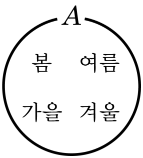
1. 다음 벤 다이어그램을 보고, 집합 A 의 원소를 구하여라.



▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 봄

▷ 정답 : 여름

▷ 정답 : 가을

▷ 정답 : 겨울

해설

집합 A 의 원소는 '봄, 여름, 가을, 겨울' 이다.

2. 집합 $A = \{x \mid x$는 8의 약수$\}$에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $4 \in A$

② $3 \in A$

③ $\varnothing \subset A$

④ $8 \in A$

⑤ $\{1,\ 2,\ 4,\ 8\} \subset A$

해설

② $3 \notin A$에서 3은 A의 원소가 아니다.

3. 다음 중 8의 배수의 집합의 부분집합을 골라라.

㉠ 1의 배수의 집합	㉡ 13의 배수의 집합
㉢ 9의 배수의 집합	㉣ 16의 배수의 집합
㉤ 20의 배수의 집합	

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

8의 배수의 집합을 원소나열법으로 나타내면 $\{8,\ 16,\ 24,\ \cdots\}$ 이다.
따라서 16의 배수의 집합은 8의 배수의 집합이다.

4. 두 집합
$A = \{x \mid x$는 4의 약수$\}, B = \{1, x+1, x+3\}$에 대하여 $A = B$ 일 때, x의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

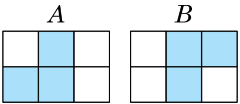
해설

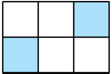
$A = B$이면 두 집합의 모든 원소가 같다. 집합 A를 원소나열법으로 나타내면

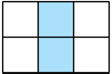
$A = \{x \mid x$는 4의 약수$\} = \{1,\ 2,\ 4\} = \{1,\ x+1,\ x+3\}$이므로

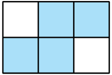
$x = 1$이다.

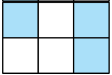
5. 두 집합 A, B가 그림과 같을 때, $A \cup B$를 나타낸 것으로 옳은 것은?

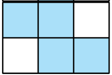


① 

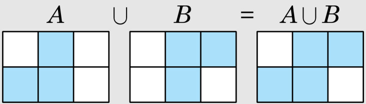
② 

③ 

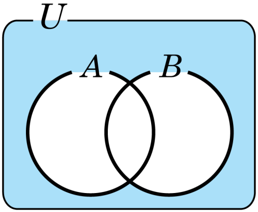
④ 

⑤ 

해설



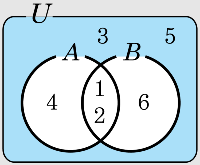
6. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 2, 6\}$ 일 때, 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은?



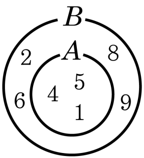
① $\{3\}$ ② $\{5\}$ ③ $\{6\}$ ④ $\{3, 5\}$ ⑤ $\{5, 6\}$

해설

따라서 색칠한 부분을 나타내는 집합은 $\{3, 5\}$ 이다.



7. 다음 벤 다이어그램을 보고 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2 개)



① $B \subset A$

② $A = \{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9\}$

③ $A \cup B = B$

④ $B - A = \varnothing$

⑤ $A - B = \varnothing$

해설

$A \subset B$ 이므로 $A \cup B = B$, $A - B = \varnothing$ 이다.

8. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 20$, $n(A) = 9$, $n(B) = 7, n(A^c) = a$, $n(B^c) = b$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 11 ② 13 ③ 16 ④ 20 ⑤ 24

해설

$a = n(A^c) = n(U) - n(A) = 20 - 9 = 11$
$b = n(B^c) = n(U) - n(B) = 20 - 7 = 13$
$\therefore \quad a + b = 11 + 13 = 24$

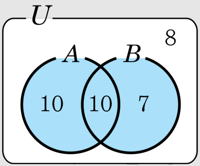
9. 학생 35 명 중에서 인라인 스케이트 인터넷 동호회에 가입한 학생은 20 명, 댄스 스포츠 인터넷 동호회에 가입한 학생은 17 명, 두 곳 모두 가입하지 않은 학생이 8 명이다. 이때 인라인 스케이트나 댄스 스포츠 인터넷 동호회에 가입한 학생 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 명

▷ 정답 : 27 명

해설

주어진 문제를 벤 다이어그램을 활용하여 해결할 수 있다. 벤 다이어그램의 각 영역에 해당하는 학생의 수를 기입하면 다음과 같다.



10. 다음 중 $x > 7$ 의 필요조건이고, 충분조건은 되지 않는 것은?

① $x > 7$ ② $x < 7$ ③ $x \geq 7$ ④ $x \leq 7$ ⑤ $x = 7$

해설

$x > 7$ 범위를 포함하는 것을 고르면 $x \geq 7$

11. 다음 중 옳은 것은?

① $\{\varnothing\} \subset \varnothing$

② $A \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이고 $A \subset B$이면 $\{1,\ 5\} \subset B$

③ $\{4,\ 5\} \subset \{5,\ 2 \times 2\}$

④ $\{a,\ b,\ c,\ e\} \subset \{a,\ b,\ c,\ d,\ f\}$

⑤ $A = \{x \mid x$는 5보다 작은 홀수$\}$ 이면, $\{1,\ 3,\ 5,\ 7\} \subset A$ 이다.

해설

① $\{\varnothing\} \not\subset \varnothing$

② $A \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이고 $A \subset B$이면 $\{1,\ 5\} \not\subset B$

④ $\{a,\ b,\ c,\ e\} \not\subset \{a,\ b,\ c,\ d,\ f\}$

⑤ $A = \{x \mid x$는 5보다 작은 홀수$\}$ 이면,
$\{1,\ 3,\ 5,\ 7\} \not\subset A$

12. 집합 $A=\{4,6,8\}$ 의 부분집합 중 원소 6 을 반드시 포함하고 원소의 개수가 3 개인 부분집합의 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

원소 6 를 제외한 $\{4,\ 8\}$ 의 부분집합은 $\varnothing$, $\{4\}$, $\{8\}$, $\{4,\ 8\}$ 의 4 개가 있으므로, 원소 6 을 반드시 포함하는 집합 $A=\{4,6,8\}$ 의 부분집합에는 $\{6\},\{4,\ 6\},\{6,\ 8\},\{4,\ 6,\ 8\}$ 이 있다. 이 중 원소의 개수가 3 개인 것은 $\{4,\ 6,\ 8\}$ 이므로 원소의 합은 $4+6+8=18$ 이다.

13. 두 집합 $A = \{1,\ 7\}$, $B = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ 에 대하여 $A \subset X \subset B$ 를 만족하는 집합 X 가 될 수 있는 것은?

① $\varnothing$　　② $\{5\}$　　③ $\{1,\ 3\}$

④ $\{1,\ 3,\ 5\}$　　⑤ $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

해설

① $\{1,\ 7\} \not\subset \varnothing$

② $\{1,\ 7\} \not\subset \{5\}$

③ $\{1,\ 7\} \not\subset \{1,\ 3\}$

④ $\{1,\ 7\} \not\subset \{1,\ 3,\ 5\}$

14. 전체집합 U 의 두 부분집합 A 와 B에 대하여 $A \cap B^c = A$, $n(A) = 9$, $n(B) = 14$일 때, $n(A \cup B)$ 의 값을 구하시오. (단, $n(X)$는 집합 X 의 원소의 개수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 23

해설

$A \cap B^c = A - B = A$이므로 A, B는 서로소
$n(A \cap B) = 0$, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 23$

15. 집합 $B = \{x \mid x$는 10 이상 20 미만의 홀수$\}$, $A \cap B = \{13,\ 15,\ 17\}$, $A \cup B = \{10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20\}$ 일 때 집합 A를 구하면?

① $\{13,\ 15\}$

② $\{13,\ 15,\ 17,\ 19,\ 20\}$

③ $\{10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\}$

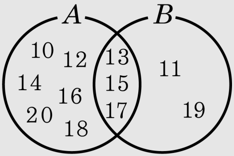
④ $\{10,\ 14,\ 16,\ 18\}$

⑤ $\{10,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 20\}$

해설

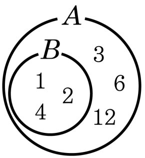
조건제시법을 원소나열법으로 고쳐보면 $B = \{11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19\}$ 가 된다.

$A \cup B = \{10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20\}$, $A \cap B = \{13,\ 15,\ 17\}$ 이 성립하도록 벤 다이어그램에 그려보자.



그러므로 $A = \{10,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 20\}$ 이다.

16. 다음 벤다이어그램을 보고, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?
(답2 개)



① $A=\{3,\ 6,\ 12\}$　② $B=\{1,\ 2,\ 4\}$　③ $A\subset B$
④ $A\cap B=A$　⑤ $A\cup B=A$

해설

① 집합 A는 집합 B부분을 포함하므로 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$ 이다.
③ 집합 A는 집합 B부분을 포함하므로 $B\subset A$ 이다.
④ $A\cap B=B$ 이다.

17. 두 집합 $A=\{1,\ 3,\ a+1\}$,$B=\{\ 3,\ a,\ b\}$ 에 대하여 $A\cap B=\{3,\ 5\}$ 일 때 a , b 의 값은?

① $a=2,\ b=1$ ② $a=3,\ b=2$ ③ $a=4,\ b=5$

④ $a=5,\ b=4$ ⑤ $a=6,\ b=5$

해설

$5\in A$ 이므로 $a+1=5,\ \ a=4$

$5\in B$ 이므로 $b=5$

18. 두 집합 A, B에 대하여 $A = \{x \mid x$는 10 미만의 짝수$\}$, $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8\}$ 일 때, 다음 집합의 원소들의 합을 구하여라.

보기

$\{x \mid x \in B$ 그리고 $x \notin A\}$

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$\{x \mid x \in B$ 그리고 $x \notin A\} = B - A$

$A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$, $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8\}$이므로 $B - A = \{1,\ 3,\ 5\}$

$\therefore 1 + 3 + 5 = 9$

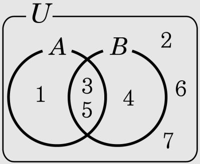
19. 전체집합 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ 의 두 부분집합 $A=\{1,3,5\}, B=\{3,4,5\}$ 에 대하여 $A^c \cap B^c$ 의 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = (\{1,3,4,5\})^c = \{2,6,7\}$ 이므로 원소의 합은 $2+6+7=15$ 이다.



20. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 3, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ 에 대하여 $A - (A \cap B)$ 는?

① $\{1\}$ ② $\{3\}$ ③ $\{1, 3\}$ ④ $\{3, 5\}$ ⑤ $\{1, 5\}$

해설

$A - (A \cap B) = A - B = \{1, 3, 5, 6\} - \{5, 6\} = \{1, 3\}$ 이다.

21. 두 집합 $A=\{1,3,5,7\}$, $B=\{1,3,8\}$ 일 때, $(A-B)\subset X$, $X-A=\varnothing$ 을 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$(A-B)\subset X\subset A$,즉 $\{5,\ 7\}\subset X\subset\{1,3,5,7\}$ 이므로 집합 X 의 개수는 $2\times2=4$(개) 이다.

22. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참일 때, 조건 p 를 만족시키는 집합 P 와 조건 q 를 만족시키는 집합 Q 사이의 포함 관계를 옳게 나타낸 것은?

① $Q \subset P$

② $Q^c \subset P^c$

③ $Q \subset P^c$

④ $Q^c \subset P$

⑤ $Q = P^c$

해설

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

$\therefore\ \mathrm{Q}^c \subset \mathrm{P}^c$

23. 다음 중에서 명제 '자연수 n 의 각 자리 숫자의 합이 6 의 배수이면, n 은 6 의 배수이다.'가 거짓임을 보여주는 n 의 값은?

① 30 ② 33 ③ 40

④ 42 ⑤ 답 없음

해설

실제로 주어진 명제는 참이 아니다. 33 의 경우 $3+3=6$ 이지만, 33 은 6 의 배수가 아니다.

24. $a > b > c > 0$일 때, $A = \dfrac{c}{b-a}$, $B = \dfrac{a}{b-c}$, $C = \dfrac{b}{a-c}$의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < C < A$

④ $B < A < C$ ⑤ $C < A < B$

해설

$a > b > c > 0$에서

$b-a < 0,\ b-c > 0,\ a-c > 0$이므로

$$A = \frac{c}{b-a} < 0,\ B = \frac{a}{b-c} > 0$$

$$C = \frac{b}{a-c} > 0$$

$$B - C = \frac{a}{b-c} - \frac{b}{a-c} = \frac{a(a-c)-b(b-c)}{(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{a^2-ac-b^2+bc}{(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{(a-b)(a+b)-c(a-b)}{(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{(a-b)(a+b-c)}{(b-c)(a-c)} > 0$$

$\therefore B > C$

따라서 $A < 0,\ B > C > 0$이므로

$B > C > A$이다.

25. a, b 가 실수일 때, 다음은 부등식 $|a| + |b| \geq |a + b|$ 을 증명한 것이다. 증명과정에 쓰이지 <u>않은</u> 성질을 고르면?

증명

$(|a| + |b|)^2 - (|a + b|)^2$
$= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2$
$= \ a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2$
$= \ 2(|ab| - ab)\ 0$
$\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (|a + b|)^2$
$\therefore |a| + |b| \geq |a + b|$

① $|a| \geq a$

② $a \geq b$, $b \geq c$ 이면 $a \geq c$

③ $|a|^2 = a^2$

④ $a - b \geq 0$ 이면 $a \geq b$

⑤ $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a^2 \geq b^2$ 이면 $a \geq b$

해설

$(|a| + |b|)^2 - (|a + b|)^2$
$= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2$ (③이 쓰임)
$= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2$
$= 2(|ab| - ab) \geq 0$ (①이 쓰임)
$\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (|a + b|)^2$ (④가 쓰임)
$\therefore |a| + |b| \geq |a + b|$ (⑤가 쓰임)
따라서, ②는 쓰이지 않았다.

26. x가 양의 실수 일 때, $x^2+1+\dfrac{1}{x^2}$ 의 최솟값과 그 때의 x값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 1

해설

$x^2>0,\ \dfrac{1}{x^2}>0$이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2+1+\frac{1}{x^2}\ge 2\sqrt{x^2\times\frac{1}{x^2}}+1\ge 2+1=3$$

등호는 $x^2=\dfrac{1}{x^2}$일 때 성립하므로 $x^4=1$

따라서 양의 실수 x는 1이다.

최솟값은 3이고, x값은 1이다.

27. a, b, x y가 실수이고, $a^2+b^2=8, x^2+y^2=2$일 때 $ax+by$의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -16　② -4　③ 0　④ 4　⑤ 16

해설

a, b, x, y가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$
$8 \times 2 \geq (ax+by)^2$
$\therefore -4 \leq ax+by \leq 4$
(최댓값) $\times$(최솟값)$=-16$

28. 세 집합 A, B, X 에 대하여 $(A\cup B)\cap X = X$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $X \subset (A \cup B)$ ② $(A \cap B) \subset X$

③ $(A \cup B) \subset X$ ④ $A \cap B = \varnothing$

⑤ $(A \cap B) \subset X \subset (A \cup B)$

해설

$(A \cup B) \cap X = X$ 이면 $X \subset (A \cup B)$ 이다.
② $(A \cap B) \subset X$ 라고 말할 수 없다.
④ $A \cap B = \varnothing$ 라고 말할 수 없다.

29. 전체집합 $U = \{x \mid x$는 100 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 $A = \{x \mid x$는 6의 배수$\}$, $B = \{x \mid x$는 8의 배수$\}$라 할 때, 집합 $A - B^c$의 원소의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$n(A) = n(A_6) = 16$
$n(B) = n(A_8) = 12$

$$\begin{aligned} n(A - B^c) &= n(A \cap B) \\ &= n(A_6 \cap A_8) \\ &= n(A_{24}) = 4 \end{aligned}$$

30. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 연산 $\star$을 $A \star B = (A \cup B)^c \cup (A \cap B)$ 로 정의할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $A \star \varnothing = A$

② $A \star U = A^c$

③ $A \star A^c = \varnothing$

④ $A \star B \neq B \star A$

⑤ $A \star B^c \neq A^c \star B$

해설

① $A \star \varnothing = (A \cup \varnothing)^c \cup (A \cap \varnothing)$
$= A^c \cup \varnothing = A^c$

② $A \star U = (A \cup U)^c \cup (A \cap U)$
$= U^c \cup A$
$= \varnothing \cup A = A$

③ $A \star A^c = (A \cup A^c)^c \cup (A \cap A^c)$
$= U^c \cup \varnothing = \varnothing$

④ $A \star B = (A \cup B)^c \cup (A \cap B)$
$= (B \cup A)^c \cup (B \cap A)$
$= B \star A$

⑤ $A \star B^c = (A \cup B^c)^c \cup (A \cap B^c)$
$= (A^c \cap B) \cup (A^c \cup B)^c$
$= (A^c \cup B)^c \cup (A^c \cap B) = A^c \star B$

31. 전체집합 $U = \{x|x$는 8 이하의 자연수$\}$ 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 $A = \{1,2,4,8\}$, $B = \{2,4,7\}$, $C = \{4,6,8\}$일 때, $(A \cap B) \cap C^c$ 은?

① $\{1\}$ ② $\{2\}$ ③ $\{1,2\}$

④ $\{1,2,3\}$ ⑤ $\{1,2,5,6\}$

해설

$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ 이므로

$$(A \cap B) \cap C^c = (A \cap B) - C$$
$$= \{2,4\} - \{4,6,8\}$$
$$= \{2\}$$ 이다.

32. 전체집합 $U = \{x \mid x$는 15 이하의 자연수$\}$의 세 부분집합 $A = \{x \mid x$는 2의 배수$\}$, $B = \{x \mid x$는 12의 약수$\}$, $C = \{x \mid x$는 3의 배수$\}$에 대하여 연산 ◎를 $A ◎ B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$로 정의할 때, $n((A ◎ B) ◎ (A ◎ C))$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 14,\ 15\}$

$A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\ ,\ 10,\ 12,\ 14\}$

$B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

$C = \{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15\}$

$A ◎ B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$

$\qquad = (A - B) \cup (B - A)$이므로

$A ◎ B = \{8,\ 10,\ 14\} \cup \{1,\ 3\}$

$A ◎ C = \{2,\ 4,\ 8,\ 10,\ 14\} \cup \{3,\ 9,\ 15\}$

$\therefore (A ◎ B) ◎ (A ◎ C)$

$= \{1,\ 3,\ 8,\ 10,\ 14\} ◎ \{2,\ 3,\ 4,\ 8,\ 9,\ 10,\ 14,\ 15\}$

$= \{1\} \cup \{2,\ 4,\ 9,\ 15\}$

$\therefore n((A ◎ B) ◎ (A ◎ C)) = 5$

33. 실수 x에 대한 두 조건

p : $\lvert x-2\rvert < a$ (단, $a>0$)
q : $x<-3$ 또는 $x>1$

에 대하여 명제 $p \rightarrow q$가 참이 되기 위한 a의 값의 범위를 $\alpha < a \le \beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하여라.

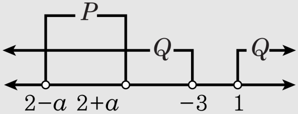
▶ 답 :

▷ 정답 : 1

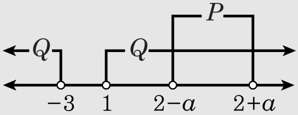
해설

$\lvert x-2\rvert < a$ 에서 $-a < x-2 < a$ $\therefore 2-a < x < 2+a$ $\therefore$
$P=\{x \mid 2-a<x<2+a\}$, $Q=\{x \mid x<-3$ 또는 $x>1\}$
따라서 $P \subset Q$가 되려면 $2+a \le -3$ $\cdots$ ㉠ 또는 $2-a \ge 1$ $\cdots$ ㉡,
즉, $a \le -5$ 또는 $a \le 1$
그런데 $a>0$이므로 구하는 a의 범위는 $0<a\le 1$

㉠ :



㉡ :



$\therefore \alpha=0,\ \beta=1$
$\therefore \alpha+\beta=1$

34. 실수 x에 대하여 다음 명제가 참일 때, a의 최솟값을 구하여라.

$x > a$이면 $\lvert x-2 \rvert > 4$

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

주어진 명제가 참이므로
대우 '$\lvert x-2 \rvert \le 4$ 이면 $x \le a$ 이다.' 가 참이다.
$\lvert x-2 \rvert \le 4$ 에서
$-4 \le x-2 \le 4,\quad -2 \le x \le 6$이므로
$\therefore\ a \ge 6$
따라서 a 의 최솟값은 6이다.

35. 두 명제 $p \to \sim q$와 $\sim r \to q$가 참일 때, 다음 중 항상 참이라고 할 수 없는 것은? (단, $\sim p$는 p 의 부정이다.)

① $q \to \sim p$ ② $p \to r$ ③ $q \to \sim r$

④ $\sim q \to r$ ⑤ $\sim r \to \sim p$

해설

$p \to \sim q$, $\sim r \to q$의 대우인 $q \to \sim p$, $\sim q \to r$도 참이다.
$p \to \sim q \to r$이므로 $p \to r$, 그 대우인 $\sim r \to \sim p$도 참이다.

36. 다음에서 조건 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은?

① $p : x = 0$이고 $y = 0$, $q : xy = 0$

② $p : x^2 = 9$, $q : x = 3$

③ $p : x, y$는 모두 짝수, $q : x + y$는 짝수

④ $p : x \neq 0$이고 $y \neq 0$, $q : xy \neq 0$

⑤ $p : x$는 유리수, $q : x^2$ 은 유리수

해설

① $q \to p$: 거짓 $(x = 0,\ y = 1)$
② $p \to q$: 거짓 ($x^2 = 9$ 이면 $x = \pm 3$)
③ $q \to p$: 거짓 ($x = 1,\ y = 3$ 이면 $x + y = 4$)
④ 필요충분조건
⑤ $q \to p$: 거짓 ($x = \sqrt{2}$ 이면 $x^2 = 2$)

37. 두 조건 $p : -5 \leq x < 6$, $q : 2a-3 < x \leq a+2$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : $a = 5$ 개

해설

두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하면

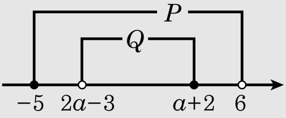
$P = \{x \mid -5 \leq x < 6\}$,

$Q = \{x \mid 2a-3 < x \leq a+2\}$

이때, p 가 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$

$\therefore\ Q \subset P$

따라서, 다음 수직선에서



$2a-3 \geq -5$ 이고 $a+2 < 6$

$2a \geq -2$ 이고 $a < 4$

$\therefore\ -1 \leq a < 4$

따라서, 정수 a 는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 의 5 개이다.

38. 전체집합 U에 대하여 두 집합이 $A=\{x\mid x>3\}$, $B=\{x\mid x\le -1\}$ 일 때, 주어진 조건 또는 명제를 집합으로 바르게 표현한 것은?

① 조건 : $x<3$, 집합표현 : A^c

② 조건 : $x\ge -1$, 집합표현 : B^c

③ 조건 : $-1<x\le 3$, 집합표현 : $(A\cap B)^c$

④ 명제 : $x>3 \ \rightarrow \ x>-1$, 집합표현 : $A\subset B^c$

⑤ 조건 : $x\le 3$ 또는 $x>-1$, 집합표현 : $(A\cup B)^c$

해설

① A^c 은 $x\le 3$ 이다.
② B^c 은 $x>-1$ 이다.
③ $(A\cap B)^c$ 에서 $A\cap B=\phi$ 이므로 $(A\cap B)^c$ 은 전체집합 U이다.
⑤ $(A\cup B)^c$ 은 $-1<x\le 3$이다.

39. 다음 부등식에 관한 설명 중에서 옳은 것은? (단, a, b, x, y는 실수임)

① $a \geq b \Leftrightarrow a - b \leq 0$

② $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$

③ $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$(단, $ax = by$일 때, 등호성립)

④ $a^2 + b^2 \geq ab$(단, $a = b$일 때, 등호 성립)

⑤ 두 양수 a, b에 대하여 $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \dfrac{2ab}{a+b}$(단, $a = b$일 때, 등호 성립)

해설

②의 반례 : a, b가 음수인 경우

③ $(a^2+b^2)(x^2+y^2) - (ax+by)^2$

$= (a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2)$

$-(a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2)$

$= a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2$

$= (ay - bx)^2 \geq 0$ 단, 등호는 $ay = bx$일때 성립

④ $a^2 + b^2 - ab$

$$= \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$$

등호는 $a = b = 0$일때 성립

⑤ $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \dfrac{2ab}{a+b}$

($\because$ 산술평균 $\geq$ 기하평균 $\geq$ 조화평균)

40. $a \geq 0,\ b \geq 0$일 때, $\dfrac{a+b}{2}$ (가) $\sqrt{ab}$임을 다음과 같은 과정으로 증명을 하였다. 이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 쓴 것을 고르면?

증명

$\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \dfrac{(\text{나})^2}{2}$ 이므로
부등식 $\dfrac{a+b}{2}$ (가) $\sqrt{ab}$이 성립함을 알 수 있다.
이 때, 등호는 (다)일 때 성립한다.

① $\geq,\ \sqrt{a}-\sqrt{b},\ a=b$
② $\geq,\ a-b,\ a=b=0$
③ $>,\ \sqrt{a}-\sqrt{b},\ a=b$
④ $>,\ a-b,\ a=b$
⑤ $\geq,\ \sqrt{a}-\sqrt{b},\ a \geq b$

해설

$$\left(\sqrt{\frac{a}{2}}-\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2 = \frac{a}{2} - 2\sqrt{\frac{a}{2}\times\frac{b}{2}} + \frac{b}{2}$$

$$= \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$$

(가) , (나)의 결과에서 $\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0$이므로

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

(다) $\left(\sqrt{\dfrac{a}{2}}-\sqrt{\dfrac{b}{2}}\right)^2 \geq 0$에서

등호가 성립할 때는 $\sqrt{\dfrac{a}{2}}-\sqrt{\dfrac{b}{2}}=0$일 때이므로

등호는 $a=b$일 때 성립한다.

41. 두 집합 $A=\{0,\ 2,\ 4\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5\}$ 에 대하여 집합 C 가 다음을 만족할 때, 집합 C 를 원소나열법으로 나타낸 것은?

$$C=\{x\mid x=a+b,\ a\in A,\ b\in B\}$$

① $\{1,\ 3\}$
② $\{1,\ 3,\ 5\}$
③ $\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$
④ $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$
⑤ $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$

해설

$0+1=1$, $0+3=3$, $0+5=5$, $2+1=3$, $2+3=5$, $2+5=7$, $4+1=5$, $4+3=7$, $4+5=9$ 이므로 $C=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ 이다.

42. 세 집합 A, B, C 에 대하여 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① $A \subset B$, $B \subset C$ 이면 $A \subset C$ 이다.

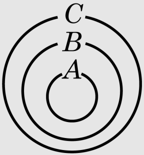
② $A \subset B$, $B = C$ 이면 $A \subset C$ 이다.

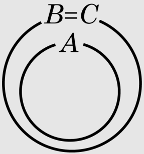
③ $A \subset B$, $B \subset C$ 이면 $A = B$ 이다.

④ $A \subset B$, $B \subset C$, $C \subset A$ 이면 $A = C$ 이다.

⑤ $A \subset B \subset C$ 이면 $n(A) < n(B) < n(C)$ 이다.

해설

① 

② 

③ 예를 들어 $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1,\ 2,\ 3\}$ 이면 $A \subset B$, $B \subset C$ 이지만 $A \neq B$

④ $A \subset B$, $B \subset C$, $C \subset A$ 이면 $A = B = C$

⑤ $A \subset B \subset C$ 이면 $n(A) \leq n(B) \leq n(C)$

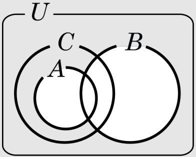
43. 세 집합 A, B, C 가 $(A\cap B)\subset(A\cap C)$, $(A\cup C)\subset(B\cup C)$ 를 만족한다. 이 사실로 알 수 있는 것은?

① $A\subset B$　② $B\subset A$　③ $A\subset C$

④ $C\subset A$　⑤ $B\subset C$

해설

벤다이어그램에서 $(A\cap B)\subset(A\cap C)$ 이고
$(A\cup C)\subset(B\cup C)$ 가 되려면
$A=A\cap C$ 이어야 하므로
$\therefore\ A\subset C$



44. 집합 $A = \{a,\ b,\ c\}$, $B = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 집합 C 의 개수를 구하여라.

㉠ $A \not\subset C$	㉡ $C \subset B$	㉢ $a \in C,\ b \in C$

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

㉠과 ㉢에 의하여 $a \in C,\ b \in C,\ c \notin C$ 이다.
따라서 집합 C 는 a 와 b 를 포함하고 c 를 포함하지 않는 B 의 부분집합이므로 $2^{5-2-1} = 2^2 = 4$ (개) 이다.

45. 집합 $A = \{x \mid x$는 10 이하의 짝수$\}$에 대하여 다음을 만족하는 집합 X의 개수를 구하여라.

㉠ $X \subset A$	㉡ $2 \in X$	㉢ $n(X) \leq 3$

▶ **답 :** ____ 개

▷ **정답 :** 11 개

해설

$A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

집합 X는 2를 원소로 갖고 원소의 개수가 3개 이하인 A의 부분집합이므로

$\{2\}$, $\{2,\ 4\}$, $\{2,\ 6\}$, $\{2,\ 8\}$, $\{2,\ 10\}$, $\{2,\ 4,\ 6\}$, $\{2,\ 4,\ 8\}$, $\{2,\ 4,\ 10\}$, $\{2,\ 6,\ 8\}$, $\{2,\ 6,\ 10\}$, $\{2,\ 8,\ 10\}$의 11 개이다.

46. 집합 $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7, \cdots,\ a\}$ 의 부분집합 중에서 원소 $a-4,\ a-2,\ a$ 를 동시에 포함하는 부분집합의 개수가 64 개일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

$64 = 2^6$

집합 A 의 원소의 개수가 n 개라면,

$n-3=6, \quad n=9, \quad n(A)=9$

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$

$\therefore \ a = 17$

47. 두 집합 $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{2,3\}$ 에 대하여 $A\cap X=X$, $(A\cap B)\cup X=X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 4개 ② 6개 ③ 8개 ④ 12개 ⑤ 16개

해설

집합 X 는 원소 $2,3$ 을 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합이다.
$\therefore\ n(X)=2^{5-2}=2^3=8$ (개)

48. 두 집합 $A = \{4,\ 7,\ a+1,\ 2a-2\}$, $B = \{3,\ a+2,\ b,\ 9\}$ 에 대하여 $A - B = \{4,\ 6\}$ 일 때, $A \cup B$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

해설

$A - B = \{4, 6\}$ 이므로

$4 \in A,\ 6 \in A$ 이고 $4 \notin B,\ 6 \notin B,\ 7 \in B$

$a + 1 = 6$ 또는 $2a - 2 = 6$

(i) $a + 1 = 6$ 일 때, $a = 5$

$A = \{4, 6, 7, 8\}$, $B = \{3, 7, b, 9\}$

$A - B = \{4, 6\}$ 이려면 $b = 8$

(ii) $2a - 2 = 6$ 일 때, $a = 4$

$A = \{4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 6, b, 9\}$

$6 \notin B$ 이어야 하므로 $a \neq 4$

$\therefore A = \{4, 6, 7, 8\}$, $B = \{3, 7, 8, 9\}$

$A \cup B = \{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

49. 실수 전체 집합의 두 부분집합 $A=\{a^2-2a-1, 3\}$, $B=\{2, 4-a, 2a^2-a\}$에 대하여 $B-A^c=\{2\}$일 때, $A\cup B$의 모든 원소의 합을 구하면?

① 10 ② 16 ③ 21 ④ 25 ⑤ 30

해설

$B-A^c=B\cap(A^c)^c=B\cap A=\{2\}$이므로 집합 A에는 원소 2가 들어있다.

따라서 $a^2-2a-1=2$, $a^2-2a-3=0$

$\therefore a=-1, a=3$이다.

ⅰ) $a=-1$ 일 때, $A=\{2,3\}$, $B=\{2,3,5\}$

$\therefore A\cap B=\{2,3\}$이므로 부적당

ⅰ) $a=3$ 일 때, $A=\{2,3\}$, $B=\{1,2,15\}$

$A\cap B=\{2\}$이고, 이 때 $A\cup B=\{1,2,3,15\}$

따라서 $A\cup B$의 모든 원소의 합은 21이다.

50. 다음은 '자연수 n 에 대하여, n^2 이 3 의 배수이면 n 도 3 의 배수이다.' 라는 명제를 대우를 이용하여 증명하는 과정이다. (가), (나), (다), (라), (마) 에 들어갈 알맞은 식 또는 수끼리 짝지은 것을 고르면?

> 대우는 '자연수 n 에 대하여, n 이 3 의 배수가 아니면 n^2 도 3 의 배수가 아니다.' 이다. 3 의 배수가 아닌 자연수 n 은 3 으로 나누면 나머지가 1 또는 2 이므로
> $n=($ 가 $)$ 또는 $n=($ 나 $)$ (단, k는 음이 아닌 정수)
> 로 가정할 수 있다.
> (i) $n=($ 가 $)$ 일 때
> $n^2=3($ 다 $)+1$
> (ii) $n=($ 나 $)$ 일 때
> $n^2=3($ 라 $)+1$
> 이 되어 n^2 은 3 으로 나누면 나머지가 (마) 인 자연수가 된다.
> (i), (ii) 에 의하여 n 이 3 의 배수가 아니면 n^2 도 3 의 배수가 아니다. 그러므로 주어진 명제는 참인 명제이다.

① $3k-2,\ 3k-1,\ (3k^2+2k),\ (3k^2+4k+1),\ 2$

② $3k-1,\ 3k-2,\ (3k^2-4k+1),\ (3k^2-2k),\ 1$

③ $3k+2,\ 3k+1,\ (3k^2+2k),\ (3k^2+4k+1),\ 2$

④ $3k-2,\ 3k-1,\ (3k^2-4k+1),\ (3k^2-2k),\ 1$

⑤ $3k+1,\ 3k+2,\ (3k^2+2k),\ (3k^2+4k+1),\ 1$

해설

3 의 배수가 아닌 수들은 3 으로 나눠서 1 또는 2 가 남아야 하므로 $3k+1$ 또는 $3k+2$ 이어야 한다.
제곱을 하여 계산하면 (다), (라)는 각각 $(3k^2+2k)$, $(3k^2+4k+1)$ 가 되고, 나머지가 1 인 자연수가 된다.
따라서 주어진 명제는 참인 명제이다.