

1. 다음 중 집합이 아닌 것은?

- ① 5 보다 크고 6 보다 작은 자연수의 모임
- ② 몸무게가 60kg 이상인 사람들의 모임
- ③ 40 에 가까운 수의 모임
- ④ 우리 반에서 키가 가장 작은 학생의 모임
- ⑤ 반올림하여 50 이 되는 자연수들의 모임

해설

'가까운' 은 그 대상이 분명하지 않으므로 집합이 아니다.

2. 4의 배수의 집합을 A 라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $3 \in A$

② $4 \notin A$

③ $8 \in A$

④ $10 \in A$

⑤ $12 \notin A$

해설

집합 A 를 원소나열법으로 나타내면 $A = \{4, 8, 12, \dots\}$ 이다.
따라서 $8 \in A$

3. 다음 중 옳게 연결된 것은?

- ① $\{x \mid x \text{는 홀수}\} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$
- ② $\{x \mid x \text{는 짝수}\} = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$
- ③ $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 5, 10\}$
- ④ $\{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 배수}\} = \{6, 12, 18, \dots\}$
- ⑤ $\{x \mid x \text{는 } 5 \text{이하의 자연수}\} = \{1, 2, 3, 4\}$

해설

- ③ $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 5, 10\}$ 이다.

4. 다음 중 부분집합의 개수가 다른 집합은?

① $\{0, 2, 4\}$

② $\{\neg, \sqsubset, 2\}$

③ $\{\emptyset, a, e\}$

④ $\{a, b, c, d\}$

⑤ $\{3, 6, z\}$

해설

① $2^3 = 8$ (개)

② $2^3 = 8$ (개)

③ $2^3 = 8$ (개)

④ $2^4 = 16$ (개)

⑤ $2^3 = 8$ (개)

5. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 에 대하여 원소 3, 6, 12 를 포함하는 부분 집합의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 4 개 ⑤ 8 개

해설

집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 에서 원소 3, 6, 12 를 포함한 부분집합의 개수는 원소 3, 6, 12 를 뺀 $\{1, 2, 4\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로 $2 \times 2 \times 2 = 8(\text{개})$ 이다.

6. 다음에서 두 집합 A, B 가 서로소인 것을 고르면?

① $A = \{1, 2, 3\}, B = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{보다 작은 소수}\}$

② $A = \{x \mid x \geq 1 \text{인 실수}\}, B = \{x \mid x \leq 1 \text{인 실수}\}$

③ $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 4, 6, 8\}$

④ $A = \{3, 4, 5\}, B = \{x \mid x \text{는 } -1 < x \leq 3 \text{인 정수}\}$

⑤ $A = \{x \mid x = 2n + 1, n \text{은 자연수}\},$
 $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

해설

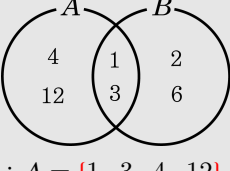
$$A = \{x \mid x = 2n + 1, n \text{은 자연수}\}$$
$$= \{3, 5, 7, 9, \dots\}$$

7. 두 집합 A, B 에 대하여 $B = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}$ 이고, $A \cup B = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$, $A \cap B = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{이하의 홀수}\}$ 일 때, 집합 A 의 원소의 합은?

- ① 4
- ② 5
- ③ 13
- ④ 16
- ⑤ 20

해설

$B = \{1, 2, 3, 6\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $A \cap B = \{1, 3\}$



$\therefore A = \{1, 3, 4, 12\}$

따라서 집합 A 의 원소의 합은 $1 + 3 + 4 + 12 = 20$

8. 두 집합 A, B 에 대하여 옳지 않은 것을 모두 고른 것은?

$\neg (A \cap B) \subset (A \cup B)$	$\supset \emptyset \cap A = A$
$\supset B \subset (A \cap B)$	$\supset B \cup \emptyset = \emptyset$

- ① $\supset, \supset$
- ② $\supset, \supset$
- ③ $\neg, \supset$
- ④ $\supset, \supset, \supset$
- ⑤ $\neg, \supset, \supset$

해설

$\supset A \cap \emptyset = \emptyset$
 $\supset B \subset (A \cup B)$
 $\supset B \cup \emptyset = B$

9. 두 집합 $A = \{3, a-2, 5\}$, $B = \{3, 4, a\}$ 에 대하여 $B-A = \{6\}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 6$

해설

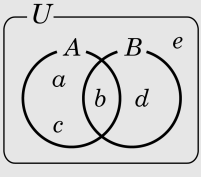
$B-A = \{6\}$ 에서
6은 집합 B 의 원소이어야 하므로 $a = 6$ 이다.

10. 전체집합 $U = \{a, b, c, d, e\}$ 의 두 부분집합 $A = \{a, b, c\}, B = \{b, d\}$ 에 대하여 $A^c \cap B^c$ 은?

- ① $\{a\}$ ② $\{a, c\}$ ③ $\{b\}$ ④ $\{e\}$ ⑤ $\{b, e\}$

해설

$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = (\{a, b, c, d\})^c = \{e\}$ 이다.



11. $U = \{2, 4, 5, 8, 9, 10\}$ 에 대하여 $A = \{4, 5, 8\}, B = \{2, 4, 8, 9\}$ 일 때,

$A^c - B^c$ 은?

① $\{2\}$

② $\{2, 4\}$

③ $\{2, 9\}$

④ $\{2, 4, 8\}$

⑤ $\{2, 4, 9\}$

해설

$A^c - B^c = B - A = \{2, 4, 8, 9\} - \{4, 5, 8\} = \{2, 9\}$ 이다.

12. 세 집합 $A = \{2, 4, 5, 6, 8\}$, $B = \{1, 3, 4, 6, 7\}$, $C = \{4, 7, 8, 9\}$ 에 대하여

$(A - B) \cap C$ 는?

① $\{3\}$

② $\{8\}$

③ $\{3, 8\}$

④ $\{3, 8, 9\}$

⑤ $\{3, 5, 7\}$

해설

$(A - B) \cap C = \{2, 5, 8\} \cap \{4, 7, 8, 9\} = \{8\}$ 이다.

13. $a > 0$ 일 때, $A = 1 + \frac{a}{2}$, $B = \sqrt{1+a}$ 의 대소를 바르게 비교한 것은?

- ① $A > B$ ② $A < B$ ③ $A \geq B$
④ $A \leq B$ ⑤ $A = B$

해설

$a > 0$ 이므로 $1 + \frac{a}{2} > 0$, $\sqrt{1+a} > 0$

제곱을 하여 비교하면

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= \left(1 + \frac{a}{2}\right)^2 - (\sqrt{1+a})^2 \\ &= 1 + a + \frac{a^2}{4} - 1 - a \\ &= \frac{a^2}{4} > 0 \end{aligned}$$

따라서 $A^2 > B^2$ 이므로 $A > B$ 이다.

14. 양수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2 = 1$ 을 만족할 때, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 의 최솟값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$a^2 > 0, b^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab$$

(단, 등호는 $a^2 = b^2$ 일 때 성립)

그런데 $a^2 + b^2 = 1$ 이므로 $1 \geq 2ab$

$$\therefore ab \leq \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{a^2} > 0, \frac{1}{b^2} > 0$ 이므로 산술평균 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2}}$$

$$\frac{2}{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

(단, 등호는 $a^2 = b^2$ 일 때 성립)

따라서 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 의 최솟값은 4이다.

15. 양수 x 에 대하여 $8x^2 + \frac{2}{x}$ 의 최솟값은?

① $2\sqrt{3}$

② $2\sqrt[3]{3}$

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$x > 0$ 이므로

$$8x^2 + \frac{2}{x} = 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{8x^2 \times \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}} = 3\sqrt[3]{8} = 6$$

(단, 등호는 $x = \frac{1}{2}$ 일 때 성립)

16. 두 집합 $A = \{21, 24, 27, 30\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 50 \text{ 이하의 } 5 \text{의 배수}\}$ 에 대하여 $n(A) + n(B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$A = \{21, 24, 27, 30\}$, $B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$ 이므로
 $n(A) = 4$, $n(B) = 10$ 이다.
 $\therefore 4 + 10 = 14$

17. 집합 $A = \{x|x \text{ 는 } 15 \text{ 이하의 소수}\}$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 골라라.

보기

㉠ $2 \notin A$

㉡ $1 \in A$

㉢ $\emptyset \subset A$

㉣ $\{5, 7\} \in A$

㉤ $\{3, 5, 7, 9\} \notin A$

㉥ $n(A) = 7$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

▷ 정답 : ㉤

해설

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ 이므로

㉢ $\emptyset \subset A$,

㉤ $\{3, 5, 7, 9\} \notin A$ 가 옳다.

18. 다음 중에서 옳은 것을 모두 골라라.

- ㉠

$\{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 약수}\} \subset \{1, 2, 3\}$
- ㉡

$\{a, b\} \in \{a, b, c\}$
- ㉢

$0 \in \emptyset$
- ㉤

$\emptyset \in \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 배수}\}$
- ㉥

$\emptyset \subset \{1\}$
- ㉦

$\emptyset \subset \emptyset$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉥

▷ 정답 : ㉦

해설

- ㉡ $\{a, b\} \in \{a, b, c\}$ 에서 집합과 집합 사이의 관계는 $\subset$ 를 써야 한다.
- ㉢ $0 \in \emptyset$ 에서는 $\emptyset \subset \{0\}$ 이어야 한다.
- ㉤ $\emptyset \in \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 배수}\}$ 에서는 $\subset$ 를 써야한다.
- ㉦ 공집합($\emptyset$)은 모든 집합의 부분집합이다.

19. 집합 $A = \{3, 5, 7\}$ 의 부분집합을 모두 고르면? (정답 2개)

- ① $\{\emptyset\}$

② $\{3, 4, 5\}$

③ $\{3\}$
- ④ $\{\{7\}\}$

⑤ $\{3, 5, 7\}$

해설

집합 A 의 부분집합 : $\emptyset, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{5, 7\}, \{3, 5, 7\}$

20. 다음 중에서 옳은 것의 기호를 찾아서, 각 기호에 주어진 글자를 이용하여 단어를 만들어라.

- ㉠ {1, 2} 는 {1, 2, 5} 의 진부분집합이다.
- ㉡ {m, n} 은 {m, n} 의 진부분집합이다.
- ㉢ {ㄱ, ㄴ, ㄷ} 의 진부분집합은 8개이다.
- ㉤ $A = \{7, 8\}$ 일때, $\subset A$ 이다.
- ㉥ $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$ 이다.
- ㉦ $\emptyset$ 은 $\{e, f\}$ 의 진부분집합이다.

㉠	㉡	㉢	㉤	㉥	㉦
사	축	호	랑	후	해

▶ 답 :

▷ 정답 : 사랑해

해설

- ㉠ {1, 2} 는 {1, 2, 5} 의 진부분집합이다.
- ㉡ {m, n} 은 {m, n} 의 진부분집합이 아니다.
- ㉢ {ㄱ, ㄴ, ㄷ} 의 진부분집합은 부분집합 중 자기 자신을 제외한 부분집합이므로 7개이다.
- ㉤ 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\emptyset \subset A$ 이다.
- ㉥ $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$ 이다.
- ㉦ $\emptyset$ 은 $\{e, f\}$ 의 진부분집합이다.

21. 집합 $A = \{2, 4, 6, \dots, n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 2, 4, n 을 모두 포함하는 부분집합의 개수가 16 개일 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

집합 A 의 원소의 개수를 a 개라 하면 원소 2, 4, n 을 모두 포함하는 부분집합의 개수는 2^{a-3} 개이다.

$$2^{a-3} = 16 = 2^4$$

$$a - 3 = 4 \text{ 이므로 } a = 7$$

따라서 집합 A 의 원소의 개수가 7 개이므로 n 의 값은 14이다.

22. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x \mid x \text{는 짝수}\}$,
 $B = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{의 배수}\}$ 에 대하여 $(A \cup B)^c \subset X$, $(A - B)^c \cap X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{5, 10\}$ 이고 $(A \cup B)^c = \{1, 3, 7, 9\}$, $(A - B)^c = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$ 이다.
따라서 $(A \cup B)^c \subset X \subset (A - B)^c$ 이므로 집합 X 의 개수는 $2 \times 2 = 4$ (개) 이다.

23. 자연수 k 의 배수를 원소로 하는 집합을 A_k 라 할때, $(A_4 \cap A_6) \supset A_k$ 인 k 의 최솟값을 a 라 하고 $(A_8 \cup A_{12}) \subset A_k$ 인 k 의 최댓값을 b 라 할 때 $a+b$ 의 값은 ?

- ① 16 ② 20 ③ 10 ④ 15 ⑤ 27

해설

$(A_4 \cap A_6) \supset A_k$ 인 k 는 4와 6의 공배수이므로 k 의 최솟값은 4와 6의 최소공배수 12이다. $(A_8 \cup A_{12}) \subset A_k$ 인 k 는 8과 12의 공약수이므로 k 의 최댓값은 8과 12의 최대공약수 4이다.
 $\therefore$ 최솟값 a 는 12이고 최댓값 b 는 4이므로 $a+b = 12+4 = 16$

24. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 연산 $\star$ 을 $A \star B = (A \cup B)^c \cup (A \cap B)$ 로 정의할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $A \star \emptyset = A$

② $A \star U = A^c$

③ $A \star A^c = \emptyset$

④ $A \star B \neq B \star A$

⑤ $A \star B^c \neq A^c \star B$

해설

① $A \star \emptyset = (A \cup \emptyset)^c \cup (A \cap \emptyset)$
 $= A^c \cup \emptyset = A^c$

② $A \star U = (A \cup U)^c \cup (A \cap U)$
 $= U^c \cup A$
 $= \emptyset \cup A = A$

③ $A \star A^c = (A \cup A^c)^c \cup (A \cap A^c)$
 $= U^c \cup \emptyset = \emptyset$

④ $A \star B = (A \cup B)^c \cup (A \cap B)$
 $= (B \cup A)^c \cup (B \cap A)$
 $= B \star A$

⑤ $A \star B^c = (A \cup B^c)^c \cup (A \cap B^c)$
 $= (A^c \cap B) \cup (A^c \cup B)^c$
 $= (A^c \cup B)^c \cup (A^c \cap B) = A^c \star B$

25. 명제 ‘모든 학생들은 수학을 좋아한다.’의 부정으로 옳은 것은?

- ① 모든 학생들은 수학을 좋아하지 않는다.
- ② 모든 학생들은 영어를 좋아한다.
- ③ 어떤 학생들은 수학을 좋아한다.
- ④ 어떤 학생들은 수학을 좋아하지 않는다.
- ⑤ 어떤 학생들은 영어를 좋아한다.

해설

‘모든’의 부정은 ‘어떤’이므로 주어진 명제의 부정은 ‘어떤 학생들은 수학을 좋아하지 않는다.’이다.

26. 다음 <보기>의 조건 ‘ $p(x)$ ’를 만족하는 진리집합이 바르게 연결된 것은? (단, 전체집합은 실수의 집합 R)

보기

- (1) $p(x) : x$ 는 12의 양의 약수이다.
 $P = \{1, 2, 3, 6, 12\}$
(2) $p(x) : x^2 + 1 = 0$
 $P = \emptyset$
(3) $p(x) : x^2 - 5x - 4 = 0$
 $P = \{1, 4\}$
(4) $p(x) : x^2 + 4x + 5 > 0$
 $P = R$

- ① (1), (2) ② (2), (3) ③ (3), (4)
④ (2), (4) ⑤ (1), (3)

해설

- (1) $p = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
(2) $x^2 \geq 0$ 이므로 $x^2 + 1 \neq 0 \therefore P = \emptyset$
(3) $P = \left\{ \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2} \right\}$
(4) 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 > 0$ 이므로 $P = R$ 이다.

27. 다음 명제 중 참인 것은?

- ① p 가 소수이면 $\sqrt{p}$ 는 무리수이다.
- ② $x < y$ 이면 $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ 이다. (단, $x \neq 0, y \neq 0$)
- ③ $\triangle ABC$ 가 직각삼각형이면 $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$ 이다.
- ④ $a + b$ 가 짝수이면 a, b 는 짝수이다.
- ⑤ 12와 18의 공약수는 9의 약수이다.

해설

- ① 소수 $p = k^2$ 이 될 수 없으므로 $\sqrt{p}$ 는 무리수
- ② 반례 : $x = -1, y = 1$, 즉 두 수의 부호가 다르면 성립하지 않는다.
- ③ 직각삼각형의 빗변이 $\overline{AC}$ 이 아닌 다른 변이 될 수도 있다.
- ④ 반례 : $a = 1, b = 3$
- ⑤ 12와 18의 공약수는 6의 약수이다.

28. 조건 p 를 만족하는 집합을 P 라 하고, 조건 q 를 만족하는 집합을 Q 라 하자. 명제 ‘ p 이면 q 이다.’ 가 거짓일 때, 반례의 집합은?

- ① P ② Q ③ $P - Q$ ④ P^c ⑤ Q^c

해설

만약 ‘ p 이면 q 이다.’ 가 참이라면 P 의 모든 원소는 Q 의 원소이어야 한다. 하지만 ‘ p 이면 q 이다’ 가 거짓이므로 P 의 원소이지만 Q 의 원소가 아닌 것이 반례로 적당하다.

29. 다음 명제 중에서 그 역이 참인 것은? (단, 문자는 실수)

- ① $x = 0$ 이면 $xy = 0$ 이다.
- ② $x \geq 1$ 이면 $x^2 \geq 1$ 이다.
- ③ $x \leq 1$ 이고 $y \leq 1$ 이면 $x + y \leq 2$ 이다.
- ④ $a^2 + b^2 > 0$ 이면 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이다.
- ⑤ $a = b$ 이고 $c = d$ 이면 $a + c = b + d$ 이다.

해설

- 역인 명제는
- ① $xy = 0$ 이면 $x = 0$ (거짓) (반례 : $x = 1, y = 0$)
 - ② $x^2 \geq 1$ 이면 $x \geq 1$ (거짓) (반례 : $x = -1$)
 - ③ $x + y \leq 2$ 이면 $x \leq 1$ 이고 $y \leq 1$ (거짓) (반례 : $x = 2, y = 0$)
 - ④ $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$ (참)
 - ⑤ $a + c = b + d$ 이면 $a = b$ 이고 $c = d$ (거짓) (반례 : $a = -1, b = -2, c = 3, d = 4$)

30. 실수 x 에 대하여 명제 ' $ax^2 + a^2x - 6 \neq 0$ 이면 $x \neq 2$ 이다.'가 참이기 위한 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.

즉, ' $x = 2$ 이면 $ax^2 + a^2x - 6 = 0$ 이다.'가 참이므로

$$4a + 2a^2 - 6 = 0, \quad 2a^2 + 4a - 6 = 0,$$

$$a^2 + 2a - 3 = 0, \quad (a + 3)(a - 1) = 0$$

$$\therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 1$$

따라서 a 의 값의 합은 $-3 + 1 = -2$

31. x, y 가 실수일 때. $|x| + |y| = |x + y|$ 가 되기 위한 필요충분조건을 구하면?

① $xy = 0$

② $xy > 0$

③ $xy \geq 0$

④ $xy < 0$

⑤ $xy \leq 0$

해설

양변을 제곱하면 $x^2 + y^2 + 2|xy| = x^2 + y^2 + 2xy$

$\therefore |xy| = xy$ 가 성립하려면 $xy \geq 0$ 일 때이다.

32. $a > b > 0$ 인 실수 a, b 에 대하여 $\frac{a}{1+a}$ 와 $\frac{b}{1+b}$ 의 대소 관계는?

① $\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$
③ $\frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$
⑤ $\frac{a}{1+a} = \frac{b}{1+b}$

② $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}$
④ $\frac{a}{1+a} \geq \frac{b}{1+b}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{a}{1+a} - \frac{b}{1+b} &= \frac{a+ab-b-ab}{(1+a)(1+b)} \\ &= \frac{a-b}{(1+a)(1+b)} > 0 \\ (\because a > b > 0)\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$$

해설

$$a > b > 0 \text{ 이면 } \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

$$\text{양변에 1을 더하면 } \frac{1+a}{a} < \frac{1+b}{b}$$

$$\therefore \frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$$

33. 실수 x, y 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

- ㉠ $|x| + |y| \geq |x + y|$

㉡ $|x + y| \geq |x - y|$
- ㉢ $|x - y| \geq |x| - |y|$

- ① ㉠
- ② ㉡
- ③ ㉠, ㉡
- ④ ㉠, ㉢
- ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $(|x| + |y|)^2 - |x + y|^2 = 2(|xy| - xy) \geq 0$
 $\therefore |x| + |y| \geq |x + y|$

㉡ (반례) $x = 1, y = -1$ 일 때
 $|1 + (-1)| = 0, |1 - (-1)| = 2$ 이므로
 $|x + y| < |x - y|$

㉢ $|x - y|^2 - (|x| - |y|)^2 = 2(|xy| - xy) \geq 0$
 $\therefore |x - y| \geq |x| - |y|$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢ 이다.

34. 실수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2 \geq -ab$ 임을 증명한 것이다. $[가]$, $[나]$ 에 들어갈 알맞은 부등호로 짝지어진 것은?

$$\begin{aligned} A &= a^2 + b^2, \quad B = -ab \\ A - B &= a^2 + b^2 - (-ab) \\ &= a^2 + b^2 + ab \\ &= a^2 + ab + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2 \\ &= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $A - B \geq 0$ 이므로 $A \geq B$ 이다. 즉, $a^2 + b^2 \geq -ab$ (단 등호는 $a = b = c$ 일 때 성립)

- ① $>, \geq$
- ② $\geq, \geq$
- ③ $>, >$
- ④ $<, \geq$
- ⑤ $\leq, \leq$

해설

$$\begin{aligned} A &= a^2 + b^2, \quad B = -ab \\ A - B &= a^2 + b^2 - (-ab) \\ &= a^2 + b^2 + ab \\ &= a^2 + ab + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2 \\ &= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0 \end{aligned}$$

(a, b 가 실수이므로)
 $\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 \geq 0, \frac{3}{4}b^2 \geq 0$

따라서 $A - B \geq 0$ 이므로 $A \geq B$ 이다.
즉, $a^2 + b^2 \geq -ab$ (단 등호는 $a = b = c$ 일 때 성립)

35. $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이고 $a + b + c = 14$ 일 때, $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c}$ 의 최댓값은?

① 12

② 13

③ 14

④ 15

⑤ 16

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(1^2 + 2^2 + 3^2)(\sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 + \sqrt{c}^2)$
 $\geq (\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2$
 $(\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2$
 $\leq 14(a + b + c) = 14^2$
 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이므로
 $\therefore 0 \leq \sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c} \leq 14$
따라서, 구하는 최댓값은 14이다.

36. 다음 조건을 만족하는 두 집합 A, B 에 대하여 $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

- ㉠ $A = \{2, a, a^2\}, B = \{b, c, 4\}$
- ㉡ $A \subset B, B \subset A$
- ㉢ a, b, c 가 서로 다른 자연수

▶ 답 :

▷ 정답 : 22

해설

$A \subset B, B \subset A$ 이므로 $A = B$
 $4 \in B$ 이므로 $4 \in A$
 $a = 4$ 또는 $a^2 = 4$
(i) $a = 4$ 일 때, $A = \{2, 4, 16\}, B = \{b, c, 4\}$
 $\therefore b = 2, c = 16$ 또는 $b = 16, c = 2$
(ii) $a^2 = 4$ 일 때, $a = 2$ (a 는 자연수)
 $A = \{2, 2^2\} = \{2, 4\}, B = \{b, c, 4\}$
 b 또는 c 가 2 이어야 하므로 a, b, c 가 서로 다른 자연수가 될 수 없다.
 $\therefore a + b + c = 4 + 2 + 16 = 22$

37. $\{a, b, c, d, e\}$ 의 부분집합 중에서 a 또는 d 를 포함하는 부분집합의 개수를 구하면?

- ① 4 개 ② 8 개 ③ 10 개 ④ 12 개 ⑤ 24 개

해설

(i) a 을 포함하는 경우
 $2^{5-1} = 2^4 = 16$ (개)
(ii) d 를 포함하는 경우
 $2^{5-1} = 16$ (개)
(i) a 와 d 를 모두 포함하는 경우
 $2^{5-2} = 8$ (개)
따라서 구하는 부분집합의 개수는
 $16 + 16 - 8 = 24$ (개)이다.

38. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 4 \text{ 의 약수}\}$,
 $B = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{ 이하의 자연수 중 약수가 } 2 \text{ 개인 수}\}$ 에 대하여 $P = \{x \mid x = a + b, a \in A, b \in B\}$,
 $Q = \{x \mid x = a \times b, a \in A, b \in B\}$ 일 때,
 $P \cap Q$ 를 원소나열법으로 나타내여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : {3,4,5,6}

해설

$A = \{x \mid x \text{는 } 4 \text{ 의 약수}\} = \{1, 2, 4\}$
 $B = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{ 이하의 자연수 중 약수가 } 2 \text{ 개인 수}\} = \{2, 3, 5\}$

먼저 집합 P 의 원소를 구해보면 다음과 같다.

$B \backslash A$	1	2	4
2	3	4	6
3	4	5	7
5	6	7	9

$\therefore P = \{3, 4, 5, 6, 7, 9\}$
다음으로 집합 Q 의 원소를 구해보면 다음과 같다.

$B \backslash A$	1	2	4
2	2	4	8
3	3	6	12
5	5	10	20

$\therefore Q = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 20\}$
그러므로 $P \cap Q = \{3, 4, 5, 6\}$

39. 두 집합 $A = \{x|x \text{는 } 20 \text{보다 작은 } 4 \text{의 배수}\}$, $B = \{1, a, 2+a, 8, 8a\}$ 에서 $A \cap B = \{4, 8, 16\}$ 일 때, $A \cup B$ 는?(단, a 는 자연수이다.)

- ① $\{1, 2, 4, 8, 16\}$
- ② $\{1, 2, 4, 8, 12, 16\}$
- ③ $\{1, 2, 4, 8, 12, 16, 20\}$
- ④ $\{1, 2, 4, 8, 12, 16, 32\}$
- ⑤ $\{1, 2, 4, 8, 12, 16, 24, 32\}$

해설

$A = \{4, 8, 12, 16\}$
 $A \cap B = \{4, 8, 16\}$ 이므로 $4 \in B, 8 \in B, 16 \in B$ 이다.
이 때, a 가 자연수라 했으므로, $a < 2+a < 8a$ 이다.
따라서 $8a \neq 4, 8a \neq 8$ 이다.
 $8a = 16 \therefore a = 2$
 $B = \{1, 2, 4, 8, 16\}$
 $\therefore A \cup B = \{1, 2, 4, 8, 12, 16\}$

40. 두 집합 A, B 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $A \cap B \neq B \cap A$

② $A \subset B$ 이면 $A \cup B = A$

③ $A \subset B$ 이면 $A \cap B = B$

④ $n(A \cap B \cap \emptyset) = 0$

⑤ $A \subset (A \cap B) \subset (A \cup B)$

해설

① $A \cap B = B \cap A$

② $A \subset B$ 이면 $A \cup B = B$

③ $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$

⑤ $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$

41. 두 집합 $A = \{1, 2, 4, 5, 7\}$, $B = \{x|x \text{는 } 5 \text{ 이하의 홀수}\}$ 에 대하여 $X \cap A = X$ 와 $X \cup (A \cap B) = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 8개

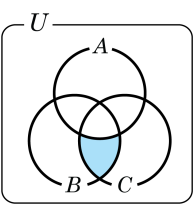
해설

$$X \cap A = X \text{ 이므로 } X \subset A$$
$$X \cup (A \cap B) = X \text{ 이므로 } (A \cap B) \subset X$$
$$A \cap B = \{1, 5\}$$
$$\{1, 5\} \subset X \subset \{1, 2, 4, 5, 7\}$$

집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 원소 1, 5 를 반드시 포함하는 집합이다.

$$\therefore 2^{5-2} = 2^3 = 8 \text{ (개)}$$

42. 전체집합 U 에 대하여 세 부분집합 A, B, C 가 다음 벤 다이어그램과 같을 때, 색칠된 부분을 나타내는 집합을 모두 고르면?



- ① $A^c \cap B \cap C$

③ $(B \cup C) - A$

⑤ $(B - A) \cup (C - A)$
- ② $A \cap B \cap C$

④ $(B \cap C) - A$

해설

②

③

⑤

43. 실수 전체 집합의 두 부분집합 $A = \{a^2 - 2a - 1, 3\}$, $B = \{2, 4 - a, 2a^2 - a\}$ 에 대하여 $B - A^c = \{2\}$ 일 때, $A \cup B$ 의 모든 원소의 합을 구하면?

- ① 10 ② 16 ③ 21 ④ 25 ⑤ 30

해설

$B - A^c = B \cap (A^c)^c = B \cap A = \{2\}$ 이므로 집합 A 에는 원소 2가 들어있다.

따라서 $a^2 - 2a - 1 = 2$, $a^2 - 2a - 3 = 0$

$\therefore a = -1, a = 3$ 이다.

i) $a = -1$ 일 때, $A = \{2, 3\}$, $B = \{2, 3, 5\}$

$\therefore A \cap B = \{2, 3\}$ 이므로 부적당

ii) $a = 3$ 일 때, $A = \{2, 3\}$, $B = \{1, 2, 15\}$

$A \cap B = \{2\}$ 이고, 이 때 $A \cup B = \{1, 2, 3, 15\}$

따라서 $A \cup B$ 의 모든 원소의 합은 21이다.

44. 집합 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $n((A \cup B) \cap (A \cap B)^c) = 0$ 일 때, 집합 B 의 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$n((A \cup B) \cap (A \cap B)^c) = 0$ 이라는 것은 $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c$ 가 공집합이라는 것을 뜻한다.

$$(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) - (A \cap B) = \emptyset$$

$$\rightarrow A = B$$

따라서, 집합 B 의 원소의 합은 16

45. 다음 중 p 가 q 이기 위한 충분조건인 것은?

- ① $p : a + b > 0, ab > 0, q : a > 0, b > 1$
- ② $p : \frac{a}{b} > 1, q : a > b > 1 (a, b \text{ 는 실수})$
- ③ $p : a + b > 2, q : a \geq 1 \text{ 또는 } b \geq 1 (a, b \text{ 는 실수})$
- ④ $p : ab = 0, |a| + |b| = 0$
- ⑤ $p : a + b \geq 2, ab \geq 1, Q : a \geq 1, b \geq 1$

해설

① 반례 : $a = 2 + i, b = 2 - i$ 이면

$$a + b = 4 > 0, ab = 5 > 0$$

$\therefore$ 필요조건

② 반례 : $a = -2, b = -1$ 이면

$$\frac{a}{b} = \frac{-2}{-1} = 2 > 1$$

$\therefore$ 필요조건

46. 두 집합 $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{4, 8, 12, 16\}$ 에 대하여 $A * B = A - (A \cap B)$ 라 할 때, $B * (A * B)$ 의 집합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{4, 8, 12, 16\}$

해설

$$A \cap B = \{4, 8\}$$

$$A * B = \{2, 6\}$$

$$B \cap (A * B) = \emptyset$$

$$B * (A * B) = B = \{4, 8, 12, 16\}$$

47. 집합 $N = \{x \mid x \text{는 } 100 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 부분 집합 $A_n = \{x \mid x \text{는 } n \text{의 배수}\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 골라라.

- ☐

$A_2 \subset A_4$
- ☐

$A_3 \subset A_4 = A_{12}$
- ☐

$A_4 \cup A_6 \subset A_2$
- ☐

$(A_2 \cap A_3) \cup (A_3 \cap A_4) = A_{12}$
- ☐

$n(A_4) > n(A_2)$
- ☐

$A_3 - A_4 = A_3 - A_{12}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉠

▶ 정답 : ㉡

▶ 정답 : ㉢

해설

㉠ $A_2 \subset A_4 \rightarrow A_4 \subset A_2$
㉡ $A_3 \subset A_4 = A_{12} \rightarrow$ 옳다.
㉢ $A_4 \cup A_6 \subset A_2 \rightarrow A_4 \subset A_2$ 이고 $A_6 \subset A_2$ 이므로 옳다.
㉣ $(A_2 \cap A_3) \cup (A_3 \cap A_4) = A_{12} \rightarrow A_6 \cup A_{12} = A_6$ 이므로 옳지 않다.
㉤ $n(A_4) > n(A_2) \rightarrow A_4 \subset A_2$ 이므로 옳지 않다.
㉥ $A_3 - A_4 = A_3 - A_{12} \rightarrow 3$ 의 배수에서 4 의 배수인 것을 제외한 집합은, 3 의 배수에서 12 의 배수를 제외한 집합과 같으므로 옳다.

49. 어느 학급에서 ‘자주 먹는 고기의 종류’를 조사한 결과, 모든 학생이 닭고기, 돼지고기, 소고기 중 적어도 하나의 고기를 선택하였다. 닭고기를 선택한 학생은 31 명, 돼지고기를 선택한 학생은 27 명, 소고기를 선택한 학생은 23 명이었다. 또, 세 종류의 고기 중 한 종류만 선택한 학생 중 14 명은 닭고기를, 15 명은 돼지고기를, 9 명은 소고기를 선택하였다. 세 종류의 고기를 모두 선택한 학생이 7 명일 때, 이 학급의 학생 수를 구하여라.

▶ **답:** 명

▶ 정답 : 56명

해설

닭고기를 선택한 학생의 집합을 A , 돼지고기를 선택한 학생의 집합을 B , 소고기를 선택한 학생의 집합을 C 라 두면,
 닭고기만을 선택한 학생 수는 $n(A) - n(A \cap B) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) = 14$,
 돼지고기만을 선택한 학생 수는 $n(B) - n(A \cap B) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = 15$,
 소고기만을 선택한 학생 수는 $n(C) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) = 9$,
 위의 세 식을 모두 더하면,
 $n(A) + n(B) + n(C) - 2(n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)) + 3n(A \cap B \cap C) = 38$,
 $n(A) = 31, n(B) = 27, n(C) = 23, n(A \cap B \cap C) = 7$ 이므로
 $31 + 27 + 23 - 2(n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)) + 21 = 38$
 $\rightarrow n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) = 32$
 모든 학생이 닭고기, 돼지고기, 소고기 중 적어도 하나의 고기를 선택하였으므로,
 $n(U) = n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - (n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)) + n(A \cap B \cap C)$
 $= 31 + 27 + 23 - 32 + 7 = 56$

50. 실수 x 에 대하여, 분수식 $\frac{x^4 + 3x^2 + 6}{x^2 + 1}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{aligned} & \frac{x^4 + 3x^2 + 6}{x^2 + 1} \\ &= \frac{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}{(x^2 + 1)} + \frac{4}{(x^2 + 1)} \\ &= (x^2 + 1) + \frac{4}{(x^2 + 1)} + 1 \\ & x^2 + 1 > 0 \text{ 이므로,} \\ & (x^2 + 1) + \frac{4}{(x^2 + 1)} \geq 2 \cdot \sqrt{(x^2 + 1) \cdot \frac{4}{(x^2 + 1)}} = 4 \\ & \therefore (x^2 + 1) + \frac{4}{(x^2 + 1)} + 1 \geq 4 + 1 = 5 \end{aligned}$$