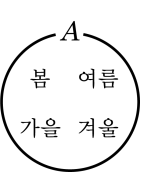


1. 다음 벤 다이어그램을 보고, 집합 A 의 원소를 구하여라.



▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 봄

▷ 정답: 여름

▷ 정답: 가을

▷ 정답: 겨울

해설

집합 A 의 원소는 ‘봄, 여름, 가을, 겨울’이다.

2. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $4 \in A$

② $3 \in A$

③ $\emptyset \subset A$

④ $8 \in A$

⑤ $\{1, 2, 4, 8\} \subset A$

해설

② $3 \notin A$ 에서 3은 A 의 원소가 아니다.

3. 다음 중 8의 배수의 집합의 부분집합을 골라라.

- ㉠ 1의 배수의 집합

㉡ 13의 배수의 집합
- ㉢ 9의 배수의 집합

㉣ 16의 배수의 집합
- ㉤ 20의 배수의 집합

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

8의 배수의 집합을 원소나열법으로 나타내면 {8, 16, 24, ...} 이다.
따라서 16의 배수의 집합은 8의 배수의 집합이다.

4. 두 집합

$A = \{x \mid x \text{는 } 4\text{의 약수}\}$, $B = \{1, x+1, x+3\}$ 에 대하여 $A = B$ 일 때, x 의 값은?

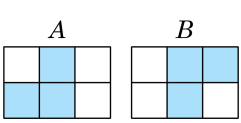
- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$A = B$ 이면 두 집합의 모든 원소가 같다. 집합 A 를 원소나열법으로 나타내면

$A = \{x \mid x \text{는 } 4\text{의 약수}\} = \{1, 2, 4\} = \{1, x+1, x+3\}$ 이므로 $x = 1$ 이다.

5. 두 집합 A, B 가 그림과 같을 때, $A \cup B$ 를 나타낸 것으로 옳은 것은?



- ①

②

③

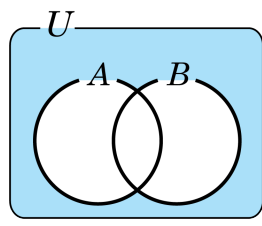
- ④

⑤

해설

$A \cup B = A \cup B$

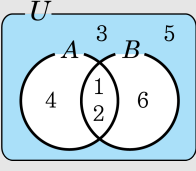
6. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 2, 4\}, B = \{1, 2, 6\}$ 일 때, 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은?



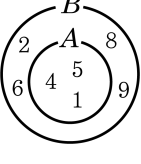
- ① $\{3\}$ ② $\{5\}$ ③ $\{6\}$ ④ $\{3, 5\}$ ⑤ $\{5, 6\}$

해설

따라서 색칠한 부분을 나타내는 집합은 $\{3, 5\}$ 이다.



7. 다음 벤 다이어그램을 보고 옳은 것을 모두 고르면?
(정답 2개)



- ① $B \subset A$

② $A = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9\}$

③ $A \cup B = B$

④ $B - A = \emptyset$

⑤ $A - B = \emptyset$

해설

$A \subset B$ 이므로 $A \cup B = B, A - B = \emptyset$ 이다.

8. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 20, n(A) = 9, n(B) = 7, n(A^c) = a, n(B^c) = b$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 11 ② 13 ③ 16 ④ 20 ⑤ 24

해설

$$a = n(A^c) = n(U) - n(A) = 20 - 9 = 11$$

$$b = n(B^c) = n(U) - n(B) = 20 - 7 = 13$$

$$\therefore a + b = 11 + 13 = 24$$

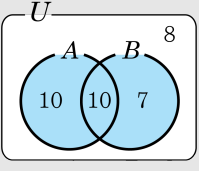
9. 학생 35명 중에서 인라인 스케이트 인터넷 동호회에 가입한 학생은 20명, 댄스 스포츠 인터넷 동호회에 가입한 학생은 17명, 두 곳 모두 가입하지 않은 학생이 8명이다. 이때 인라인 스케이트나 댄스 스포츠 인터넷 동호회에 가입한 학생 수를 구하여라.

▶ 답 : 명

▷ 정답 : 27명

해설

주어진 문제를 벤 다이어그램을 활용하여 해결할 수 있다. 벤 다이어그램의 각 영역에 해당하는 학생의 수를 기입하면 다음과 같다.



10. 다음 중 $x > 7$ 의 필요조건이고, 충분조건은 되지 않는 것은?

- ① $x > 7$ ② $x < 7$ ③ $x \geq 7$ ④ $x \leq 7$ ⑤ $x = 7$

해설

$x > 7$ 범위를 포함하는 것을 고르면 $x \geq 7$

11. 다음 중 옳은 것은?

- ① $\{\emptyset\} \subset \emptyset$
- ② $A \subset \{1, 2, 3, 4\}$ 이고 $A \subset B$ 이면 $\{1, 5\} \subset B$
- ③ $\{4, 5\} \subset \{5, 2 \times 2\}$
- ④ $\{a, b, c, e\} \subset \{a, b, c, d, f\}$
- ⑤ $A = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{보다 작은 홀수}\}$ 이면, $\{1, 3, 5, 7\} \subset A$ 이다.

해설

- ① $\{\emptyset\} \not\subset \emptyset$
- ② $A \subset \{1, 2, 3, 4\}$ 이고 $A \subset B$ 이면 $\{1, 5\} \not\subset B$
- ④ $\{a, b, c, e\} \not\subset \{a, b, c, d, f\}$
- ⑤ $A = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{보다 작은 홀수}\}$ 이면,
 $\{1, 3, 5, 7\} \not\subset A$

12. 집합 $A = \{4, 6, 8\}$ 의 부분집합 중 원소 6을 반드시 포함하고 원소의 개수가 3개인 부분집합의 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

원소 6를 제외한 $\{4, 8\}$ 의 부분집합은 $\emptyset$, $\{4\}$, $\{8\}$, $\{4, 8\}$ 의 4개가 있으므로, 원소 6을 반드시 포함하는 집합 $A = \{4, 6, 8\}$ 의 부분집합에는 $\{6\}$, $\{4, 6\}$, $\{6, 8\}$, $\{4, 6, 8\}$ 이 있다. 이 중 원소의 개수가 3개인 것은 $\{4, 6, 8\}$ 이므로 원소의 합은 $4+6+8=18$ 이다.

13. 두 집합 $A = \{1, 7\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 에 대하여 $A \subset X \subset B$ 를 만족하는 집합 X 가 될 수 있는 것은?

① $\emptyset$

② $\{5\}$

③ $\{1, 3\}$

④ $\{1, 3, 5\}$

⑤ $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

해설

① $\{1, 7\} \not\subset \emptyset$

② $\{1, 7\} \not\subset \{5\}$

③ $\{1, 7\} \not\subset \{1, 3\}$

④ $\{1, 7\} \not\subset \{1, 3, 5\}$

14. 전체집합 U 의 두 부분집합 A 와 B 에 대하여 $A \cap B^c = A$, $n(A) = 9$, $n(B) = 14$ 일 때, $n(A \cup B)$ 의 값을 구하시오. (단, $n(X)$ 는 집합 X 의 원소의 개수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 23

해설

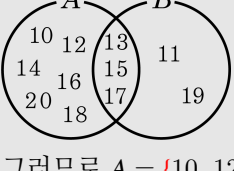
$A \cap B^c = A - B = A$ 이므로 A, B 는 서로소
 $n(A \cap B) = 0$, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 23$

15. 집합 $B = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이상 } 20 \text{ 미만의 홀수}\}$, $A \cap B = \{13, 15, 17\}$, $A \cup B = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$ 일 때 집합 A를 구하면?
- ① $\{13, 15\}$
 - ② $\{13, 15, 17, 19, 20\}$
 - ③ $\{10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
 - ④ $\{10, 14, 16, 18\}$
 - ⑤ $\{10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20\}$

해설

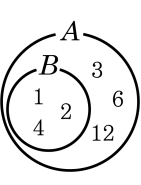
조건제시법을 원소나열법으로 고쳐보면 $B = \{11, 13, 15, 17, 19\}$ 가 된다.

$A \cup B = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$, $A \cap B = \{13, 15, 17\}$ 이 성립하도록 벤 다이어그램에 그려보자.



그러므로 $A = \{10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20\}$ 이다.

16. 다음 벤다이어그램을 보고, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?
(답2개)



- ① $A = \{3, 6, 12\}$ ② $B = \{1, 2, 4\}$ ③ $A \subset B$
④ $A \cap B = A$ ⑤ $A \cup B = A$

해설

- ① 집합 A 는 집합 B 부분을 포함하므로 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이다.
③ 집합 A 는 집합 B 부분을 포함하므로 $B \subset A$ 이다.
④ $A \cap B = B$ 이다.

17. 두 집합 $A = \{1, 3, a + 1\}$, $B = \{3, a, b\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{3, 5\}$ 일 때 a, b 의 값은?

① $a = 2, b = 1$

② $a = 3, b = 2$

③ $a = 4, b = 5$

④ $a = 5, b = 4$

⑤ $a = 6, b = 5$

해설

$5 \in A$ 이므로 $a + 1 = 5, a = 4$

$5 \in B$ 이므로 $b = 5$

18. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 미만의 짝수}\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ 일 때, 다음 집합의 원소들의 합을 구하여라.

보기

$$\{x \mid x \in B \text{ 그리고 } x \notin A\}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\{x \mid x \in B \text{ 그리고 } x \notin A\} = B - A$$

$$A = \{2, 4, 6, 8\}, A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\} \text{ 이므로 } B - A =$$

$$\{1, 3, 5\}$$

$$\therefore 1 + 3 + 5 = 9$$

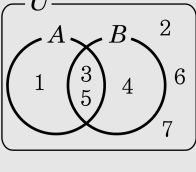
19. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 3, 5\}, B = \{3, 4, 5\}$ 에 대하여 $A^c \cap B^c$ 의 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 15

해설

$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = (\{1, 3, 4, 5\})^c = \{2, 6, 7\}$ 이므로 원소의 합은 $2 + 6 + 7 = 15$ 이다.



20. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 3, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ 에 대하여 $A - (A \cap B)$ 는?

- ① $\{1\}$ ② $\{3\}$ ③ $\{1, 3\}$ ④ $\{3, 5\}$ ⑤ $\{1, 5\}$

해설

$A - (A \cap B) = A - B = \{1, 3, 5, 6\} - \{5, 6\} = \{1, 3\}$ 이다.

21. 두 집합 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 8\}$ 일 때, $(A - B) \subset X$, $X - A = \emptyset$ 을 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$(A - B) \subset X \subset A$, 즉 $\{5, 7\} \subset X \subset \{1, 3, 5, 7\}$ 이므로 집합 X 의 개수는 $2 \times 2 = 4$ (개) 이다.

22. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참일 때, 조건 p 를 만족시키는 집합 P 와 조건 q 를 만족시키는 집합 Q 사이의 포함 관계를 옳게 나타낸 것은?

① $Q \subset P$

② $Q^c \subset P^c$

③ $Q \subset P^c$

④ $Q^c \subset P$

⑤ $Q = P^c$

해설

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.
 $\therefore Q^c \subset P^c$

23. 다음 중에서 명제 ‘자연수 n 의 각 자리 숫자의 합이 6의 배수이면, n 은 6의 배수이다.’가 거짓임을 보여주는 n 의 값은?

① 30

② 33

③ 40

④ 42

⑤ 답 없음

해설

실제로 주어진 명제는 참이 아니다. 33의 경우 $3+3=6$ 이지만, 33은 6의 배수가 아니다.

24. $a > b > c > 0$ 일 때, $A = \frac{c}{b-a}$, $B = \frac{a}{b-c}$, $C = \frac{b}{a-c}$ 의 대소를
바르게 비교한 것은?

- ① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < C < A$
④ $B < A < C$ ⑤ $C < A < B$

해설

$a > b > c > 0$ 에서
 $b - a < 0$, $b - c > 0$, $a - c > 0$ 이므로
 $A = \frac{c}{b-a} < 0$, $B = \frac{a}{b-c} > 0$
 $C = \frac{b}{a-c} > 0$
$$B - C = \frac{a}{b-c} - \frac{b}{a-c} = \frac{a(a-c) - b(b-c)}{(b-c)(a-c)}$$
$$= \frac{a^2 - ac - b^2 + bc}{(b-c)(a-c)}$$
$$= \frac{(a-b)(a+b) - c(a-b)}{(b-c)(a-c)}$$
$$= \frac{(a-b)(a+b-c)}{(b-c)(a-c)} > 0$$
$$\therefore B > C$$

따라서 $A < 0$, $B > C > 0$ 이므로
 $B > C > A$ 이다.

25. a, b 가 실수일 때, 다음은 부등식 $|a| + |b| \geq |a + b|$ 을 증명한 것이다. 증명과정에 쓰이지 않은 성질을 고르면?

증명

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - (a + b)^2 \\ &= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2 \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \\ &\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2 \\ &\therefore |a| + |b| \geq |a + b| \end{aligned}$$

- ① $|a| \geq a$
② $a \geq b, b \geq c$ 이면 $a \geq c$
③ $|a|^2 = a^2$
④ $a - b \geq 0$ 이면 $a \geq b$
⑤ $a \geq 0, b \geq 0, a^2 \geq b^2$ 이면 $a \geq b$

해설

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - (a + b)^2 \\ &= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2 \quad (\text{③이 쓰임}) \\ &= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2 \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \quad (\text{①이 쓰임}) \\ &\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2 \quad (\text{④가 쓰임}) \\ &\therefore |a| + |b| \geq |a + b| \quad (\text{⑤가 쓰임}) \end{aligned}$$

따라서, ②는 쓰이지 않았다.

26. x 가 양의 실수 일 때, $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$ 의 최솟값과 그 때의 x 값을 차례대로

구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 > 0, \frac{1}{x^2} > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \times \frac{1}{x^2}} + 1 \geq 2 + 1 = 3$$

등호는 $x^2 = \frac{1}{x^2}$ 일 때 성립하므로 $x^4 = 1$

따라서 양의 실수 x 는 1이다.

최솟값은 3이고, x 값은 1이다.

27. a, b, x, y 가 실수이고, $a^2 + b^2 = 8, x^2 + y^2 = 2$ 일 때 $ax + by$ 의
최댓값과 최솟값의 곱은?

- ① -16 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 16

해설

a, b, x, y 가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$
 $8 \times 2 \geq (ax + by)^2$
 $\therefore -4 \leq ax + by \leq 4$
(최댓값) $\times$ (최솟값) = -16

28. 세 집합 A, B, X 에 대하여 $(A \cup B) \cap X = X$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $X \subset (A \cup B)$ ② $(A \cap B) \subset X$
③ $(A \cup B) \subset X$ ④ $A \cap B = \emptyset$
⑤ $(A \cap B) \subset X \subset (A \cup B)$

해설

$(A \cup B) \cap X = X$ 이면 $X \subset (A \cup B)$ 이다.
② $(A \cap B) \subset X$ 라고 말할 수 없다.
④ $A \cap B = \emptyset$ 라고 말할 수 없다.

29. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 100 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 배수}\}$ 라 할 때, 집합 $A - B^c$ 의 원소의 개수는?

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$$n(A) = n(A_6) = 16$$

$$n(B) = n(A_8) = 12$$

$$\begin{aligned} n(A - B^c) &= n(A \cap B) \\ &= n(A_6 \cap A_8) \\ &= n(A_{24}) = 4 \end{aligned}$$

30. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 연산 $\star$ 을 $A \star B = (A \cup B)^c \cup (A \cap B)$ 로 정의할 때, 다음 중 옳은 것은?

$$\textcircled{1} \quad A \star \emptyset = A$$

$$\textcircled{2} \quad A \star U = A^c$$

③ $A \star A^c = \emptyset$

④ $A \star B \neq B \star A$

⑤ $A \star B^c \neq A^c \star B$

해설

$$\textcircled{1} \quad A \star \emptyset = (A \cup \emptyset)^c \cup (A \cap \emptyset) \\ = A^c \cup \emptyset = A^c$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad A \star U &= (A \cup U)^c \cup (A \cap U) \\ &= U^c \cup A \\ &= \emptyset \cup A = A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad A \star A^c &= (A \cup A^c)^c \cup (A \cap A^c) \\ &= U^c \cup \emptyset = \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad A \star B &= (A \cup B)^c \cup (A \cap B) \\ &= (B \cup A)^c \cup (B \cap A) \\ &= B \star A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad A \star B^c &= (A \cup B^c)^c \cup (A \cap B^c) \\ &= (A^c \cap B) \cup (A^c \cup B)^c \\ &= (A^c \cup B)^c \cup (A^c \cap B) = A^c \star B \end{aligned}$$

31. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 8 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{2, 4, 7\}$, $C = \{4, 6, 8\}$ 일 때, $(A \cap B) \cap C^c$ 은?

① $\{1\}$

② $\{2\}$

③ $\{1, 2\}$

④ $\{1, 2, 3\}$

⑤ $\{1, 2, 5, 6\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 이므로
 $(A \cap B) \cap C^c = (A \cap B) - C$
 $= \{2, 4\} - \{4, 6, 8\}$
 $= \{2\}$ 이다.

32. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 15 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 세 부분집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 2 \text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$, $C = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 배수}\}$ 에 대하여 연산 $\odot$ 를 $A \odot B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ 로 정의할 때, $n((A \odot B) \odot (A \odot C))$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 14, 15\}$$

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$C = \{3, 6, 9, 12, 15\}$$

$$\begin{aligned} A \odot B &= (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \\ &= (A - B) \cup (B - A) \text{이므로} \end{aligned}$$

$$A \odot B = \{8, 10, 14\} \cup \{1, 3\}$$

$$A \odot C = \{2, 4, 8, 10, 14\} \cup \{3, 9, 15\}$$

$$\therefore (A \odot B) \odot (A \odot C)$$

$$= \{1, 3, 8, 10, 14\} \odot \{2, 3, 4, 8, 9, 10, 14, 15\}$$

$$= \{1\} \cup \{2, 4, 9, 15\}$$

$$\therefore n((A \odot B) \odot (A \odot C)) = 5$$

33. 실수 x 에 대한 두 조건

$$p : |x - 2| < a \text{ (단, } a > 0 \text{)}$$
$$q : x < -3 \text{ 또는 } x > 1$$

에 대하여 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되기 위한 a 의 값의 범위를 $\alpha < a \leq \beta$ 라 할 때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하여라.

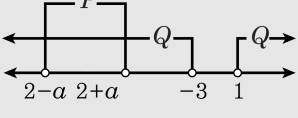
▶ 답 :

▷ 정답 : 1

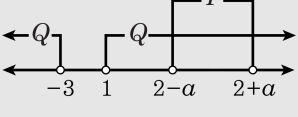
해설

$|x - 2| < a$ 에서 $-a < x - 2 < a \therefore 2 - a < x < 2 + a \therefore$
 $P = \{x | 2 - a < x < 2 + a\}$, $Q = \{x | x < -3 \text{ 또는 } x > 1\}$
따라서 $P \subset Q$ 가 되려면 $2 + a \leq -3 \cdots \textcircled{1}$ 또는 $2 - a \geq 1 \cdots$
 $\textcircled{2}$,
즉, $a \leq -5$ 또는 $a \leq 1$
그런데 $a > 0$ 이므로 구하는 a 의 범위는 $0 < a \leq 1$

$\textcircled{1}$:



$\textcircled{2}$:



$\therefore \alpha = 0, \beta = 1$
 $\therefore \alpha + \beta = 1$

34. 실수 x 에 대하여 다음 명제가 참일 때, a 의 최솟값을 구하여라.

$$x > a \text{이면 } |x - 2| > 4$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

주어진 명제가 참이므로
대우 ‘ $|x - 2| \leq 4$ 이면 $x \leq a$ 이다.’ 가 참이다.
 $|x - 2| \leq 4$ 에서
 $-4 \leq x - 2 \leq 4, -2 \leq x \leq 6$ 이므로
 $\therefore a \geq 6$
따라서 a 의 최솟값은 6이다.

35. 두 명제 $p \rightarrow \sim q$ 와 $\sim r \rightarrow q$ 가 참일 때, 다음 중 항상 참이라고 할 수 없는 것은? (단, $\sim p$ 는 p 의 부정이다.)

- ① $q \rightarrow \sim p$
- ② $p \rightarrow r$
- ③ $q \rightarrow \sim r$
- ④ $\sim q \rightarrow r$
- ⑤ $\sim r \rightarrow \sim p$

해설

$p \rightarrow \sim q, \sim r \rightarrow q$ 의 대우인 $q \rightarrow \sim p, \sim q \rightarrow r$ 도 참이다.
 $p \rightarrow \sim q \rightarrow r$ 이므로 $p \rightarrow r$, 그 대우인 $\sim r \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

36. 다음에서 조건 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은?

- ① $p : x = 0$ 이고 $y = 0, q : xy = 0$
- ② $p : x^2 = 9, q : x = 3$
- ③ $p : x, y$ 는 모두 짝수, $q : x + y$ 는 짝수
- ④ $p : x \neq 0$ 이고 $y \neq 0, q : xy \neq 0$
- ⑤ $p : x$ 는 유리수, $q : x^2$ 은 유리수

해설

- ① $q \rightarrow p$: 거짓 ($x = 0, y = 1$)
- ② $p \rightarrow q$: 거짓 ($x^2 = 9$ 이면 $x = \pm 3$)
- ③ $q \rightarrow p$: 거짓 ($x = 1, y = 3$ 이면 $x + y = 4$)
- ④ 필요충분조건
- ⑤ $q \rightarrow p$: 거짓 ($x = \sqrt{2}$ 이면 $x^2 = 2$)

37. 두 조건 $p: -5 \leq x < 6$, $q: 2a-3 < x \leq a+2$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답 : $a = 5$ 개

해설

두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하면

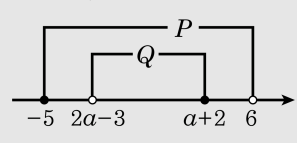
$$P = \{x \mid -5 \leq x < 6\},$$

$$Q = \{x \mid 2a - 3 < x \leq a + 2\}$$

이때, p 가 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$

$$\therefore Q \subset P$$

따라서, 다음 수직선에서



$$2a - 3 \geq -5 \vee a + 2 < 6$$

$$2a \geq -2 \vee \neg a < 4$$

$$\therefore -1 \leq a < 4$$

따라서, 정수 a 는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 의 5개이다.

38. 전체집합 U 에 대하여 두 집합이 $A = \{x \mid x > 3\}$, $B = \{x \mid x \leq -1\}$ 일 때, 주어진 조건 또는 명제를 집합으로 바르게 표현한 것은?
- ① 조건: $x < 3$, 집합표현: A^c
 - ② 조건: $x \geq -1$, 집합표현: B^c
 - ③ 조건: $-1 < x \leq 3$, 집합표현: $(A \cap B)^c$
 - ④ 명제: $x > 3 \rightarrow x > -1$, 집합표현: $A \subset B^c$
 - ⑤ 조건: $x \leq 3$ 또는 $x > -1$, 집합표현: $(A \cup B)^c$

해설

- ① A^c 은 $x \leq 3$ 이다.
- ② B^c 은 $x > -1$ 이다.
- ③ $(A \cap B)^c$ 에서 $A \cap B = \emptyset$ 이므로 $(A \cap B)^c$ 은 전체집합 U 이다.
- ⑤ $(A \cup B)^c$ 은 $-1 < x \leq 3$ 이다.

39. 다음 부등식에 관한 설명 중에서 옳은 것은? (단, a, b, x, y 는 실수임)

- ① $a \geq b \Leftrightarrow a - b \leq 0$
- ② $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$
- ③ $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ (단, $ax = by$ 일 때, 등호 성립)
- ④ $a^2 + b^2 \geq ab$ (단, $a = b$ 일 때, 등호 성립)
- ⑤ 두 양수 a, b 에 대하여 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ (단, $a = b$ 일 때, 등호 성립)

해설

- ②의 반례 : a, b 가 음수인 경우
- ③ $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2$
 $= (a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2)$
 $- (a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2)$
 $= a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2$
 $= (ay - bx)^2 \geq 0$ 단, 등호는 $ay = bx$ 일때 성립
- ④ $a^2 + b^2 - ab$
 $= \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$
등호는 $a = b = 0$ 일때 성립
- ⑤ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$
($\therefore$ 산술평균 $\geq$ 기하평균 $\geq$ 조화평균)

40. $a \geq 0, b \geq 0$ 일 때, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 임을 다음과 같은 과정으로 증명을 하였다. 이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 쓴 것을 고르면?

증명

$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(a-b)^2}{2}$ 이므로
부등식 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 이 성립함을 알 수 있다.
이 때, 등호는 (다)일 때 성립한다.

- ① $\geq, \sqrt{a} - \sqrt{b}, a = b$

② $\geq, a - b, a = b = 0$
- ③ $>, \sqrt{a} - \sqrt{b}, a = b$

④ $>, a - b, a = b$
- ⑤ $\geq, \sqrt{a} - \sqrt{b}, a \geq b$

해설

$\left(\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2 = \frac{a}{2} - 2\sqrt{\frac{a}{2} \times \frac{b}{2}} + \frac{b}{2}$
 $= \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$
(가), (나)의 결과에서 $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0$ 이므로
 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
(다) $\left(\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2 \geq 0$ 에서
등호가 성립할 때는 $\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}} = 0$ 일 때이므로
등호는 $a = b$ 일 때 성립한다.

41. 두 집합 $A = \{0, 2, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ 에 대하여 집합 C 가 다음을 만족할 때, 집합 C 를 원소나열법으로 나타낸 것은?

$C = \{x \mid x = a + b, a \in A, b \in B\}$

- ① $\{1, 3\}$

② $\{1, 3, 5\}$

③ $\{1, 3, 5, 7\}$

④ $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

⑤ $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

해설

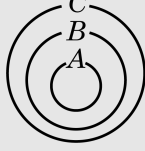
$0+1=1, 0+3=3, 0+5=5, 2+1=3, 2+3=5, 2+5=7, 4+1=5, 4+3=7, 4+5=9$ 이므로 $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 이다.

42. 세 집합 A, B, C 에 대하여 옳지 않은 것을 모두 고르면?

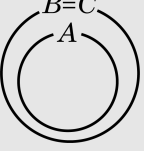
- ① $A \subset B, B \subset C$ 이면 $A \subset C$ 이다.
- ② $A \subset B, B = C$ 이면 $A \subset C$ 이다.
- ③ $A \subset B, B \subset C$ 이면 $A = B$ 이다.
- ④ $A \subset B, B \subset C, C \subset A$ 이면 $A = C$ 이다.
- ⑤ $A \subset B \subset C$ 이면 $n(A) < n(B) < n(C)$ 이다.

해설

①



②



③ 예를 들어 $A = \{1\}, B = \{1, 2\}, C = \{1, 2, 3\}$ 이면 $A \subset B, B \subset C$ 이지만 $A \neq B$

④ $A \subset B, B \subset C, C \subset A$ 이면 $A = B = C$

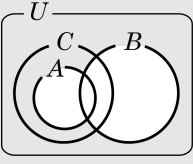
⑤ $A \subset B \subset C$ 이면 $n(A) \leq n(B) \leq n(C)$

43. 세 집합 A, B, C 가 $(A \cap B) \subset (A \cap C), (A \cup C) \subset (B \cup C)$ 를 만족한다.
이 사실로 알 수 있는 것은?

- ① $A \subset B$
- ② $B \subset A$
- ③ $A \subset C$
- ④ $C \subset A$
- ⑤ $B \subset C$

해설

벤다이어그램에서 $(A \cap B) \subset (A \cap C)$ 이고
 $(A \cup C) \subset (B \cup C)$ 가 되려면
 $A = A \cap C$ 이어야 하므로
 $\therefore A \subset C$



44. 집합 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 집합 C 의 개수를 구하여라.

$\neg A \not\subset C$

$\subseteq C \subset B$

$\subseteq a \in C, b \in C$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$\neg$ 과 $\subseteq$ 에 의하여 $a \in C, b \in C, c \notin C$ 이다.
따라서 집합 C 는 a 와 b 를 포함하고 c 를 포함하지 않는 B 의 부분집합이므로 $2^{5-2-1} = 2^2 = 4$ (개) 이다.

45. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 짝수}\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

$\textcircled{1} \quad X \subset A$

$\textcircled{2} \quad 2 \in X$

$\textcircled{3} \quad n(X) \leq 3$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 11 개

해설

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
집합 X 는 2 를 원소로 갖고 원소의 개수가 3 개 이하인 A 의 부분
집합이므로
 $\{2\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{2, 8\}, \{2, 10\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 4, 8\}, \{2, 4, 10\}, \{2,$
 $6, 8\}, \{2, 6, 10\}, \{2, 8, 10\}$ 의 11 개이다.

46. 집합 $A = \{1, 3, 5, 7, \dots, a\}$ 의 부분집합 중에서 원소 $a-4, a-2, a$ 를 동시에 포함하는 부분집합의 개수가 64 개일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

$$64 = 2^6$$

집합 A 의 원소의 개수가 n 개라면,

$$n - 3 = 6, \quad n = 9, \quad n(A) = 9$$

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$$

$$\therefore a = 17$$

47. 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3\}$ 에 대하여 $A \cap X = X$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

- ① 4개 ② 6개 ③ 8개 ④ 12개 ⑤ 16개

해설

집합 X 는 원소 2, 3 을 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합이다.
 $\therefore n(X) = 2^{5-2} = 2^3 = 8$ (개)

48. 두 집합 $A = \{4, 7, a+1, 2a-2\}$, $B = \{3, a+2, b, 9\}$ 에 대하여 $A-B = \{4, 6\}$ 일 때, $A \cup B$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

해설

$A-B = \{4, 6\}$ 이므로
 $4 \in A, 6 \in A$ 이고 $4 \notin B, 6 \notin B, 7 \in B$
 $a+1=6$ 또는 $2a-2=6$
(i) $a+1=6$ 일 때, $a=5$
 $A = \{4, 6, 7, 8\}, B = \{3, 7, b, 9\}$
 $A-B = \{4, 6\}$ 이려면 $b=8$
(ii) $2a-2=6$ 일 때, $a=4$
 $A = \{4, 5, 6, 7\}, B = \{3, 6, b, 9\}$
 $6 \notin B$ 이어야 하므로 $a \neq 4$
 $\therefore A = \{4, 6, 7, 8\}, B = \{3, 7, 8, 9\}$
 $A \cup B = \{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

49. 실수 전체 집합의 두 부분집합 $A = \{a^2 - 2a - 1, 3\}$, $B = \{2, 4 - a, 2a^2 - a\}$ 에 대하여 $B - A^c = \{2\}$ 일 때, $A \cup B$ 의 모든 원소의 합을 구하면?

- ① 10 ② 16 ③ 21 ④ 25 ⑤ 30

해설

$B - A^c = B \cap (A^c)^c = B \cap A = \{2\}$ 이므로 집합 A 에는 원소 2가 들어있다.

따라서 $a^2 - 2a - 1 = 2$, $a^2 - 2a - 3 = 0$

$\therefore a = -1, a = 3$ 이다.

i) $a = -1$ 일 때, $A = \{2, 3\}$, $B = \{2, 3, 5\}$

$\therefore A \cap B = \{2, 3\}$ 이므로 부적당

i) $a = 3$ 일 때, $A = \{2, 3\}$, $B = \{1, 2, 15\}$

$A \cap B = \{2\}$ 이고, 이 때 $A \cup B = \{1, 2, 3, 15\}$

따라서 $A \cup B$ 의 모든 원소의 합은 21이다.

50. 다음은 ‘자연수 n 에 대하여, n^2 이 3의 배수이면 n 도 3의 배수이다.’라는 명제를 대우를 이용하여 증명하는 과정이다. (가), (나), (다), (라), (마)에 들어갈 알맞은 식 또는 수끼리 짝지은 것을 고르면?

대우는 ‘자연수 n 에 대하여, n 이 3의 배수가 아니면 n^2 도 3의 배수가 아니다.’이다. 3의 배수가 아닌 자연수 n 은 3으로 나누면 나머지가 1 또는 2이므로
 $n = (\text{가})$ 또는 $n = (\text{나})$ (단, k 는 음이 아닌 정수)로 가정할 수 있다.
(i) $n = (\text{가})$ 일 때
 $n^2 = 3(\text{다}) + 1$
(ii) $n = (\text{나})$ 일 때
 $n^2 = 3(\text{라}) + 1$
이 되어 n^2 은 3으로 나누면 나머지가 (마)인 자연수가 된다.
(i), (ii)에 의하여 n 이 3의 배수가 아니면 n^2 도 3의 배수가 아니다. 그러므로 주어진 명제는 참인 명제이다.

① $3k - 2, 3k - 1, (3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1), 2$

② $3k - 1, 3k - 2, (3k^2 - 4k + 1), (3k^2 - 2k), 1$

③ $3k + 2, 3k + 1, (3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1), 2$

④ $3k - 2, 3k - 1, (3k^2 - 4k + 1), (3k^2 - 2k), 1$

⑤ $3k + 1, 3k + 2, (3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1), 1$

해설

3의 배수가 아닌 수들은 3으로 나뉘서 1 또는 2가 남아야 하므로 $3k + 1$ 또는 $3k + 2$ 이어야 한다.
제곱을 하여 계산하면 (다), (라)는 각각 $(3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1)$ 가 되고, 나머지가 1인 자연수가 된다.
따라서 주어진 명제는 참인 명제이다.