1. 다음 중 집합이 아닌 것은?

① 5 보다 크고 6 보다 작은 자연수의 모임

② 몸무게가 60kg 이상인 사람들의 모임

③ 40 에 가까운 수의 모임

④ 우리 반에서 키가 가장 작은 학생의 모임

⑤ 반올림하여 50 이 되는 자연수들의 모임

해설

'가까운' 은 그 대상이 분명하지 않으므로 집합이 아니다.

2. 4 의 배수의 집합을 A 라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $3 \in A$ ② $4 \notin A$ ③ $8 \in A$

④ $10 \in A$ ⑤ $12 \notin A$

해설

집합 A 를 원소나열법으로 나타내면 $A = \{4, 8, 12, \cdots\}$ 이다.
따라서 $8 \in A$

3. 다음 중 옳게 연결된 것은?

① $\{x \mid x\text{는 홀수}\} = \{2, 4, 6, 8, \cdots\}$

② $\{x \mid x\text{는 짝수}\} = \{1, 3, 5, 7, \cdots\}$

③ $\{x \mid x\text{는 10의 약수}\} = \{1, 2, 5, 10\}$

④ $\{x \mid x\text{는 3의 배수}\} = \{6, 12, 18 \cdots\}$

⑤ $\{x \mid x\text{는 5이하의 자연수}\} = \{1, 2, 3, 4\}$

해설

③ $\{x \mid x\text{는 10의 약수}\} = \{1, 2, 5, 10\}$ 이다.

4. 다음 중 부분집합의 개수가 다른 집합은?

① $\{0,\ 2,\ 4\}$ ② $\{\text{ㄱ},\ \text{ㄷ},\ 2\}$ ③ $\{\varnothing,\ a,\ e\}$

④ $\{a,\ b,\ c,\ d\}$ ⑤ $\{3,\ 6,\ z\}$

해설

① $2^3 = 8$ (개)
② $2^3 = 8$ (개)
③ $2^3 = 8$ (개)
④ $2^4 = 16$ (개)
⑤ $2^3 = 8$ (개)

5. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 에 대하여 원소 3, 6, 12 를 포함하는 부분집합의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 4 개 ⑤ 8 개

해설

집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 에서 원소 3, 6, 12 를 포함한 부분집합의 개수는 원소 3, 6, 12 를 뺀 $\{1, 2, 4\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로 $2 \times 2 \times 2 = 8$(개) 이다.

6. 다음에서 두 집합 A, B가 서로소인 것을 고르면?

① $A = \{1,\ 2,\ 3\}$, $B = \{x \mid x$는 5보다 작은 소수$\}$

② $A = \{x \mid x \geq 1$인 실수$\}$, $B = \{x \mid x \leq 1$인 실수$\}$

③ $A = \{1,\ 2,\ 3\}$, $B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

④ $A = \{3,\ 4,\ 5\}$, $B = \{x \mid x$는 $-1 < x \leq 3$인 정수$\}$

⑤ $A = \{x \mid x = 2n + 1, n$은 자연수$\}$,
$B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

해설

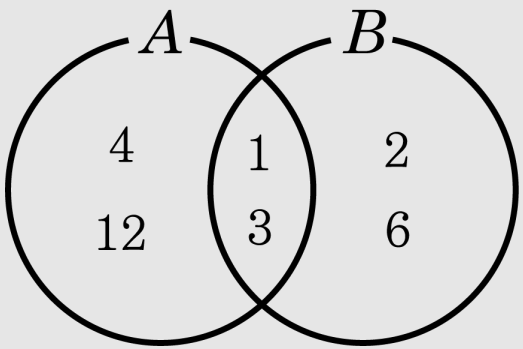
$A = \{x \mid x = 2n + 1,\ n$은 자연수$\}$
$= \{3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots\}$

7. 두 집합 A, B 에 대하여 $B = \{x \mid x$는 6의 약수$\}$ 이고, $A \cup B = \{x \mid x$는 12의 약수$\}$, $A \cap B = \{x \mid x$는 3이하의 홀수$\}$ 일 때, 집합 A 의 원소의 합은?

① 4 ② 5 ③ 13 ④ 16 ⑤ 20

해설

$B = \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$, $A \cap B = \{1,\ 3\}$



$\therefore A = \{1,\ 3,\ 4,\ 12\}$

따라서 집합 A 의 원소의 합은 $1 + 3 + 4 + 12 = 20$

8. 두 집합 A, B 에 대하여 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고른 것은?

㉠ $(A \cap B) \subset (A \cup B)$	㉡ $\varnothing \cap A = A$
㉢ $B \subset (A \cap B)$	㉣ $B \cup \varnothing = \varnothing$

① ㉢,㉣ ② ㉡,㉢ ③ ㉠,㉣

④ ㉡,㉢,㉣ ⑤ ㉠,㉡,㉢

해설

㉡$A \cap \varnothing = \varnothing$

㉢$B \subset (A \cup B)$

㉣$B \cup \varnothing = B$

9. 두 집합 $A = \{3, a-2, 5\}, B = \{3, 4, a\}$에 대하여 $B - A = \{6\}$일 때, a의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a = 6$

해설

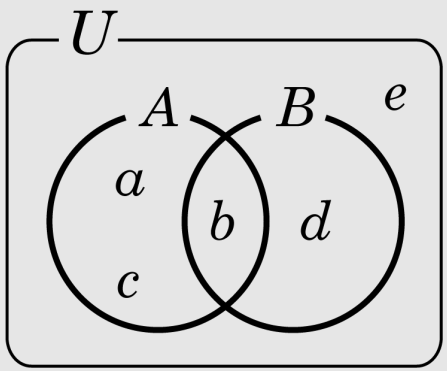
$B - A = \{6\}$에서
6은 집합 B의 원소이어야 하므로 $a = 6$이다.

10. 전체집합 $U = \{a, b, c, d, e\}$ 의 두 부분집합 $A = \{a, b, c\}, B = \{b, d\}$ 에 대하여 $A^c \cap B^c$ 은?

① $\{a\}$ ② $\{a, c\}$ ③ $\{b\}$ ④ $\{e\}$ ⑤ $\{b, e\}$

해설

$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = (\{a, b, c, d\})^c = \{e\}$ 이다.



11. $U = \{2, 4, 5, 8, 9, 10\}$ 에 대하여 $A = \{4, 5, 8\}, B = \{2, 4, 8, 9\}$ 일 때, $A^c - B^c$ 은?

① $\{2\}$ ② $\{2, 4\}$ ③ $\{2, 9\}$

④ $\{2, 4, 8\}$ ⑤ $\{2, 4, 9\}$

해설

$A^c - B^c = B - A = \{2, 4, 8, 9\} - \{4, 5, 8\} = \{2, 9\}$ 이다.

12. 세 집합 $A = \{2, 4, 5, 6, 8\}$, $B = \{1, 3, 4, 6, 7\}$, $C = \{4, 7, 8, 9\}$ 에 대하여 $(A - B) \cap C$ 는?

① $\{3\}$ ② $\{8\}$ ③ $\{3, 8\}$

④ $\{3, 8, 9\}$ ⑤ $\{3, 5, 7\}$

해설

$(A - B) \cap C = \{2, 5, 8\} \cap \{4, 7, 8, 9\} = \{8\}$ 이다.

13. $a > 0$ 일 때, $A = 1 + \frac{a}{2}$, $B = \sqrt{1+a}$ 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $A > B$ ② $A < B$ ③ $A \geq B$

④ $A \leq B$ ⑤ $A = B$

해설

$a > 0$ 이므로 $1 + \frac{a}{2} > 0$, $\sqrt{1+a} > 0$

제곱을 하여 비교하면

$$A^2 - B^2 = \left(1 + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{1+a}\right)^2$$

$$= 1 + a + \frac{a^2}{4} - 1 - a$$

$$= \frac{a^2}{4} > 0$$

따라서 $A^2 > b^2$ 이므로 $A > B$ 이다.

14. 양수 $a,\ b$에 대하여 $a^2+b^2=1$을 만족할 때, $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$의 최솟값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$a^2>,\ b^2>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2}=2ab$

(단, 등호는 $a^2=b^2$ 일 때 성립)

그런데 $a^2+b^2=1$ 이므로 $1 \geq 2ab$

$\therefore ab \leq \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{a^2}>0,\ \dfrac{1}{b^2}>0$이므로 산술평균 기하평균의 관계에 의하여

$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2} \geq 2\sqrt{\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{1}{b^2}}$

$\dfrac{2}{ab} \geq \dfrac{2}{\frac{1}{2}}=4$

(단, 등호는 $a^2=b^2$ 일 때 성립)

따라서 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$ 의 최솟값은 4이다.

15. 양수 x에 대하여 $8x^2 + \frac{2}{x}$의 최솟값은?

① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt[3]{3}$ ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$x > 0$이므로

$$8x^2 + \frac{2}{x} = 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{8x^2 \times \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}} = 3\sqrt[3]{8} = 6$$

(단, 등호는 $x = \frac{1}{2}$일 때 성립)

16. 두 집합 $A = \{21, 24, 27, 30\}$, $B = \{x|x$는 50 이하의 5의 배수$\}$ 에 대하여 $n(A) + n(B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 14

해설

$A = \{21, 24, 27, 30\}$, $B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$ 이므로

$n(A) = 4$, $n(B) = 10$ 이다.

$\therefore 4 + 10 = 14$

17. 집합 $A = \{x|x$ 는 15 이하의 소수$\}$에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 골라라.

보기

㉠ $2 \notin A$ ㉡ $1 \in A$

㉢ $\varnothing \subset A$ ㉣ $\{5,\ 7\} \in A$

㉤ $\{3,\ 5,\ 7,\ 9\} \not\subset A$ ㉥ $n(A) = 7$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

▷ 정답 : ㉤

해설

$A = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13\}$ 이므로

㉢ $\varnothing \subset A$,

㉤ $\{3,\ 5,\ 7,\ 9\} \not\subset A$가 옳다.

18. 다음 중에서 옳은 것을 모두 골라라.

㉠ $\{x \mid x$는 3의 약수 $\} \subset \{1,\ 2,\ 3\}$

㉡ $\{a,\ b\} \in \{a,\ b,\ c\}$

㉢ $0 \in \varnothing$

㉣ $\varnothing \in \{x \mid x$는 6의배수$\}$

㉤ $\varnothing \subset \{1\}$

㉥ $\varnothing \subset \varnothing$

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: ㉠

▷ 정답: ㉤

▷ 정답: ㉥

해설

㉡ $\{a,\ b\} \in \{a,\ b,\ c\}$에서 집합과 집합 사이의 관계는 $\subset$를 써야 한다.

㉢ $0 \in \varnothing$에서는 $\varnothing \subset \{0\}$이어야 한다.

㉣ $\varnothing \in \{x \mid x$는 6의 배수$\}$에서는 $\subset$를 써야한다.

㉥ 공집합$(\varnothing)$은 모든 집합의 부분집합이다.

19. 집합 $A = \{3,\ 5,\ 7\}$ 의 부분집합을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $\{\varnothing\}$ ② $\{3,\ 4,\ 5\}$ ③ $\{3\}$

④ $\{\{7\}\}$ ⑤ $\{3,\ 5,\ 7\}$

해설

집합 A 의 부분집합 : $\varnothing$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{7\}$, $\{3,\ 5\}$, $\{3,\ 7\}$, $\{5,\ 7\}$, $\{3,\ 5,\ 7\}$

20. 다음 중에서 옳은 것의 기호를 찾아서, 각 기호에 주어진 글자를 이용하여 단어를 만들어라.

㉠ $\{1,\ 2\}$ 는 $\{1,\ 2,\ 5\}$ 의 진부분집합이다.
㉡ $\{m,\ n\}$ 은 $\{m,\ n\}$ 의 진부분집합이다.
㉢ $\{ㄱ,\ ㄴ,\ ㄷ\}$ 의 진부분집합은 8 개이다.
㉣ $A = \{7,\ 8\}$ 일때, $\subset A$이다.
㉤ $\{a,\ b\} \not\subset \{a,\ b,\ c\}$ 이다.
㉥ $\varnothing$ 은 $\{e,\ f\}$ 의 진부분집합이다.

㉠	㉡	㉢	㉣	㉤	㉥
사	축	호	랑	후	해

▶ 답 :

▷ 정답 : 사랑해

해설

㉠ $\{1,\ 2\}$ 는 $\{1,\ 2,\ 5\}$ 의 진부분집합이다.
㉡ $\{m,\ n\}$ 은 $\{m,\ n\}$ 의 진부분집합이 아니다.
㉢ $\{ㄱ,\ ㄴ,\ ㄷ\}$ 의 진부분집합은 부분집합 중 자기 자신을 제외한 부분집합이므로 7 개이다.
㉣ 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing \subset A$ 이다.
㉤ $\{a,\ b\} \subset \{a,\ b,\ c\}$ 이다.
㉥ $\varnothing$ 은 $\{e,\ f\}$ 의 진부분집합이다.

21. 집합 $A = \{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 2, 4, n 을 모두 포함하는 부분집합의 개수가 16 개일 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

집합 A 의 원소의 개수를 a 개라 하면 원소 2, 4, n 을 모두 포함하는 부분집합의 개수는 2^{a-3} 개이다.

$2^{a-3} = 16 = 2^4$

$a - 3 = 4$ 이므로 $a = 7$

따라서 집합 A 의 원소의 개수가 7 개이므로 n 의 값은 14 이다.

22. 전체집합 $U = \{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x \mid x$는 짝수$\}$,
$B = \{x \mid x$는 5의 배수$\}$ 에 대하여 $(A \cup B)^c \subset X, (A - B)^c \cap X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, B = \{5, 10\}$ 이고 $(A \cup B)^c = \{1, 3, 7, 9\}, (A - B)^c = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$ 이다.
따라서 $(A \cup B)^c \subset X \subset (A - B)^c$ 이므로 집합 X 의 개수는 $2 \times 2 = 4$(개) 이다.

23. 자연수 k의 배수를 원소로 하는 집합을 A_k라 할때, $(A_4 \cap A_6) \supset A_k$인 k의 최솟값을 a라 하고 $(A_8 \cup A_{12}) \subset A_k$인 k의 최댓값을 b라 할 때 $a+b$의 값은 ?

① 16 ② 20 ③ 10 ④ 15 ⑤ 27

해설

$(A_4 \cap A_6) \supset A_k$ 인 k 는 4 와 6 의 공배수이므로 k 의 최솟값은 4와 6 의 최소공배수 12 이다. $(A_8 \cup A_{12}) \subset A_k$ 인 k 는 8 과 12 의 공약수이므로 k 의 최댓값은 8과 12 의 최대공약수 4이다.
$\therefore$ 최솟값 a는 12 이고 최댓값 b는 4이므로 $a+b = 12+4 = 16$

24. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 연산 $\star$을 $A \star B = (A \cup B)^c \cup (A \cap B)$ 로 정의할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $A \star \varnothing = A$

② $A \star U = A^c$

③ $A \star A^c = \varnothing$

④ $A \star B \neq B \star A$

⑤ $A \star B^c \neq A^c \star B$

해설

① $A \star \varnothing = (A \cup \varnothing)^c \cup (A \cap \varnothing)$
$= A^c \cup \varnothing = A^c$

② $A \star U = (A \cup U)^c \cup (A \cap U)$
$= U^c \cup A$
$= \varnothing \cup A = A$

③ $A \star A^c = (A \cup A^c)^c \cup (A \cap A^c)$
$= U^c \cup \varnothing = \varnothing$

④ $A \star B = (A \cup B)^c \cup (A \cap B)$
$= (B \cup A)^c \cup (B \cap A)$
$= B \star A$

⑤ $A \star B^c = (A \cup B^c)^c \cup (A \cap B^c)$
$= (A^c \cap B) \cup (A^c \cup B)^c$
$= (A^c \cup B)^c \cup (A^c \cap B) = A^c \star B$

25. 명제 '모든 학생들은 수학을 좋아한다.' 의 부정으로 옳은 것은?

① 모든 학생들은 수학을 좋아하지 않는다.

② 모든 학생들은 영어를 좋아한다.

③ 어떤 학생들은 수학을 좋아한다.

④ 어떤 학생들은 수학을 좋아하지 않는다.

⑤ 어떤 학생들은 영어를 좋아한다.

해설

'모든' 의 부정은 '어떤' 이므로 주어진 명제의 부정은 '어떤 학생들은 수학을 좋아하지 않는다.' 이다.

26. 다음 <보기>의 조건 '$p(x)$'를 만족하는 진리집합이 바르게 연결된 것은? (단, 전체집합은 실수의 집합 R)

보기

(1) $p(x) : x$는 12의 양의 약수이다.
$P = \{1, 2, 3, 6, 12\}$

(2) $p(x) : x^2 + 1 = 0$
$P = \varnothing$

(3) $p(x) : x^2 - 5x - 4 = 0$
$P = \{1, 4\}$

(4) $p(x) : x^2 + 4x + 5 > 0$
$P = R$

① (1), (2) ② (2), (3) ③ (3), (4)
④ (2), (4) ⑤ (1), (3)

해설

(1) $p = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
(2) $x^2 \geq 0$ 이므로 $x^2 + 1 \neq 0 \therefore P = \varnothing$
(3) $P = \left\{ \dfrac{5 \pm \sqrt{41}}{2} \right\}$
(4) 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 > 0$ 이므로 $P = R$ 이다.

27. 다음 명제 중 참인 것은?

① p 가 소수이면 $\sqrt{p}$는 무리수이다.

② $x < y$이면 $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ 이다. (단, $x \neq 0, y \neq 0$)

③ $\triangle ABC$가 직각삼각형이면 $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$ 이다.

④ $a+b$가 짝수이면 a, b는 짝수이다.

⑤ 12와 18의 공약수는 9의 약수이다.

해설

① 소수 $p = k^2$ 이 될 수 없으므로 $\sqrt{p}$ 는 무리수

② 반례 : $x = -1, y = 1$, 즉 두 수의 부호가 다르면 성립하지 않는다.

③ 직각삼각형의 빗변이 $\overline{AC}$이 아닌 다른 변이 될 수도 있다.

④ 반례 : $a = 1, b = 3$

⑤ 12와 18의 공약수는 6의 약수이다.

28. 조건 p 를 만족하는 집합을 P 라 하고, 조건 q 를 만족하는 집합을 Q 라 하자. 명제 'p 이면 q 이다.' 가 거짓일 때, 반례의 집합은?

① P ② Q ③ $P-Q$ ④ P^c ⑤ Q^c

해설

만약 'p 이면 q 이다.' 가 참이라면 P 의 모든 원소는 Q 의 원소이어야 한다. 하지만 'p 이면 q 이다' 가 거짓이므로 P 의 원소이지만 Q 의 원소가 아닌 것이 반례로 적당하다.

29. 다음 명제 중에서 그 역이 참인 것은? (단, 문자는 실수)

① $x = 0$ 이면 $xy = 0$ 이다.

② $x \geq 1$ 이면 $x^2 \geq 1$ 이다.

③ $x \leq 1$ 이고 $y \leq 1$ 이면 $x + y \leq 2$ 이다.

④ $a^2 + b^2 > 0$ 이면 $a \neq 0$ 또는$b \neq 0$ 이다.

⑤ $a = b$ 이고 $c = d$ 이면 $a + c = b + d$ 이다.

해설

역인 명제는

① $xy = 0$ 이면 $x = 0$ (거짓) (반례 : $x = 1, y = 0$)

② $x^2 \geq 1$ 이면 $x \geq 1$ (거짓) (반례 : $x = -1$)

③ $x + y \leq 2$ 이면 $x \leq 1$ 이고 $y \leq 1$ (거짓) (반례 : $x = 2,\ y = 0$)

④ $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$ (참)

⑤ $a + c = b + d$ 이면 $a = b$ 이고 $c = d$ (거짓) (반례 : $a = -1,\ b = -2,\ c = 3,\ d = 4$)

30. 실수 x 에 대하여 명제 '$ax^2 + a^2x - 6 \neq 0$ 이면 $x \neq 2$ 이다.' 가 참이기 위한 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.
즉, '$x = 2$ 이면 $ax^2 + a^2x - 6 = 0$ 이다.' 가 참이므로
$4a + 2a^2 - 6 = 0,\ 2a^2 + 4a - 6 = 0,$
$a^2 + 2a - 3 = 0,\ (a+3)(a-1) = 0$
$\therefore\ a = -3$ 또는 $a = 1$
따라서 a 의 값의 합은 $-3 + 1 = -2$

31. x, y가 실수일 때, $|x|+|y|=|x+y|$가 되기 위한 필요충분조건을 구하면?

① $xy=0$ ② $xy>0$ ③ $xy\geq 0$

④ $xy<0$ ⑤ $xy\leq 0$

해설

양변을 제곱하면 $x^2+y^2+2|xy|=x^2+y^2+2xy$

$\therefore$ $|xy|=xy$ 가 성립하려면 $xy\geq 0$ 일 때이다.

32. $a > b > 0$인 실수 a, b에 대하여 $\frac{a}{1+a}$와 $\frac{b}{b+1}$의 대소 관계는?

① $\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$
② $\frac{a}{1+a} \le \frac{b}{1+b}$
③ $\frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$
④ $\frac{a}{1+a} \ge \frac{b}{1+b}$
⑤ $\frac{a}{1+a} = \frac{b}{1+b}$

해설

$$\frac{a}{1+a} - \frac{b}{1+b} = \frac{a+ab-b-ab}{(1+a)(1+b)}$$
$$= \frac{a-b}{(1+a)(1+b)} > 0$$
$(\because a > b > 0)$

$\therefore \frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$

해설

$a > b > 0$이면 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

양변에 1을 더하면 $\frac{1+a}{a} < \frac{1+b}{b}$

$\therefore \frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$

33. 실수 x, y에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert \geq \lvert x+y\rvert$ ㉡ $\lvert x+y\rvert \geq \lvert x-y\rvert$
㉢ $\lvert x-y\rvert \geq \lvert x\rvert - \lvert y\rvert$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $(\lvert x\rvert + \lvert y\rvert)^2 - \lvert x+y\rvert^2 = 2(\lvert xy\rvert - xy) \geq 0$

$\therefore\ \lvert x\rvert + \lvert y\rvert \geq \lvert x+y\rvert$

㉡ (반례) $x=1, y=-1$ 일 때

$\lvert 1+(-1)\rvert = 0,\ \lvert 1-(-1)\rvert = 2$ 이므로

$\lvert x+y\rvert < \lvert x-y\rvert$

㉢ $\lvert x-y\rvert^2 - (\lvert x\rvert - \lvert y\rvert)^2 = 2(\lvert xy\rvert - xy) \geq 0$

$\therefore\ \lvert x-y\rvert \geq \lvert x\rvert - \lvert y\rvert$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢ 이다.

34. 실수 a, b에 대하여 $a^2 + b^2 \geq -ab$임을 증명한 것이다. [가], [나]에 들어갈 알맞은 부등호로 짝지어진 것은?

$A = a^2 + b^2,\ B = -ab$
$A - B = a^2 + b^2 - (-ab)$
$= a^2 + b^2 + ab$
$= a^2 + ab + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2$
$= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2$([가])$0$
따라서 $A - B \geq 0$이므로 A([나])B이다. 즉, $a^2 + b^2 \geq -ab$ (단 등호는 $a = b = c$일 때 성립)

① $>, \geq$ ② $\geq, \geq$ ③ $>, >$ ④ $<, \geq$ ⑤ $\leq, \leq$

해설

$A = a^2 + b^2,\ B = -ab$
$A - B = a^2 + b^2 - (-ab)$
$= a^2 + b^2 + ab$
$= a^2 + ab + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2$
$= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$
($a,\ b$가 실수이므로)
$\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 \geq 0, \frac{3}{4}b^2 \geq 0$
따라서 $A - B \geq 0$이므로 $A \geq B$이다.
즉, $a^2 + b^2 \geq -ab$ (단 등호는 $a = b = c$일 때 성립)

35. $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$이고 $a+b+c=14$일 때, $\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}$의 최댓값은?

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

해설

코시-슈바르쯔의 부등식에 의하여

$(1^2+2^2+3^2)(\sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2+\sqrt{c}^2)$

$\geq (\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$

$(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$

$\leq 14(a+b+c)=14^2$

$a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$이므로

$\therefore\ 0 \leq \sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c} \leq 14$

따라서, 구하는 최댓값은 14이다.

36. 다음 조건을 만족하는 두 집합 A, B 에 대하여 $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

㉠ $A=\{2,\ a,\ a^2\}$, $B=\{b,\ c,\ 4\}$

㉡ $A \subset B$, $B \subset A$

㉢ a, b, c 가 서로 다른 자연수

▶ 답:

▷ 정답: 22

해설

$A \subset B$, $B \subset A$ 이므로 $A=B$

$4 \in B$ 이므로 $4 \in A$

$a=4$ 또는 $a^2=4$

(i) $a=4$ 일 때, $A=\{2,\ 4,\ 16\}$, $B=\{b,\ c,\ 4\}$

$\therefore\ b=2,\ c=16$ 또는 $b=16,\ c=2$

(ii) $a^2=4$ 일 때, $a=2$ (a 는 자연수)

$A=\{2,\ 2^2\}=\{2,\ 4\}$, $B=\{b,\ c,\ 4\}$

b 또는 c 가 2 이어야 하므로 a, b, c 가 서로 다른 자연수가 될 수 없다.

$\therefore\ a+b+c=4+2+16=22$

37. $\{a, b, c, d, e\}$ 의 부분집합 중에서 a 또는 d 를 포함하는 부분집합의 개수를 구하면?

① 4 개 ② 8 개 ③ 10 개 ④ 12 개 ⑤ 24 개

해설

(i) a 을 포함하는 경우

$2^{5-1} = 2^4 = 16$ (개)

(ii) d 를 포함하는 경우

$2^{5-1} = 16$ (개)

(i) a 와 d 를 모두 포함하는 경우

$2^{5-2} = 8$ (개)

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$16 + 16 - 8 = 24$ (개) 이다.

38. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 4 의 약수$\}$,
$B = \{x \mid x$는 5 이하의 자연수 중 약수가 2개인 수 $\}$에 대하여 $P = \{x \mid x = a + b, a \in A, b \in B\}$,
$Q = \{x \mid x = a \times b, a \in A, b \in B\}$ 일 때,
$P \cap Q$ 를 원소나열법으로 나타내여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\{3, 4, 5, 6\}$

해설

$A = \{x \mid x$는 4 의 약수$\} = \{1, 2, 4\}$
$B = \{x \mid x$는 5 이하의 자연수 중 약수가 2개인 수 $\} = \{2, 3, 5\}$

먼저 집합 P 의 원소를 구해보면 다음과 같다.

B \ A	1	2	4
2	3	4	6
3	4	5	7
5	6	7	9

$\therefore P = \{3, 4, 5, 6, 7, 9\}$
다음으로 집합 Q 의 원소를 구해보면 다음과 같다.

B \ A	1	2	4
2	2	4	8
3	3	6	12
5	5	10	20

$\therefore Q = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 20\}$
그러므로 $P \cap Q = \{3, 4, 5, 6\}$

39. 두 집합 $A = \{x|x$는 20보다 작은 4의 배수$\}$, $B = \{1,\ a,\ 2+a,\ 8,\ 8a\}$ 에서 $A \cap B = \{4,\ 8,\ 16\}$ 일 때, $A \cup B$는?(단, a 는 자연수이다.)

① $\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$

② $\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 12,\ 16\ \}$

③ $\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 12,\ 16\ ,\ 20\}$

④ $\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 12,\ 16\ ,\ 32\}$

⑤ $\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 12,\ 16\ ,\ 24,\ 32\}$

해설

$A = \{4,\ 8,\ 12,\ 16\}$

$A \cap B = \{4,\ 8,\ 16\}$ 이므로 $4 \in B,\ \ 8 \in B,\ \ 16 \in B$ 이다.

이 때, a 가 자연수라 했으므로, $a < 2+a < 8a$ 이다.

따라서 $8a \neq 4,\ 8a \neq 8$ 이다.

$8a = 16 \quad \therefore\ a = 2$

$B = \{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$

$\therefore\ A \cup B = \{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 12,\ 16\ \}$

40. 두 집합 A, B 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $A \cap B \neq B \cap A$

② $A \subset B$ 이면 $A \cup B = A$

③ $A \subset B$ 이면 $A \cap B = B$

④ $n(A \cap B \cap \varnothing) = 0$

⑤ $A \subset (A \cap B) \subset (A \cup B)$

해설

① $A \cap B = B \cap A$
② $A \subset B$ 이면 $A \cup B = B$
③ $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$
⑤ $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$

41. 두 집합 $A = \{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7\}$, $B = \{x|x\text{는 } 5 \text{ 이하의 홀수}\}$ 에 대하여 $X \cap A = X$ 와 $X \cup (A \cap B) = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 8 개

해설

$X \cap A = X$ 이므로 $X \subset A$

$X \cup (A \cap B) = X$ 이므로 $(A \cap B) \subset X$

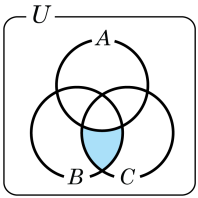
$A \cap B = \{1,\ 5\}$

$\{1,\ 5\} \subset X \subset \{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7\}$

집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 원소 1, 5 를 반드시 포함하는 집합이다.

$\therefore\ 2^{5-2} = 2^3 = 8$ (개)

42. 전체집합 U 에 대하여 세 부분집합 A, B, C 가 다음 벤 다이어그램과 같을 때, 색칠된 부분을 나타내는 집합을 모두 고르면?



① $A^c \cap B \cap C$

② $A \cap B \cap C$

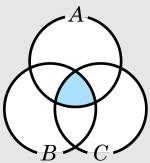
③ $(B \cup C) - A$

④ $(B \cap C) - A$

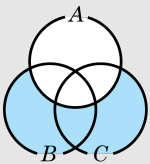
⑤ $(B - A) \cup (C - A)$

해설

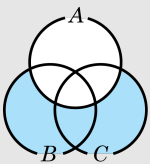
②



③



⑤



43. 실수 전체 집합의 두 부분집합 $A=\{a^2-2a-1, 3\}$, $B=\{2, 4-a, 2a^2-a\}$ 에 대하여 $B-A^c=\{2\}$ 일 때, $A\cup B$ 의 모든 원소의 합을 구하면?

① 10 ② 16 ③ 21 ④ 25 ⑤ 30

해설

$B-A^c=B\cap(A^c)^c=B\cap A=\{2\}$ 이므로 집합 A 에는 원소 2가 들어있다.

따라서 $a^2-2a-1=2$, $a^2-2a-3=0$

$\therefore a=-1, a=3$ 이다.

i) $a=-1$ 일 때, $A=\{2, 3\}$, $B=\{2, 3, 5\}$

$\therefore A\cap B=\{2, 3\}$ 이므로 부적당

i) $a=3$ 일 때, $A=\{2, 3\}$, $B=\{1, 2, 15\}$

$A\cap B=\{2\}$ 이고, 이 때 $A\cup B=\{1, 2, 3, 15\}$

따라서 $A\cup B$ 의 모든 원소의 합은 21 이다.

44. 집합 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $n((A \cup B) \cap (A \cap B)^c) = 0$ 일 때, 집합 B 의 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$n((A \cup B) \cap (A \cap B)^c) = 0$ 이라는 것은 $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c$ 가 공집합이라는 것을 뜻한다.

$(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) - (A \cap B) = \varnothing$

$\rightarrow A = B$

따라서, 집합 B 의 원소의 합은 16

45. 다음 중 p가 q이기 위한 충분조건인 것은 ?

① $p : a+b>0,\ ab>0,\ q : a>0,\ b>1$

② $p : \dfrac{a}{b}>1,\ q : a>b>1 (a,\ b$ 는 실수$)$

③ $p : a+b>2$, $q : a \geq 1$ 또는 $b \geq 1$ $(a,\ b$는 실수$)$

④ $p : ab=0,\ |a|+|b|=0$

⑤ $p : a+b \geq 2,\ ab \geq 1,\ Q : a \geq 1,\ b \geq 1$

해설

① 반례 : $a=2+i,\ b=2-i$ 이면

$a+b=4>0,\ ab=5>0$

$\therefore$ 필요조건

② 반례 : $a=-2,\ b=-1$ 이면

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{-2}{-1}=2>1$

$\therefore$ 필요조건

46. 두 집합 $A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$, $B = \{4,\ 8,\ 12,\ 16\}$ 에 대하여 $A * B = A - (A \cap B)$ 라 할 때, $B * (A * B)$ 의 집합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{4,\ 8,\ 12,\ 16\}$

해설

$A \cap B = \{4,\ 8\}$

$A * B = \{2,\ 6\}$

$B \cap (A * B) = \varnothing$

$B * (A * B) = B = \{4,\ 8,\ 12,\ 16\}$

47. 집합 $N = \{x \mid x$는 100이하의 자연수$\}$의 부분집합 $A_n = \{x \mid x$는 n의 배수$\}$에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 골라라.

㉠ $A_2 \subset A_4$

㉡ $A_3 \subset A_4 = A_{12}$

㉢ $A_4 \cup A_6 \subset A_2$

㉣ $(A_2 \cap A_3) \cup (A_3 \cap A_4) = A_{12}$

㉤ $n(A_4) > n(A_2)$

㉥ $A_3 - A_4 = A_3 - A_{12}$

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: ㉡

▷ 정답: ㉢

▷ 정답: ㉥

해설

㉠$A_2 \subset A_4 \rightarrow A_4 \subset A_2$

㉡$A_3 \subset A_4 = A_{12} \rightarrow$ 옳다.

㉢$A_4 \cup A_6 \subset A_2 \rightarrow A_4 \subset A_2$ 이고 $A_6 \subset A_2$ 이므로 옳다.

㉣$(A_2 \cap A_3) \cup (A_3 \cap A_4) = A_{12} \rightarrow A_6 \cup A_{12} = A_6$ 이므로 옳지 않다.

㉤$n(A_4) > n(A_2) \rightarrow A_4 \subset A_2$ 이므로 옳지 않다.

㉥$A_3 - A_4 = A_3 - A_{12} \rightarrow 3$ 의 배수에서 4 의 배수인 것을 제외한 집합은, 3 의 배수에서 12 의 배수를 제외한 집합과 같으므로 옳다.

48. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $[A \cup (A^c \cap B)] \cap [B \cup (B^c \cap A^c)^c] = U$, $A \cap B^c = A$ 일 때, $n(A \cup B)$ 와 같은 것은?

① $n(A^c \cap B^c)$

② $n(U) - n(A^c)$

③ $n(A) + n(A \cap B)$

④ $n(A \cup B) - n(A)$

⑤ $n(A \cap B^c) + n(A^c \cap B)$

해설

$A \cap B^c = A$ 이면 A 와 B 는 서로소인 집합이다.

$[A \cup (A^c \cap B)] \cap [B \cup (B^c \cap A^c)^c] = U$

$\rightarrow [A \cup B] \cap [B \cup (A \cup B)] = U \rightarrow A \cup B = U$

$\rightarrow n(U) = n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

① $n(A^c \cap B^c) = n(U) - n(A \cup B) = 0$

② $n(U) - n(A^c) = n(U) - n(B)$

③ $n(A) + n(A \cap B) = n(A)$

④ $n(A \cup B) - n(A) = n(B)$

⑤ $n(A \cap B^c) + n(A^c \cap B) = n(A - B) + n(B - A) = n(A) + n(B) = n(A \cup B)$

49. 어느 학급에서 '자주 먹는 고기의 종류' 를 조사한 결과, 모든 학생이 닭고기, 돼지고기, 소고기 중 적어도 하나의 고기를 선택하였다. 닭고기를 선택한 학생은 31 명, 돼지고기를 선택한 학생은 27 명, 소고기를 선택한 학생은 23 명이었다. 또, 세 종류의 고기 중 한 종류만 선택한 학생 중 14 명은 닭고기를, 15 명은 돼지고기를, 9 명은 소고기를 선택하였다. 세 종류의 고기를 모두 선택한 학생이 7 명일 때, 이 학급의 학생 수를 구하여라.

▶ 답 : 명

▷ 정답 : 56명

해설

닭고기를 선택한 학생의 집합을 A , 돼지고기를 선택한 학생의 집합을 B , 소고기를 선택한 학생의 집합을 C 라 두면,
닭고기만을 선택한 학생 수는 $n(A)-n(A\cap B)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)=14$,
돼지고기만을 선택한 학생 수는 $n(B)-n(A\cap B)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)=15$,
소고기만을 선택한 학생 수는 $n(C)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)=9$,
위의 세 식을 모두 더하면,
$n(A)+n(B)+n(C)-2(n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A))+3n(A\cap B\cap C)=38$,
$n(A)=31, n(B)=27, n(C)=23, n(A\cap B\cap C)=7$ 이므로
$31+27+23-2(n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A))+21=38$
$\rightarrow n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)=32$
모든 학생이 닭고기, 돼지고기, 소고기 중 적어도 하나의 고기를 선택하였으므로,
$n(U)=n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-(n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A))+n(A\cap B\cap C)$
$=31+27+23-32+7=56$

50. 실수 x에 대하여, 분수식 $\dfrac{x^4+3x^2+6}{x^2+1}$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$$\frac{x^4+3x^2+6}{x^2+1}$$

$$= \frac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+1)} + \frac{4}{(x^2+1)}$$

$$= (x^2+1) + \frac{4}{(x^2+1)} + 1$$

$x^2+1>0$이므로,

$$(x^2+1) + \frac{4}{(x^2+1)} \geq 2 \cdot \sqrt{(x^2+1) \cdot \frac{4}{(x^2+1)}} = 4$$

$$\therefore\ (x^2+1) + \frac{4}{(x^2+1)} + 1 \geq 4+1 = 5$$