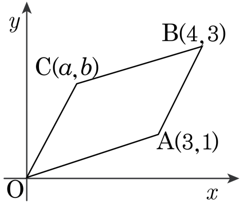
1. 다음 그림과 같이 네 점 A(3, 1), B(4, 3), C(a, b), O(0, 0)을 꼭짓점으로 하는 평행사변형 OABC에서 $a+b$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

평행사변형 OABC에서 두 대각선의 중점은 일치하므로

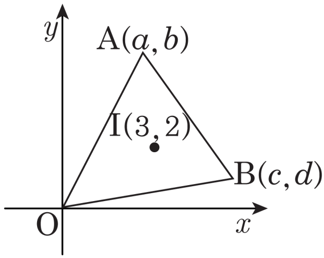
$$\left(2, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$$

$\dfrac{a+3}{2} = 2$에서 $a = 1$

$\dfrac{b+1}{2} = \dfrac{3}{2}$ 에서 $b = 2$

$\therefore a+b = 3$

2. 그림과 같이 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(c,\ d)$ 로 이루어진 삼각형 OAB 의 내심 I 의 좌표가 $(3,\ 2)$ 이다. $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}}$ 일 때, $\dfrac{3c+2d}{3a+2b}$ 의 값은?

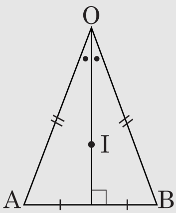


① 1　　② $\dfrac{3}{2}$　　③ $-\dfrac{2}{3}$

④ $-\dfrac{3}{2}$　　⑤ 알 수 없다

해설

$\triangle\mathrm{OAB}$ 가 $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}}$ 인 이등변삼각형이고,
$\angle\mathrm{AOI} = \angle\mathrm{BOI}$ 이므로
$\overline{\mathrm{OI}}$ 는 $\overline{\mathrm{AB}}$ 와 수직이다.
$\overline{\mathrm{OI}}$ 의 기울기가 $\dfrac{2}{3}$ 이므로
$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 기울기는 $-\dfrac{3}{2}$ 이다.



$\therefore \dfrac{b-d}{a-c} = -\dfrac{3}{2}$

$\therefore 3a+2b = 3c+2d$

$\therefore \dfrac{3c+2d}{3a+2b} = 1$

3. 좌표평면 위에서 원점과 직선 $x-y-3+k(x+y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은? (단, k 는 상수이다.)

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ④ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

해설

$x-y-3+k(x+y)=0$ 에서

$(k+1)x+(k-1)y-3=0$

원점에서 이 직선까지의 거리

$$f(k)=\frac{|-3|}{\sqrt{(k+1)^2+(k-1)^2}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2(k^2+1)}}$$

따라서 $f(k)$ 는 분모가 최소일 때

최대가 되므로 $f(k)$ 의 최대값은

$k=0$ 일 때 $\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

4. 좌표평면 위의 세 점 $O(0,0)$, $A(3,1), B(1,3)$ 에 대하여 선분 OA, AB, BO 를 $2:1$ 로 내분하는 점을 차례로 P, Q, R 라 할 때, $\triangle PQR$ 의 무게중심의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$　　② $(1, -1)$　　③ $(1, 1)$

④ $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$　　⑤ $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

해설

$P(x_1, y_1)$ 이라 하면

$$x_1 = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 0}{2+1},$$

$$y_1 = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{2+1}$$

$$\therefore P\left(2, \frac{2}{3}\right)$$

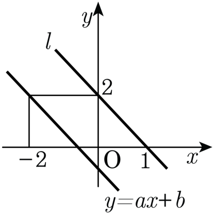
점 Q, R 도 마찬가지 방법으로 계산하면

$$Q\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, 1\right)$$

따라서 $\triangle PQR$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+\frac{5}{3}+\frac{1}{3}}{3}, \frac{\frac{2}{3}+\frac{7}{3}+1}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

5. 다음 직선 l 과 평행하면서 점 $(-2,\ 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y = ax + b$ 이다. 이때, $a + b$ 의 값은?

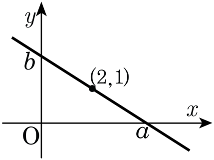


① -4　② -3　③ -2
④ -1　⑤ 0

해설

그림의 직선의 기울기는 -2 이므로
구하는 직선은 기울기가 -2 이고 점 $(-2,\ 2)$ 를 지난다.
$y - 2 = -2(x + 2),\ y = -2x - 2$
$y = -2x - 2,\ a = -2, b = -2$ 이므로,
$\therefore\ a + b = -4$

6. 다음 그림에서 a와 b사이의 관계식을 나타내면?



① $a + \frac{a}{2} = 1$

② $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1$

③ $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$

④ $\frac{2}{a} + b = 1$

⑤ $\frac{1}{2a} + \frac{1}{b} = 1$

해설

x 절편이 a, y 절편이 b 인 직선의 방정식은

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 이다.

따라서 $(2,\ 1)$ 을 지나므로

$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1$ 이다.

7. 직선 $ax+by+c=0$에 대하여 $ab<0$, $bc>0$일 때, 이 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

▶ 답 : 사분면

▷ 정답 : 제 2사분면

해설

$ax+by+c=0$에서

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

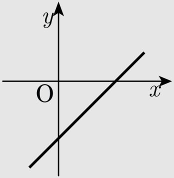
주어진 조건에서

$ab<0$, $bc>0$ 이므로

$-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}<0$

$\therefore$ (기울기)>0 , (y 절편)<0

따라서 주어진 직선은 다음 그림과 같으므로



지나지 않는 사분면은 제 2 사분면이다.

8. x, y에 대한 연립방정식 $2x+(a+2)y-1=0$, $(a-3)x-2y+2=0$이 해를 갖지 않을 때, 상수 a의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$2x+(a+2)y-1=0$, $(a-3)x-2y+2=0$이 평행해야 한다.
따라서 평행할 조건을 구하면,

$$\frac{2}{a-3}=\frac{a+2}{-2}\neq-\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{a-3}=\frac{a+2}{-2}$$ 에서

$a^2-a-2=0$, $(a-2)(a+1)=0$

$\therefore\ a=2$ 또는 $a=-1$

1) $a=2$일 때,

$$\frac{2}{-1}=\frac{4}{-2}\neq-\frac{1}{2}\quad\therefore \text{평행}$$

2) $a=-1$일 때,

$$\frac{2}{-4}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}\quad\therefore \text{일치}$$

따라서, 1), 2)에 의하여 $a=2$

9. 점 Q가 직선 $2x+y-4=0$ 위를 움직일 때, 점 $A(-2,3)$과 Q를 잇는 선분 AQ의 중점 P의 자취의 방정식은?

① $4x+2y-3=0$　　② $2x+3y+1=0$

③ $4x-3y+1=0$　　④ $x-4y-3=0$

⑤ $-x+y+2=0$

해설

점 $A(-2,3)$, $Q(x,\ y)$의 중점의 좌표를
$P(X,\ Y)$라 하면,

$P(X,\ Y)=P\left(\dfrac{x-2}{2},\ \dfrac{y+3}{2}\right)$ 이므로

$X=\dfrac{x-2}{2}$, $Y=\dfrac{y+3}{2}$

$\therefore\ x=2X+2$, $y=2Y-3$

이것을 $2x+y-4=0$ 에 대입하면

$2(2X+2)+(2Y-3)-4=0$

$4X+2Y-3=0$

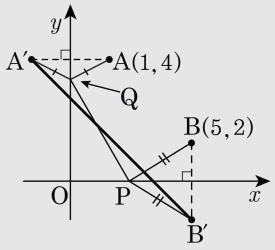
$\therefore\ 4x+2y-3=0$

10. 두 점 A(1, 4), B(5, 2) 에 대하여 점 P는 x축 위를 움직이고 점 Q는 y축 위를 움직일 때, $\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값을 구하면?

① $2\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

해설

다음 그림과 같이 점 A를 y축에 대하여
대칭이동한 점을 A′, 점 B를
x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′ 이라고 하면



$\mathrm{A}'(-1, 4)$, $\mathrm{B}'(5, -2)$

$$\therefore \overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{BP}} = \overline{\mathrm{A'Q}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{B'P}}$$
$$\geq \overline{\mathrm{A'B'}}$$
$$=\sqrt{(5+1)^2+(-2-4)^2}$$
$$=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$$

따라서 구하는 최솟값은 $6\sqrt{2}$ 이다.

11. 세 꼭짓점이 A$(-1,\ -1)$, B$(4,\ 3)$, C$(0,\ 1)$인 $\triangle$ABC 에서 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{CA}}$를 $2:3$으로 내분하는 점을 각각 D, E, F라 하자. $\triangle$DEF 의 무게중심을 $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\triangle$ABC 에서 각 변을 $m:n$ 으로 내분하는 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심은 $\triangle$ABC 의 무게중심과 일치한다.
$\triangle$ABC 의 무게중심은

$$\left(\frac{-1+4+0}{3},\ \frac{-1+3+1}{3}\right),$$

즉 $(1,\ 1)$ 이므로 $\triangle$DEF 의 무게중심은 $(1,\ 1)$ 이다.
$\therefore\ a+b=1+1=2$

12. 원 $x^2+y^2-6x-2y+6=0$ 과 직선 $3x+4y-a=0$이 서로 접할 때, 모든 a 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

원의 방정식을 표준형으로 바꾸면

$(x-3)^2+(y-1)^2=2^2$

원의 중심 $(3, 1)$ 에서 직선까지의 거리 d가 2이면 접하므로

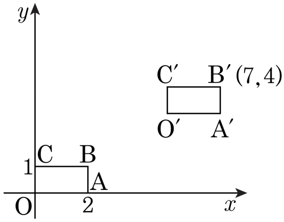
$$d=\frac{|3\cdot 3+4\cdot 1-a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$$

$\therefore\ |13-a|=10 \Leftrightarrow 13-a=\pm 10$

따라서, $a=3$ 또는 23 이므로

모든 a 값들의 합은 26

13. 좌표평면에서 원점 O 와 두 점 A(2, 0), C(0, 1) 에 대하여 $\overline{OA}, \overline{OC}$ 를 두 변으로 하는 직사각형 OABC 를 평행 이동하여 $O \to O'$, $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$ 으로 옮겨지도록 하였다. 점 B' 의 좌표가 (7, 4) 일 때, 직선 $A'C'$ 의 방정식은?



① $x + 2y - 10 = 0$
② $x + 2y - 13 = 0$
③ $x + 2y - 16 = 0$
④ $2x + 3y - 17 = 0$
⑤ $2x + 3y - 19 = 0$

해설

점 B(2,1) 이 점 $B'(7,4)$ 로 옮겨지므로
직사각형 $O'A'B'C'$ 은 직사각형 OABC 를
x 축의 방향으로 5, y 축의 방향으로 3만큼 평행 이동한 것이다.
따라서 두 점 A(2,0), C(0,1) 은 각각 $A'(7,3)$, $C'(5,4)$ 로 옮겨지므로

직선 $A'C'$ 의 방정식은 $y - 3 = \frac{4-3}{5-7}(x-7)$

$\therefore\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$

$\therefore\ x + 2y - 13 = 0$

해설

직선 $A'C'$ 은 직선 AC 를 평행이동한 것이므로
직선 $A'C'$ 의 기울기는 직선 AC 의 기울기인 $-\frac{1}{2}$ 이다.
한편, $\overline{AB} = \overline{A'B'} = 1$ 에서 점 A' 의 좌표는 (7,3) 이므로
이것을 $y = -\frac{1}{2}x + b$ 에 대입하여 정리하면 $b = \frac{13}{2}$ 이다.
따라서 구하는 직선 $A'C'$ 의 방정식은

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$,

$\therefore\ x + 2y - 13 = 0$

14. 포물선 $y = x^2$ 을 x 축에 대하여 대칭이동시킨 후, 다시 y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동시켰더니 직선 $y = x - 1$ 에 접하였다. 이 때, a 의 값은?

① $-\frac{7}{4}$　② $-\frac{5}{4}$　③ $-\frac{3}{4}$　④ $-\frac{1}{4}$　⑤ 0

해설

$y = x^2$ 을 x 축에 대하여 대칭이동하면 $-y = x^2$ 이고
이를 다시 y 축 방향으로 a 만큼 평행이동 하면,
$-(y-a) = x^2, \quad y = -x^2 + a$
이 곡선이 $y = x - 1$ 에 접하려면
$x - 1 = -x^2 + a$, $x^2 + x - a - 1 = 0$ 에서
$D = 1^2 - 4(-a-1) = 0$
$\therefore \ a = -\frac{5}{4}$

15. 두 점 P$(-1,\ 2)$, Q$(5,\ 8)$ 이 직선 $y=ax+b$ 에 대하여 대칭일 때, $a+b$ 의 값은?

① 10　② 9　③ 8　④ 7　⑤ 6

해설

$\overline{\text{PQ}}$ 의 중점이 $y=ax+b$ 위에 있으므로,

$\overline{\text{PQ}}$ 의 중점 :

$$\left(\frac{-1+5}{2},\ \frac{2+8}{2}\right)=(2,\ 5)$$

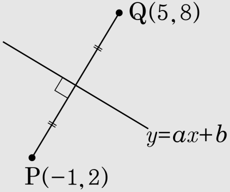
$\therefore\ 5=2a+b$

$\overline{\text{PQ}}$ 기울기 : $\dfrac{2-8}{-1-5}=1$

$\therefore\ a=-1$

위 식에 대입하면 : $b=7$

$\therefore\ a+b=-1+7=6$



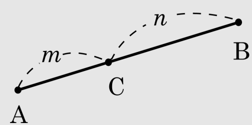
16. 수직선 위의 두 점 A, B 에 대하여 선분 AB 를 $m : n\ (m > n)$ 으로 내분하는 점을 C, 외분하는 점을 D 라고 할 때, 다음 식이 성립한다. (　　　)안에 알맞은 값을 구하여라.

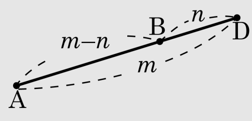
$$\frac{1}{\overline{\mathrm{AC}}} + \frac{1}{\overline{\mathrm{AD}}} = \frac{(\quad)}{\overline{\mathrm{AB}}}$$

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설





$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AC}}$

$= (m+n) : m$

따라서 $\overline{\mathrm{AC}}$

$= \dfrac{m}{m+n}\overline{\mathrm{AB}}$

$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AD}}$

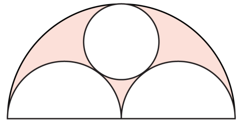
$= (m-n) : m$

따라서 $\overline{\mathrm{AD}} = \dfrac{m}{m-n}\overline{\mathrm{AB}}$

$\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AC}}} + \dfrac{1}{\overline{\mathrm{AD}}} = \dfrac{m+n}{m}\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AB}}} + \dfrac{m-n}{m}\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AB}}} =$

$\dfrac{2}{\overline{\mathrm{AB}}}$

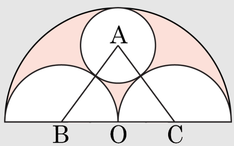
17. 다음 그림과 같이 어떤 큰 반원의 지름 위에 두 개의 합동인 반원이 각각 서로 접하고 또 작은 한 원이 이 세 반원 모두에 접하면서 놓여있다. 이들 사이의 어두운 부분의 넓이가 20π 라 할 때, 합동인 두 반원의 반지름의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설



합동인 두 원의 반지름을 r,
작은 원의 반지름을 x 라 하자.
$\overline{AB} = r + x$, $\overline{BO} = r$, $\overline{CO} = r$, $\overline{AO} = 2r - x$

$\triangle ABO$ 에서 $r^2 + (2r - x)^2 = (r + x)^2$

$4r^2 - 6rx = 0$

$\Rightarrow \quad 2r(2r - 3x) = 0$

$\therefore \quad x = \frac{2}{3}r \quad \cdots \quad ①$

빗금 친 부분의 넓이를 r, x 로 나타내면,

$\frac{1}{2} \times \pi \times (2r)^2 - \frac{1}{2} \times \pi \times r^2 \times 2 - \pi x^2 = 20\pi$

$\Rightarrow \quad r^2 - x^2 = 20 \quad \cdots \quad ②$

① 을 ② 에 대입시키면,

$r^2 - \left(\frac{2}{3}r\right)^2 = 20$

$\Rightarrow \quad \frac{5}{9}r^2 = 20$

$\Rightarrow \quad r = 6 \quad (\because \ r > 0)$

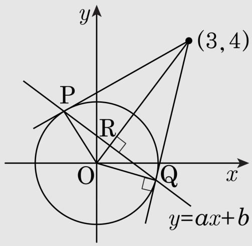
18. 한 점 $A(3,4)$ 에서 원 $x^2+y^2=4$ 에 접선을 그을 때생기는 두 접점을 지나는 직선의 방정식을 구하면?

① $3x+4y=1$　② $3x+4y=2$　③ $3x+4y=3$

④ $3x+4y=4$　⑤ $3x+4y=5$

해설

구하는 직선의 방정식을 $y=ax+b$ 라고 하면

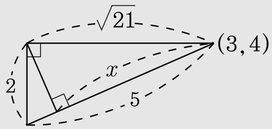


구하고자 하는 직선은 원점과 (3, 4) 를 이은 선분에 수직이므로

$\frac{4}{3}\cdot a=-1 \quad \therefore\ a=-\frac{3}{4}$

$y=-\frac{3}{4}x+b,\ 3x+4y-4b=0 \quad \cdots\cdots\ (1)$

접선과의 두 교점을 P, Q 라 할때 다음과 같다.



$y=ax+b$ 와 (3, 4) 와 거리가 x 일때,

삼각형의 닮음조건에 의해서

$5:\sqrt{21}\ =\ \sqrt{21}:x$

$\therefore\ x=\frac{21}{5}$

따라서, 원점과 직선과의 거리는

$5-\frac{21}{5}=\frac{4}{5}$

즉, (0, 0) 에서 직선 (1) 에 이르는 거리는

$\frac{|-4b|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{4}{5}$

$4|b|=4 \quad b=1 \quad (\because\ b>0)$

$\therefore\ 3x+4y=4$

19. 두 원 $x^2+y^2=1,\ x^2+(y-2)^2=4$ 의 공통접선의 방정식을 $y=ax+b$ 라고 할 때, a^2+b^2 의 값을 구하면?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

원의 중심에서 직선 $y=ax+b$ 까지의 거리가 반지름과 같으면 되므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=1 \iff b^2=a^2+1\cdots ①$$

$$\frac{|b-2|}{\sqrt{a^2+1}}=2 \iff (b-2)^2=4(a^2+1)\cdots ②$$

①, ② 에서 $b^2 \geq 1$ 임을 유의하면

$b=-2,\ a^2=3$

따라서 $a^2+b^2=7$

해설

중심 $C_1(0\ ,0)$과 직선 $ax-y+b=0$

사이의 거리는 $\dfrac{|a\cdot 0-1\cdot 0+b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+1}}$

반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2+1}}=1\ ,\ |b|=\sqrt{a^2+1}$$

$\therefore\ b^2=a^2+1\cdots\cdots ①$

중심 $C_2\ (0,2)$와 직선 $ax-y+b=0$

사이의 거리는

$$\frac{|b-2|}{\sqrt{a^2+1=2}}\ ,\ |b-2|=2\sqrt{a^2+1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$b^2-4b=4a^2\ \ \cdots\cdots ㉡$

㉠ $\times 4-$ ㉡ 에서

$3b^2+4b-4=0\ ,\ (3b-2)(b+2)=0$

$\therefore\ b=\dfrac{2}{3},\ -2$

이 때 $b^2=a^2+1\geq 1$ 에서 $b=-2$

이것을 ㉠에 대입하면 $a^2=3$

$\therefore a^2+b^2=3+4=7$

20. 원 $x^2+y^2-6x-8y+21=0$ 위의 점에서 직선 $x+y+1=0$ 에 이르는 거리의 최대값과 최소값의 합은?

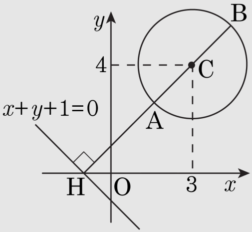
① $4\sqrt{2}$ ② $8\sqrt{2}$ ③ $8\sqrt{2}+2$

④ $8\sqrt{2}+4$ ⑤ $16\sqrt{2}$

해설

$(x-3)^2+(y-4)^2=4$

다음 그림에서 원 위의 점에서 직선까지 거리의 최대값은 $\overline{\mathrm{BH}}$, 최솟값은 $\overline{\mathrm{AH}}$의 길이이다.



$$\overline{\mathrm{AH}}+\overline{\mathrm{BH}}=(\overline{\mathrm{CH}}-\overline{\mathrm{CA}})+(\overline{\mathrm{CH}}+\overline{\mathrm{CA}})$$
$$=2\overline{\mathrm{CH}}=2\cdot\frac{|3+4+1|}{\sqrt{2}}=8\sqrt{2}$$