

$\leftrightarrow \ (-1 < x \leq 3$ 이고 $x \leq 0)$ 또는 $(-1 < x \leq 3$ 이고 $x > 2)$

$\leftrightarrow -1 < x \leq 0$ 또는 $2 < x \leq 3$

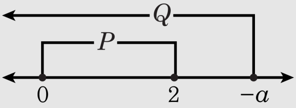
22. 실수 x에 대한 두 조건 p : $0 \le x \le 2$, q : $x+a \le 0$이 있다. 명제 $p \rightarrow q$가 참일 때, a의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하면 $p \rightarrow q$가 참이므로 $P \subset Q$ 이다. $P = \{x|0 \le x \le 2\}$, $Q = \{x|x \le -a\}$



위의 그림에서 $P \subset Q$이려면 $2 \le -a$, $a \le -2$ 따라서 a의 최댓값은 -2

23. 두 명제 $p \to q$ 와 $r \to \sim q$ 가 모두 참일 때, 보기에서 반드시 참인 것을 모두 고르면?

㉠ $p \to r$	㉡ $r \to p$	㉢ $p \to \sim r$
㉣ $q \to \sim r$	㉤ $r \to \sim p$	

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢, ㉤ ③ ㉠, ㉣

④ ㉡, ㉢, ㉣ ⑤ ㉢, ㉣, ㉤

해설

$p \to q$ 가 참이고, 또한 $r \to \sim q$ 가 참이므로 그 대우명제인 $q \to \sim r$ 가 참.∴ $p \to q \to \sim r$

즉,$p \to \sim r$,$q \to \sim r$ 가 참이고 또한 $p \to \sim r$ 이 참이므로 그 대우인 $r \to \sim p$ 도 참이다.

따라서 ㉢, ㉣, ㉤이 참이다.

24. 어떤 건물에 불이 나서 경찰이 조사하였더니 누군가 방화한 것이고, '방화범은 반드시 건물 안에 있었다.'라는 사실을 알아내었으며 불이 난 시간에 건물 안에 있었던 용의자를 잡아 범인으로 단정하였다. 이러한 단정은 반드시 옳은가? 또, 그 근거를 논리적으로 옳게 설명한 것은?

① 그렇다. 명제 $p \rightarrow q$가 참이면 $\sim q \rightarrow p$도 반드시 참이다.

② 그렇다. 명제 $p \rightarrow q$가 참이라 하여 $q \rightarrow p$가 반드시 참이 되는 것은 아니다.

③ 아니다. 명제 $p \rightarrow q$가 참이면 $\sim q \rightarrow \sim p$도 반드시 참이다.

④ 아니다. 명제 $p \rightarrow q$가 참이라 하여 $q \rightarrow p$가 반드시 참이 되는 것은 아니다.

⑤ 아니다. 명제 $p \rightarrow q$가 참이면 $\sim q \rightarrow \sim p$는 반드시 참이다.

해설

'방화범은 반드시 건물 안에 있었다.'가 참이라고 해서 '건물 안에 있었던 사람이 방화범이다.'도 참이라고 할 수는 없다. 즉, 명제 $p \rightarrow q$가 참이라 하여 그 역인 $q \rightarrow p$가 반드시 참인 것은 아니다.

25. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, q 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 충분조건, r 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 s 이기 위한 어떤 조건인지 써라.

▶ 답 : ______ 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$
q 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow q$
q 는 s 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow s$
r 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow r$
$s \Rightarrow r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 에서 $s \Rightarrow p$
그러나 $p \Rightarrow s$ 인지는 알 수 없다.
$\therefore$ p는 s이기 위한 필요조건이다.

26. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$일 때, $\dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{a}{c}$의 최솟값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 3

해설

산술-기하평균 부등식에 의해

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{a} \times \frac{c}{b} \times \frac{a}{c}} = 3$$

$$\therefore\ \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3$$

27. 실수 x, y가 $x^2+y^2=5$를 만족할 때, $x+2y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$(1^2+2^2)(x^2+y^2) \geq (x+2y)^2$

$x^2+y^2=5$이므로

$25 \geq (x+2y)^2$

$\therefore\ -5 \leq x+2y \leq 5$

$\therefore\ M=5,\ m=-5$

$\therefore\ M-m=5-(-5)=10$

28. 다음 중 무한집합인 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $A = \{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ \cdots,\ 100\}$

② $B = \{x \mid x$는 1 보다 작은 분수$\}$

③ $C = \{x \mid x$는 3 의 배수인 짝수$\}$

④ $D = \{x \mid x$는 $2 \times n$, n은 10 보다 작은 자연수$\}$

⑤ $E = \left\{x \,\middle|\, x\text{는 } \dfrac{100}{x}\text{을 자연수로 만드는 자연수}\right\}$

해설

① $A = \{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ \cdots,\ 100\}$이므로 유한집합이다.

② $B = \{x \mid x$는 1 보다 작은 분수$\} = \left\{\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \cdots\right\}$ 이므로 무한집합이다.

③ $C = \{x \mid x$는 3 의 배수인 짝수$\} = \{6,\ 12,\ \cdots\}$ 이므로 무한집합이다.

④ $D = \{x \mid x$는 $2 \times n$, n은 10 보다 작은 자연수$\} = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \cdots,\ 18\}$ 이므로 유한집합이다.

⑤ $E = \left\{x \,\middle|\, x\text{는 } \dfrac{100}{x}\text{을 자연수로 만드는 자연수}\right\} = \{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 20,\ 25,\ 50,\ 100\}$ 이므로 유한집합이다.

29. 두 집합 $A=\{x \mid x$는 15 이하의 소수$\}$, $B=\{x \mid x$는 5 미만의 소수$\}$ 에 대하여 $B \subset X \subset A$ 를 만족하는 X 의 개수를 모두 구하여라.

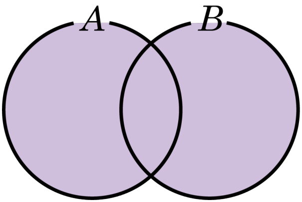
▶ **답 :** ______개

▷ **정답 :** 16 개

해설

$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13\}$, $B=\{2,\ 3\}$
집합 X 는 원소 2 와 3 을 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로 부분집합의 개수는
$2^{6-2}=2^4=16$ (개)

30. 두 집합 $A = \{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 24\}$, $B = \{4 \times x \mid x \in A\}$ 에 대하여 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합의 원소의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 96

해설

$B = \{4 \times x \mid x \in A\}$ 는 집합 A 의 원소를 x 에 대입한 수들의 집합이다.
원소나열법으로 고쳐보면,
$B = \{4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 96\}$ 이 된다.
색칠한 부분의 원소는 $\{1, 2, 4, 8, 16, 24, 32, 64, 96\}$ 이다.
이때, 가장 큰 원소는 96 이다.

31. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A-B=\varnothing$ 일 때, $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ 이라면 집합 B 로 알맞지 않은 것은?

① $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 8\}$

② $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 8\}$

③ $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8\}$

④ $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8\}$

⑤ $B=\{1\ ,2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 8,9\}$

해설

$A-B=\varnothing$ 이면 집합 A 의 모든 원소는 집합 B에 속한다.

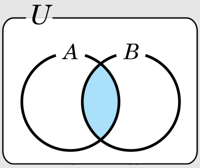
32. 전체집합 U 의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 중에서 옳지 않은 것은?

① $A-B^c=A\cap B$　　② $A\cup(A\cap B)=A\cap(A\cup B)$

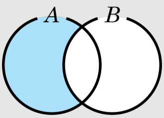
③ $A^c\cap(A\cup B)=A-B$　　④ $(A^c\cap B)-A=B\cap A^c$

⑤ $(A-B)^c=A^c\cup B$

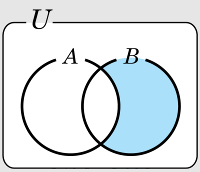
해설

①


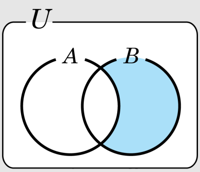
$A-B^c$

②


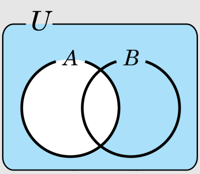
$A\cup(A\cap B)$

③


$A^c\cap(A\cup B)=B-A$

④


$(A^c\cap B)-A$

⑤


$(A-B)^c$

33. 학생 수가 40명인 어느 학급에서 두 종류의 치약 A, B를 사용해 본 학생 수를 조사했더니 각각 20명, 30명이었다. 두 종류의 치약을 모두 사용해 본 학생 수의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하면?

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

해설

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$=50-n(A\cap B)$$
$$n(A\cap B)=50-n(A\cup B)\cdots ㉠$$

ⅰ) $n(A\cap B)$가 최대인 경우는 치약 A를 사용한 학생이 모두 치약 B를 사용한 경우이다 $\Rightarrow M=20$

ⅱ) $n(A\cap B)$가 최소인 경우는 ㉠에서 $n(A\cup B)$가 최대인 경우이다.

$\Rightarrow n(A\cup B)=40, n(A\cap B)=10=m$

$\therefore m+M=10+20=30$

34. 전체집합 U의 임의의 부분집합을 A라 하고 조건 p, q를 만족시키는 집합을 P, Q라 하자. $(A \cap P) \cup (A^c \cap Q) = (A \cap P) \cup Q$가 성립할 때 다음 중 참인 명제는?

① $\sim q \rightarrow p$　② $p \rightarrow q$　③ $p \leftrightarrow q$

④ $q \rightarrow p$　⑤ $q \rightarrow \sim p$

해설

집합 A가 전체집합 U의 임의의 부분집합이므로 $A = U$라 놓으면, 좌변 : $(U \cap P) \cup (\varnothing \cap Q) = P \cup \varnothing = P$

우변 : $(U \cap P) \cup Q = P \cup Q$ $\therefore$ $P = P \cup Q$ 이므로 $Q \subset P$

$\therefore$ $q \rightarrow p$는 참이다.

35. 다음은 '자연수 n 에 대하여, n^2 이 3 의 배수이면 n 도 3 의 배수이다.' 라는 명제를 대우를 이용하여 증명하는 과정이다. (가), (나), (다), (라), (마) 에 들어갈 알맞은 식 또는 수끼리 짝지은 것을 고르면?

> 대우는 '자연수 n 에 대하여, n 이 3 의 배수가 아니면 n^2 도 3 의 배수가 아니다.' 이다. 3 의 배수가 아닌 자연수 n 은 3 으로 나누면 나머지가 1 또는 2 이므로
>
> $n=($ 가 $)$ 또는 $n=($ 나 $)$ (단, k는 음이 아닌 정수)
>
> 로 가정할 수 있다.
>
> (ⅰ) $n=($ 가 $)$ 일 때
>
> $n^2=3($ 다 $)+1$
>
> (ⅱ) $n=($ 나 $)$ 일 때
>
> $n^2=3($ 라 $)+1$
>
> 이 되어 n^2 은 3 으로 나누면 나머지가 (마) 인 자연수가 된다.
>
> (ⅰ), (ⅱ) 에 의하여 n 이 3 의 배수가 아니면 n^2 도 3 의 배수가 아니다. 그러므로 주어진 명제는 참인 명제이다.

① $3k-2,\ 3k-1,\ (3k^2+2k),\ (3k^2+4k+1),\ 2$

② $3k-1,\ 3k-2,\ (3k^2-4k+1),\ (3k^2-2k),\ 1$

③ $3k+2,\ 3k+1,\ (3k^2+2k),\ (3k^2+4k+1),\ 2$

④ $3k-2,\ 3k-1,\ (3k^2-4k+1),\ (3k^2-2k),\ 1$

⑤ $3k+1,\ 3k+2,\ (3k^2+2k),\ (3k^2+4k+1),\ 1$

해설

3 의 배수가 아닌 수들은 3 으로 나눠서 1 또는 2 가 남아야 하므로 $3k+1$ 또는 $3k+2$ 이어야 한다.
제곱을 하여 계산하면 (다), (라)는 각각 $(3k^2+2k)$, $(3k^2+4k+1)$ 가 되고, 나머지가 1 인 자연수가 된다.
따라서 주어진 명제는 참인 명제이다.

36. 다음 중 명제 $|\alpha-\beta|=|\alpha+\beta|$ 의 필요조건이기는 하지만 충분조건은 아닌 것을 찾으면? (단, α, β 는 실수)

① $\alpha\beta<1$ ② $\alpha\beta=-1$ ③ $\alpha\beta=0$

④ $\alpha^2+\beta^2=0$ ⑤ $\alpha^2-\beta^2=0$

해설

$|\alpha-\beta| = |\alpha+\beta| \rightarrow (\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 \rightarrow -2\alpha\beta = 2\alpha\beta$
$\rightarrow \alpha\beta=0$
0 은 1 보다 작으므로 $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha\beta<1$ 라고 말할 수 있다.
따라서, $\alpha\beta<1$ 는 $\alpha\beta=0$ 의 필요조건이다.

37. 전체 집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A-B)^c = B-A$ 가 성립할 필요충분조건을 구하면?

① $A \cap B = \varnothing$ ② $A \cup B = U$ ③ $A \subset B^c$

④ $A^c \cup B = U$ ⑤ $A = B^c$

해설

$(A-B)^c = (A \cap B^c)^c = A^c \cup B$, $B-A = A^c \cap B$ $A^c \cup B = A^c \cap B$

에서 $A^c = B$

즉, $A = B^c$

38. 두 조건 $p : a-4 < x \leq a+5$, $q : |x| \leq 1$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 정수 a 의 개수는?

① 6개 ② 7개 ③ 8개 ④ 9개 ⑤ 10개

해설

p 가 q 이기 위한 필요조건이므로 $p \leftarrow q$ 가 참이 되어야 한다. p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면 $Q \subset P$ 이므로 q : $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $a+5 \geq 1$, $a-4 < -1$

따라서 $a \geq -4$, $a < 3$ 이다.

즉, $-4 \leq a < 3$ 이므로 정수 a 의 개수는 7 개이다.

39. $x > 2$ 일 때, $x + \dfrac{1}{x-2}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 4

해설

$x > 2$에서 $x - 2 > 0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$x + \frac{1}{x-2} = x - 2 + \frac{1}{x-2} + 2$$

$$\geq 2\sqrt{(x-2) \times \frac{1}{x-2}} + 2$$

$$= 2 + 2 = 4$$

(단, 등호는 $x = 3$ 일 때 성립)

40. 좌표평면 위의 점 A(1, 2)를 지나는 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ (a>0,\ b>0)$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 B, C라 할 때, △OBC의 최소 넓이는?

① 3　　② 3.5　　③ 4　　④ 4.5　　⑤ 5

해설

B$(a,\ 0)$, C$(0,\ b)$이므로

△OBC의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}ab\cdots\cdots ㉠$$

직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$은 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}}=2\sqrt{\frac{1}{S}}$$

$\therefore\ S\geq 4$

41. 자연수 n에 대하여 집합 $A_n = \left\{x \middle| < x > -x = \frac{1}{2n}\right\}$으로 정할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $< x >$는 x 보다 작지 않은 최소 정수이다.)

㉠ 자연수 $i,\ j$에 대하여 $(i \neq j)$, $A_i \cap A_j = \phi$
㉡ $\frac{1994}{4} \in A_2$
㉢ $A_2 \subset A_1$
㉣ $-\frac{7}{6} \in A_3$

① ㉠ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣
④ ㉡, ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

$< x >$ 를 k 라 하면 $k-1 < x \le k$

$< x > -x = \frac{1}{2n} \leftrightarrow x =< x > -\frac{1}{2n}$

$A_n = \left\{k - \frac{1}{2n} | k\text{는 정수}\right\}$

$A_1 = \left\{\cdots - \frac{5}{2},\ -\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \cdots\right\}$

$A_2 = \left\{\cdots - \frac{9}{4},\ -\frac{5}{4},\ -\frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{7}{4},\ \cdots\right\}$

$A_3 = \left\{\cdots - \frac{13}{6},\ -\frac{7}{6},\ -\frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\ \frac{11}{6},\ \cdots\right\}$

따라서,
자연수$i,\ j$에 대하여 $\Rightarrow A_i \cap A_j = \phi$

$\frac{1994}{4} = 498 + \frac{2}{4} \notin A_2$,

$-\frac{7}{6} \in A_3$

42. 주사위 A, B 두 개를 던져서 나올 수 있는 두 자리 자연수의 집합을 A 라 할 때, $n(A)$ 를 구하여라.

① 6 ② 12 ③ 24 ④ 30 ⑤ 36

해설

$A = \{11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 21,\ 22,\ 23,\ 24,\ 25,\ 26,\ 31,\ 32,\ 33$
$\cdots\ 64,\ 65,\ 66\}$
$n(A) = 36$

43. 자연수 N 에 대해 $A_N = \{x|x$는 N보다 작은 소수$\}$ 로 정의한다. A_N 의 진부분집합의 개수가 15 개일 때, N 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 19

해설

A_N 의 진부분집합의 개수 : 15 개

$\rightarrow A_N$ 의 부분집합의 개수 : 16 개

$\rightarrow 2^{n(A_n)} = 16, n(A_n) = 4$,

A_N 은 N 보다 작은 소수를 원소로 가지므로 원소의 개수가 4 개가 되려면 $A_N = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$,

따라서 N 의 최솟값은 8 , 최댓값은 11 이므로 N 의 최댓값과 최솟값의 합은 19

44. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합 중에서 소수를 n개 포함하는 집합의 개수를 x_n이라 할 때, $x_1 + x_2 + x_3$의 값을 구하면?

① 26 ② 27 ③ 28 ④ 29 ⑤ 30

해설

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 소수는 $2, 3, 5$

소수 1개 포함하는 부분집합 : $2^2 \times 3 = 12$

소수 2개 포함하는 부분집합 : $2^2 \times 3 = 12$

소수 3개 포함하는 부분집합 : $2^2 = 4$

$\therefore\ x_1 + x_2 + x_3 = 28$

해설

구하는 것은 적어도 소수 1개를 원소로 하는 부분집합의 개수와 같다.

$\therefore 2^5 - 2^2 = 28$

45. 집합 $A = \{x | x$는 m보다 작거나 같은 자연수$\}$ 의 부분집합 중 원소가 2 개 이상인 부분집합을 차례로 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_N$ 이라 할 때, 다음 조건을 만족하는 m 값을 구하여라. (단, $S(A)$ 는 집합 A 의 원소의 총합이다.)

$$S(A_1) + S(A_2) + S(A_3) + \cdots + S(A_N) = 225$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$A = \{x | x$ 는 m 보다 작거나 같은 자연수$\} = \{1, 2, 3, \cdots, m\}$

집합 A 의 모든 부분 집합에 각 원소가 포함되는 횟수는 2^{m-1} (번) 이고, 원소가 1 개 이하인 부분집합에 각 원소가 포함되는 횟수는 1 번이므로,

$S(A_1) + S(A_2) + S(A_3) + \cdots + S(A_N) = (2^{m-1} - 1) \times \left(\dfrac{m(m+1)}{2}\right) = 225$

$225 = 3^2 \times 5^2$ 이고, $2^{m-1} - 1 \leq 255$ 인 범위에서 $2^{m-1} - 1$ 은 $5^2 = 25$ 의 배수가 될 수 없으므로,

$\dfrac{m(m+1)}{2}$ 은 5 의 배수가 되어야 한다.

$\dfrac{m(m+1)}{2}$ 이 5 의 배수가 되도록 작은 수부터 차례로 넣어보면

$m = 5$

46. 전체집합 $U=\{1,2,3,4\}$ 의 두 부분집합이 $A,\ B$ 일 때, 다음 각 조건을 만족하는 집합의 순서쌍 (A,B) 의 개수를 구하여라.

(1) $A\cap B=\varnothing$ (2) $A\cup B=U$

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 16 개

해설

$A\cap B=\varnothing$ 이고 $A\cup B=U$ 이면 $n(A)+n(B)=n(U)=4$

$n(A)=0,\ n(B)=4$ 인 경우 : 1 개

$n(A)=1,\ n(B)=3$ 인 경우 : 4 개

$n(A)=2,\ n(B)=2$ 인 경우 : 6 개

$n(A)=3,\ n(B)=1$ 인 경우 : 4 개

$n(A)=4,\ n(B)=0$ 인 경우 : 1 개

따라서 순서쌍 (A,B) 의 개수는 $1+4+6+4+1=16$ (개)

47. 두 집합 $A=\left\{1, a^2, 8\right\}$, $B=\{2, a+2, 3a\}$에서 $A-B=\{1,\ 8\}$일 때 a의 값은? (단, a는 자연수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$A=\left\{1, a^2, 8\right\}$, $B=\{2, a+2, 3a\}$, $A-B=\{1,\ 8\}$ 이므로
$a^2=2$ 또는 $a^2=a+2$ 또는 $a^2=3a$ 이다.
a는 자연수이므로 $a^2=3a$ 에서 $a=3$ 과 $a^2=a+2$에서 $a=2$ 이다.

48. 집합 A, B 에 대한 연산 $\triangle$ 를 $A \triangle B = (A-B) \cup (B-A)$ 라고 정의할 때, 임의의 집합 A, B, C 에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$

② $A \triangle A \triangle A \triangle \cdots\cdots \triangle A \neq \phi$

③ $A^c \triangle B^c = A \triangle B$

④ $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

⑤ $A \triangle (B \cap C) = (A \triangle B) \cap (A \triangle C)$

해설

① 벤 다이어그램을 그려 보면 성립함을 알 수 있다.

② $A \triangle A = (A \cup A) - (A \cap A) = A - A = \phi$

$(A \triangle A) \triangle A = \phi \triangle A = (\phi \cup A) - (\phi \cap A) = A$ $(A \triangle A \triangle A) \triangle A = A \triangle A = \phi \cdots\cdots$

$$\underbrace{A \triangle A \triangle A \triangle \cdots\cdots \triangle A}_{n\text{개}}$$

에서 n 이 홀수이면 A , 짝수이면 ϕ 임을 알 수 있다.

③ $A^c \triangle B^c = (A^c \cup B^c) - (A^c \cap B^c) = (A \cap B)^c \cap (A \cup B) = (A \cup B) - (A \cap B) = A \triangle B$

④ 벤 다이어그램을 그려 보면 성립함을 알 수 있다.

⑤ 벤 다이어그램을 그려 보면 성립하지 않음을 알 수 있다.

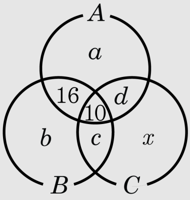
49. 60 명의 학생이 세 클럽 중 적어도 한 클럽에 속해 있다. 그 학생의 집합을 각각 A, B, C 라 할 때. $n(A)=42$, $n(B)=36$, $n(C)=27$, $n(A\cap B\cap C)=10$, $n(A\cap B)=26$ 일 때, C 에만 속하는 학생수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 명

▷ 정답 : 8 명

해설

다음 벤다이어그램에서 구하는 학생수는 x 이다.



$n(A\cup B\cup C)=60$ 이므로 $a+b+c+d+x=34\cdots$ ㉠

$a+d=16, b+c=10$ 이므로 $a+b+c+d=26\cdots$ ㉡

㉠ - ㉡ : $x=8$

50. 실수 $a,\ b,\ c$ 가 $a^2+b^2+c^2=1$ 을 만족한다. $ab+bc+ca$ 의 최대값, 최소값을 각각 $M,\ m$ 이라 할 때, $M+m$ 의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ -1 ④ 1 ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$a,\ b,\ c$ 가 실수이므로 $(a+b+c)^2 \geq 0$

$\therefore a^2+b^2+c^2 \geq -2(ab+bc+ca) \cdots$ ㉠

또한 $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$$-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) \leq ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$$

$a^2+b^2+c^2=1$ 이므로

$$-\frac{1}{2} \leq ab+bc+ca \leq 1$$

$$\therefore M=1,\ m=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore M+m=\frac{1}{2}$$