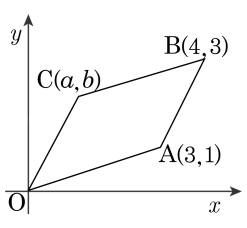
1. 다음 그림과 같이 네 점 A(3, 1), B(4, 3), C(a, b), O(0, 0)을 꼭짓점으로 하는 평행사변형 OABC에서 $a+b$의 값을 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

평행사변형 OABC에서 두 대각선의 중점은 일치하므로

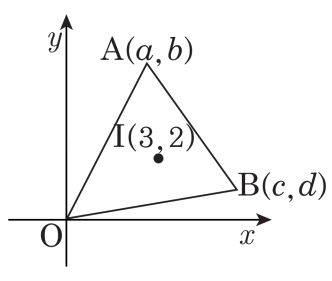
$\left(2, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$

$\frac{a+3}{2} = 2$에서 $a = 1$

$\frac{b+1}{2} = \frac{3}{2}$ 에서 $b = 2$

$\therefore a+b = 3$

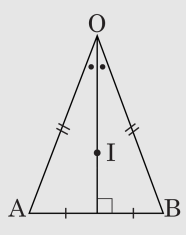
2. 그림과 같이 세 점 O(0, 0), A(a, b), B(c, d) 로 이루어진 삼각형 OAB 의 내심 I 의 좌표가 (3, 2) 이다. $\overline{OA} = \overline{OB}$ 일 때, $\dfrac{3c+2d}{3a+2b}$ 의 값은?



① 1 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ $-\dfrac{2}{3}$
④ $-\dfrac{3}{2}$ ⑤ 알 수 없다

해설

△OAB 가 $\overline{OA} = \overline{OB}$ 인 이등변삼각형이고,
∠AOI = ∠BOI 이므로
$\overline{OI}$ 는 $\overline{AB}$ 와 수직이다.



$\overline{OI}$ 의 기울기가 $\dfrac{2}{3}$ 이므로

$\overline{AB}$ 의 기울기는 $-\dfrac{3}{2}$ 이다.

$\therefore \dfrac{b-d}{a-c} = -\dfrac{3}{2}$

$\therefore 3a+2b = 3c+2d$

$\therefore \dfrac{3c+2d}{3a+2b} = 1$

3. 좌표평면 위에서 원점과 직선 $x-y-3+k(x+y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은? (단, k 는 상수이다.)

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ④ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

해설

$x-y-3+k(x+y)=0$ 에서
$(k+1)x+(k-1)y-3=0$
원점에서 이 직선까지의 거리

$$f(k)=\frac{|-3|}{\sqrt{(k+1)^2+(k-1)^2}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2(k^2+1)}}$$

따라서 $f(k)$ 는 분모가 최소일 때 최대가 되므로 $f(k)$ 의 최대값은

$k=0$ 일 때 $\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

4. 좌표평면 위의 세 점 $O(0,0)$, $A(3,1), B(1,3)$ 에 대하여 선분 OA, AB, BO 를 $2:1$ 로 내분하는 점을 차례로 P, Q, R 라 할 때, $\triangle PQR$ 의 무게중심의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ ② $(1,-1)$ ③ $(1,1)$
④ $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ ⑤ $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

해설

$P(x_1, y_1)$ 이라 하면

$$x_1 = \frac{2\cdot 3 + 1\cdot 0}{2+1},$$

$$y_1 = \frac{2\cdot 1 + 1\cdot 0}{2+1}$$

$$\therefore P\left(2, \frac{2}{3}\right)$$

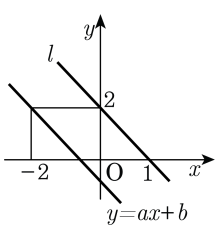
점 Q, R도 마찬가지 방법으로 계산하면

$$Q\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, 1\right)$$

따라서 $\triangle PQR$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+\frac{5}{3}+\frac{1}{3}}{3}, \frac{\frac{2}{3}+\frac{7}{3}+1}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

5. 다음 직선 l 과 평행하면서 점 $(-2,\ 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y = ax + b$ 이다. 이때, $a + b$ 의 값은 ?



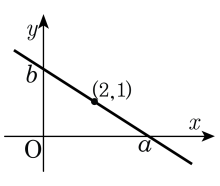
① -4 ② -3 ③ -2

④ -1 ⑤ 0

해설

그림의 직선의 기울기는 -2 이므로
구하는 직선은 기울기가 -2 이고 점 $(-2,\ 2)$ 를 지난다.
$y - 2 = -2(x + 2),\ y = -2x - 2$
$y = -2x - 2,\ a = -2, b = -2$ 이므로,
$\therefore\ a + b = -4$

6. 다음 그림에서 a와 b사이의 관계식을 나타내면?



① $a+\frac{a}{2}=1$ ② $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$

③ $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$ ④ $\frac{2}{a}+b=1$

⑤ $\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}=1$

해설

x 절편이 a, y 절편이 b 인 직선의 방정식은

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 이다.

따라서 $(2,\ 1)$ 을 지나므로

$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$ 이다.

7. 직선 $ax+by+c=0$에 대하여 $ab<0$, $bc>0$일 때, 이 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

▶ 답 : 사분면

▷ 정답 : 제 2사분면

해설

$ax+by+c=0$에서

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

주어진 조건에서

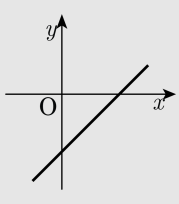
$ab<0$, $bc>0$ 이므로

$-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}<0$

$\therefore$ (기울기)>0 , (y 절편)<0

따라서 주어진 직선은 다음 그림과 같으므로

지나지 않는 사분면은 제 2 사분면이다.



8. $x,\ y$에 대한 연립방정식 $2x+(a+2)y-1=0,\ (a-3)x-2y+2=0$이 해를 갖지 않을 때, 상수 a의 값을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$2x+(a+2)y-1=0,\ (a-3)x-2y+2=0$이 평행해야 한다.
따라서 평행할 조건을 구하면,

$\frac{2}{a-3}=\frac{a+2}{-2}\neq-\frac{1}{2}$

$\frac{2}{a-3}=\frac{a+2}{-2}$에서

$a^2-a-2=0,\ (a-2)(a+1)=0$

$\therefore\ a=2$ 또는 $a=-1$

1) $a=2$일 때,

$\frac{2}{-1}=\frac{4}{-2}\neq-\frac{1}{2}$ $\therefore$ 평행

2) $a=-1$일 때,

$\frac{2}{-4}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$ $\therefore$ 일치

따라서, 1), 2)에 의하여 $a=2$

9. 점 Q가 직선 $2x+y-4=0$ 위를 움직일 때, 점 $A(-2,3)$과 Q를 잇는 선분 AQ의 중점 P의 자취의 방정식은?

① $4x+2y-3=0$ ② $2x+3y+1=0$

③ $4x-3y+1=0$ ④ $x-4y-3=0$

⑤ $-x+y+2=0$

해설

점 $A(-2,3)$, $Q(x,\ y)$의 중점의 좌표를
$P(X,\ Y)$ 라 하면,

$P(X,\ Y)=P\left(\frac{x-2}{2},\ \frac{y+3}{2}\right)$ 이므로

$X=\frac{x-2}{2}$, $Y=\frac{y+3}{2}$

$\therefore\ x=2X+2$, $y=2Y-3$

이것을 $2x+y-4=0$ 에 대입하면

$2(2X+2)+(2Y-3)-4=0$

$4X+2Y-3=0$

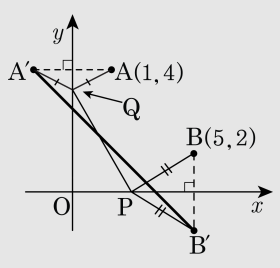
$\therefore\ 4x+2y-3=0$

10. 두 점 $\mathrm{A}(1,4), \mathrm{B}(5,2)$에 대하여 점 P는 x축 위를 움직이고 점 Q는 y축 위를 움직일 때, $\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값을 구하면?

① $2\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

해설

다음 그림과 같이 점 A를 y축에 대하여
대칭이동한 점을 A′, 점 B를
x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라고 하면



$\mathrm{A}'(-1,4), \mathrm{B}'(5,-2)$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{BP}} &= \overline{\mathrm{A'Q}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{B'P}} \\ &\geq \overline{\mathrm{A'B'}} \\ &= \sqrt{(5+1)^2+(-2-4)^2} \\ &= \sqrt{72}=6\sqrt{2}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $6\sqrt{2}$이다.

11. 세 꼭짓점이 A$(-1,\ -1)$, B$(4,\ 3)$, C$(0,\ 1)$인 $\triangle$ABC에서 $\overline{\text{AB}}$, $\overline{\text{BC}}$, $\overline{\text{CA}}$를 $2:3$으로 내분하는 점을 각각 D, E, F라 하자. $\triangle$DEF의 무게중심을 $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\triangle$ABC에서 각 변을 $m:n$으로 내분하는 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심은 $\triangle$ABC의 무게중심과 일치한다.

$\triangle$ABC의 무게중심은

$$\left(\frac{-1+4+0}{3},\ \frac{-1+3+1}{3}\right),$$

즉 $(1,\ 1)$이므로 $\triangle$DEF의 무게중심은 $(1,\ 1)$이다.

$\therefore\ a+b=1+1=2$

12. 원 $x^2+y^2-6x-2y+6=0$ 과 직선 $3x+4y-a=0$ 이 서로 접할 때, 모든 a 값의 합을 구하여라.

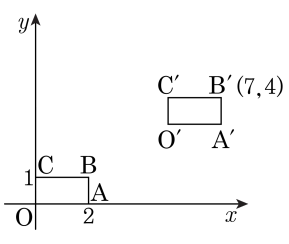
▶ 답:

▷ 정답: 26

해설

원의 방정식을 표준형으로 바꾸면
$(x-3)^2+(y-1)^2=2^2$
원의 중심 $(3,1)$ 에서 직선까지의 거리 d가 2이면 접하므로
$d=\dfrac{|3\cdot 3+4\cdot 1-a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$
$\therefore\ |13-a|=10 \Leftrightarrow 13-a=\pm 10$
따라서, $a=3$ 또는 23 이므로
모든 a 값들의 합은 26

13. 좌표평면에서 원점 O와 두 점 A(2, 0), C(0, 1)에 대하여 $\overline{OA}, \overline{OC}$를 두 변으로 하는 직사각형 OABC를 평행 이동하여 $O \to O', A \to A', B \to B', C \to C'$으로 옮겨지도록 하였다. 점 B′의 좌표가 (7, 4)일 때, 직선 A′C′의 방정식은?



① $x + 2y - 10 = 0$ ② $x + 2y - 13 = 0$

③ $x + 2y - 16 = 0$ ④ $2x + 3y - 17 = 0$

⑤ $2x + 3y - 19 = 0$

해설

점 B(2, 1)이 점 B′(7, 4)로 옮겨지므로
직사각형 O′A′B′C′은 직사각형 OABC를
x 축의 방향으로 5, y 축의 방향으로 3만큼 평행 이동한 것이다.
따라서 두 점 A(2, 0), C(0, 1)은 각각 A′(7, 3), C′(5, 4)로 옮겨지므로

직선 A′C′의 방정식은 $y - 3 = \dfrac{4-3}{5-7}(x-7)$

$\therefore\ y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{13}{2}$

$\therefore\ x + 2y - 13 = 0$

해설

직선 A′C′은 직선 AC를 평행이동한 것이므로
직선 A′C′의 기울기는 직선 AC의 기울기인 $-\dfrac{1}{2}$이다.
한편, $\overline{AB} = \overline{A'B'} = 1$에서 점 A′의 좌표는 (7, 3)이므로
이것을 $y = -\dfrac{1}{2}x + b$에 대입하여 정리하면 $b = \dfrac{13}{2}$이다.
따라서 구하는 직선 A′C′의 방정식은
$y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{13}{2}$,
$\therefore\ x + 2y - 13 = 0$

14. 포물선 $y = x^2$ 을 x 축에 대하여 대칭이동시킨 후, 다시 y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동시켰더니 직선 $y = x - 1$ 에 접하였다. 이 때, a 의 값은?

① $-\frac{7}{4}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ 0

해설

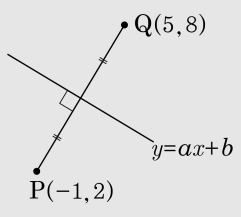
$y = x^2$ 을 x 축에 대하여 대칭이동하면 $-y = x^2$ 이고
이를 다시 y 축 방향으로 a 만큼 평행이동 하면,
$-(y - a) = x^2$, $y = -x^2 + a$
이 곡선이 $y = x - 1$ 에 접하려면
$x - 1 = -x^2 + a$, $x^2 + x - a - 1 = 0$ 에서
$D = 1^2 - 4(-a - 1) = 0$
$\therefore\ a = -\frac{5}{4}$

15. 두 점 P(−1, 2), Q(5, 8) 이 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, $a + b$ 의 값은?

① 10 ② 9 ③ 8 ④ 7 ⑤ 6

해설

$\overline{PQ}$ 의 중점이 $y = ax + b$ 위에 있으므로,



$\overline{PQ}$ 의 중점 :

$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{2+8}{2}\right) = (2, 5)$

$\therefore 5 = 2a + b$

$\overline{PQ}$ 기울기 : $\frac{2-8}{-1-5} = 1$

$\therefore a = -1$

위 식에 대입하면 : $b = 7$

$\therefore a + b = -1 + 7 = 6$

16. 수직선 위의 두 점 A, B 에 대하여 선분 AB 를 $m : n$ $(m > n)$ 으로 내분하는 점을 C, 외분하는 점을 D 라고 할 때, 다음 식이 성립한다. (　　)안에 알맞은 값을 구하여라.

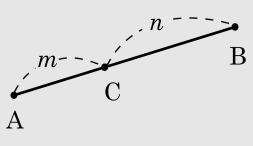
$$\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} = \frac{(\ \ )}{\overline{AB}}$$

▶ 답 :

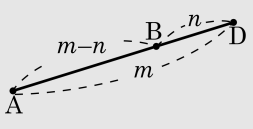
▷ 정답 : 2

해설

$\overline{AB} : \overline{AC}$
$= (m+n) : m$
따라서 $\overline{AC}$
$= \frac{m}{m+n}\overline{AB}$

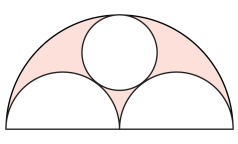


$\overline{AB} : \overline{AD}$
$= (m-n) : m$
따라서 $\overline{AD} = \frac{m}{m-n}\overline{AB}$



$\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} = \frac{m+n}{m}\frac{1}{\overline{AB}} + \frac{m-n}{m}\frac{1}{\overline{AB}} =$
$\frac{2}{\overline{AB}}$

17. 다음 그림과 같이 어떤 큰 반원의 지름 위에 두 개의 합동인 반원이 각각 서로 접하고 또 작은 한 원이 이 세 반원 모두에 접하면서 놓여있다. 이들 사이의 어두운 부분의 넓이가 20π 라 할 때, 합동인 두 반원의 반지름의 길이를 구하여라.

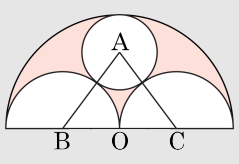


▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

합동인 두 원의 반지름을 r,
작은 원의 반지름을 x 라 하자.



$\overline{AB} = r + x$, $\overline{BO} = r$, $\overline{CO} = r$, $\overline{AO} = 2r - x$

$\triangle ABO$ 에서 $r^2 + (2r - x)^2 = (r + x)^2$

$4r^2 - 6rx = 0$

$\Rightarrow \quad 2r(2r - 3x) = 0$

$\therefore \quad x = \frac{2}{3}r \quad \cdots \quad ①$

빗금 친 부분의 넓이를 r, x 로 나타내면,

$\frac{1}{2} \times \pi \times (2r)^2 - \frac{1}{2} \times \pi \times r^2 \times 2 - \pi x^2 = 20\pi$

$\Rightarrow \quad r^2 - x^2 = 20 \quad \cdots \quad ②$

① 을 ② 에 대입시키면,

$r^2 - \left(\frac{2}{3}r\right)^2 = 20$

$\Rightarrow \quad \frac{5}{9}r^2 = 20$

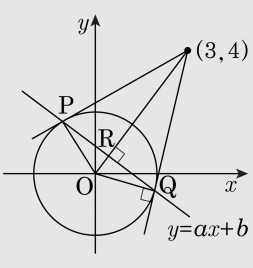
$\Rightarrow \quad r = 6 \quad (\because \ r > 0)$

18. 한 점 A$(3,4)$ 에서 원 $x^2+y^2=4$ 에 접선을 그을 때생기는 두 접점을 지나는 직선의 방정식을 구하면?

① $3x+4y=1$ ② $3x+4y=2$ ③ $3x+4y=3$
④ $3x+4y=4$ ⑤ $3x+4y=5$

해설

구하는 직선의 방정식을 $y=ax+b$ 라고 하면

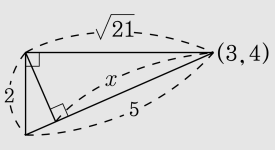


구하고자 하는 직선은 원점과 $(3,\ 4)$ 를 이은 선분에 수직이므로

$\frac{4}{3}\cdot a=-1 \quad \therefore\ a=-\frac{3}{4}$

$y=-\frac{3}{4}x+b,\ 3x+4y-4b=0 \quad \cdots\cdots\ (1)$

접선과의 두 교점을 P, Q 라 할때 다음과 같다.



$y=ax+b$ 와 $(3,\ 4)$ 와 거리가 x 일때,
삼각형의 닮음조건에 의해서

$5:\sqrt{21}\ =\ \sqrt{21}:x$

$\therefore\ x=\frac{21}{5}$

따라서, 원점과 직선과의 거리는

$5-\frac{21}{5}=\frac{4}{5}$

즉, $(0,\ 0)$ 에서 직선 (1) 에 이르는 거리는

$\frac{|-4b|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{4}{5}$

$4|b|=4 \quad b=1 \quad (\because\ b>0)$

$\therefore\ 3x+4y=4$

19. 두 원 $x^2+y^2=1,\ x^2+(y-2)^2=4$ 의 공통접선의 방정식을 $y=ax+b$ 라고 할 때, a^2+b^2 의 값을 구하면?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

원의 중심에서 직선 $y=ax+b$ 까지의
거리가 반지름과 같으면 되므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=1 \Longleftrightarrow b^2=a^2+1 \cdots ①$$

$$\frac{|b-2|}{\sqrt{a^2+1}}=2 \Longleftrightarrow (b-2)^2=4(a^2+1) \cdots ②$$

①, ② 에서 $b^2 \geq 1$ 임을 유의하면

$b=-2,\ a^2=3$

따라서 $a^2+b^2=7$

해설

중심 $C_1(0\ ,0)$ 과 직선 $ax-y+b=0$

사이의 거리는 $\frac{|a\cdot 0-1\cdot 0+b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\frac{|b|}{\sqrt{a^2+1}}$

반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|b|}{\sqrt{a^2+1}}=1\ ,\ |b|=\sqrt{a^2+1}$

$\therefore\ b^2=a^2+1 \cdots\cdots ①$

중심 $C_2\ (0,2)$ 와 직선 $ax-y+b=0$

사이의 거리는

$\frac{|b-2|}{\sqrt{a^2+1=2}}\ ,\ |b-2|=2\sqrt{a^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$b^2-4b=4a^2 \quad \cdots\cdots ㉡$

$㉠\times 4-㉡$ 에서

$3b^2+4b-4=0\ ,\ (3b-2)(b+2)=0$

$\therefore\ b=\frac{2}{3},\ -2$

이 때 $b^2=a^2+1\geq 1$ 에서 $b=-2$

이것을 ㉠에 대입하면 $a^2=3$

$\therefore a^2+b^2=3+4=7$

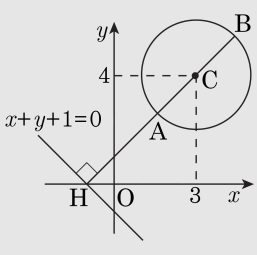
20. 원 $x^2+y^2-6x-8y+21=0$ 위의 점에서 직선 $x+y+1=0$ 에 이르는 거리의 최대값과 최소값의 합은?

① $4\sqrt{2}$ ② $8\sqrt{2}$ ③ $8\sqrt{2}+2$
④ $8\sqrt{2}+4$ ⑤ $16\sqrt{2}$

해설

$(x-3)^2+(y-4)^2=4$

다음 그림에서 원 위의 점에서 직선까지 거리의 최대값은 $\overline{BH}$, 최솟값은 $\overline{AH}$ 의 길이다.



$$\overline{AH}+\overline{BH}=(\overline{CH}-\overline{CA})+(\overline{CH}+\overline{CA})$$
$$=2\overline{CH}=2\cdot\frac{|3+4+1|}{\sqrt{2}}=8\sqrt{2}$$