

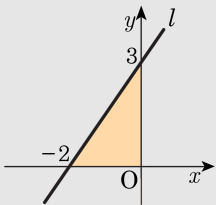
1. 직선 $3x - 2y + 6 = 0$ 이 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$3x - 2y + 6 = 0$ 을 그래프에 도시해보면,



$\therefore$ 빗금 친 부분의 넓이 : $\frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$

2. 세 점 $A(2, 3)$, $B(-1, 9)$, $C(-4, a)$ 가 일직선 위에 있을 때, 상수 a 의 값은 얼마인가?

① 6

② 9

③ 12

④ 15

⑤ 17

해설

일직선 위에 있으려면 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 의 기울기가 같다.

$$\overline{AB} \text{의 기울기: } \frac{3-9}{2-(-1)} = -2$$

$$\overline{BC} \text{의 기울기: } \frac{a-3}{(-4)-(2)} \therefore a = 15$$

3. 두 직선 $2x - y - 3 = 0$, $x + y - 3 = 0$ 의 교점을 지나고 $(0, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식을 $ax + by = 0$ 이라 할 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$(2x - y - 3) + k(x + y - 3) = 0$ 으로 나타낼 수 있다.

이 때, $(0, 0)$ 을 지나므로

$$(-3) + k(-3) = 0 \quad \therefore k = -1$$

$(2x - y - 3) + (-1)(x + y - 3) = 0$ 을 정리하면

$$\therefore x - 2y = 0$$

$$a = 1, b = -2 \quad \therefore a - b = 1 - (-2) = 3$$

4. 원 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ 과 같은 중심을 갖고, 점 $(1, 2)$ 를 지나는 원의 반지름을 r 이라 할 때, r^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

준 식에서 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 14$ 이므로
중심은 $(2, -3)$ 이다.

구하는 원의 반지름을 r 라 하면

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = r^2 \text{ 이고,}$$

이 원이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$$(1 - 2)^2 + (2 + 3)^2 = r^2$$

$$\therefore r^2 = 26$$

5. 두 점 $A(1, 5)$, $B(-3, -1)$ 을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 13$

② $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 52$

③ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 13$

④ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 13$

⑤ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 52$

해설

원의 중심은 두 점 A , B 의 중점이므로,

$$\left(\frac{1-3}{2}, \frac{5-1}{2}\right) = (-1, 2) \text{ 이다.}$$

또, 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{(-3-1)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{13}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 13$$

6. 방정식 $x^2 + y^2 - 2x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타내도록 k 값의 범위를 정하면?

① $k < -2$

② $k < -1$

③ $k > -2$

④ $k < 2$

⑤ $k > 1$

해설

방정식을 정리하면, $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2 - k$
원이 되려면 $2 - k > 0$ 을 만족해야 한다.

$\therefore k < 2$

7. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x-4)^2 + y^2 = 4$ 의 공통외접선의 길이를 구하면?

① $\sqrt{5}$

② $\sqrt{15}$

③ 0

④ $2\sqrt{5}$

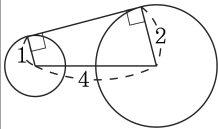
⑤ 5

해설

두 원의 중심간 거리는 4이다.

피타고라스의 정리에 의해 공통외접선의
길이를 구하면

$$\sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15} \text{ 이다.}$$



8. 직선 $y = -2x + a$ 가 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 에 의하여 잘려지는 선분의 길이를 최대로 하는 a 의 값은 ?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 에서

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

직선 $y = -2x + a$ 가 원의 중심 $(2, 1)$ 을 지날 때, 잘린 선분의 길이가 최대이므로

$$a = 2 \times 2 + 1 = 5$$

9. 다음 중 직선 $y = -3x$ 의 그래프를 y 축의 음의 방향으로 2 만큼 평행이동시킨 직선의 식은?

① $y = -3x - 2$

② $y = 3x + 2$

③ $y = -3x + 2$

④ $y = -3x + 4$

⑤ $y = 3x - 4$

해설

직선 $y = -3x$ 의 그래프를 y 축의 음의 방향으로
2 만큼 평행이동 시킨 직선은

$$y - (-2) = -3x$$

$$\therefore y = -3x - 2$$

10. 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 원의 방정식은?

① $x^2 + y^2 = 1$

② $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$

③ $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$

④ $x^2 + (y + 2)^2 = 1$

⑤ $(x - 2)^2 + y^2 = 1$

해설

$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 에서

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1 \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$

㉠을 y 축에 대하여 대칭이동하면

$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1 \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$

㉡을 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면

$x^2 + (y - 1)^2 = 1 \dots\dots \textcircled{\text{㉢}}$

㉢을 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동하면

$x^2 + (y + 2)^2 = 1$

11. 두 점 A(2, -1), B(6, 3)에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점을 P, y 축 위의 점을 Q라 할 때, $\triangle OPQ$ 의 외심의 좌표를 (x, y) 라 할 때, $x + y$ 의 값을 구하여라.(단, O는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

P($a, 0$), Q($0, b$)라 하면

$$(2-a)^2 + (-1-0)^2 = (6-a)^2 + (3-0)^2 \dots \textcircled{A}$$

$$(2-0)^2 + (-1-b)^2 = (6-0)^2 + (3-b)^2 \dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$ 에서 $a = 5$, $\textcircled{B}$ 에서 $b = 5$

$\triangle OPQ$ 의 외심을 (x, y) 라 하면

$$x^2 + y^2 = (x-5)^2 + y^2 = x^2 + (y-5)^2$$

$$\therefore -10x + 25 = 0, -10y + 25 = 0$$

$$\therefore x = y = \frac{5}{2}$$

따라서 외심의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$$\therefore x + y = 5$$

12. x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45° 이고, 점 $(-1, 2)$ 를 지나는 직선이 점 $(a, 7)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값은?

① -4

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 4

해설

x 축 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45° 인 직선의 기울기는 1 이다.

$(-1, 2)$ 를 지나므로, 직선의 방정식은

$$y = (x + 1) + 2 = x + 3$$

$(a, 7)$ 을 대입하면, $7 = a + 3$, $a = 4$

13. 「 m, n 을 서로소인 자연수라 할 때, 좌표평면위의 두 점 $P(m, 0)$, $Q(0, n)$ 을 잇는 선분 PQ 위에는 x 좌표, y 좌표가 모두 자연수인 점이 존재하지 않는다.」를 다음과 같이 증명하였다.

<증명>

두 점 P, Q 를 지나는 직선의 방정식은

(가) 이다. 따라서 $nx + my = mn$ ($0 < x < m, 0 < y < n$) 을 만족하는 자연수 x, y 가 존재한다고 가정하면 $my = n(m - x)$ 좌변이 m 의 배수이므로 우변도 m 의 배수이고,

m, n 이 서로소이므로

(나) 는 m 의 배수가 된다.

이것은 $0 < m - x < (다)$ 에 모순이다.

위

의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

- ① $nx + my = 1, m - x, m$ ② $nx + my = 1, m + x, 2m$
 ③ $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1, m - x, m$ ④ $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1, m + x, 2m$
 ⑤ $nx + my = 1, m + x, n$

해설

두 점 P, Q 를 지나는 직선의 x 절편, y 절편이 각각 m, n 이므로

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \Leftrightarrow nx + my = mn \dots\dots ㉠$$

㉠을 만족하는 자연수 x, y 가 존재한다고 가정하면

$my = n(m - x)$ 에서 m, n 이 서로소이므로 $m - x$ 는 m 의 배수가 된다.

이것은 $0 < m - x < m$ 에 모순이다.

14. 직선 $ax + by + c = 0$ 에 대하여 $ab < 0, bc > 0$ 일 때, 이 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.



답 :

사분면



정답 : 제 2사분면

해설

$ax + by + c = 0$ 에서

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

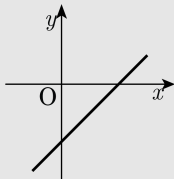
주어진 조건에서

$ab < 0, bc > 0$ 이므로

$$-\frac{a}{b} > 0, -\frac{c}{b} < 0$$

$\therefore (\text{기울기}) > 0, (y \text{ 절편}) < 0$

따라서 주어진 직선은 다음 그림과 같으므로
지나지 않는 사분면은 제 2 사분면이다.



15. 두 점 A(1, 3), B(4, 0) 을 지나는 직선에 수직이고 선분 AB 를 1 : 2 로 외분하는 점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = ax + b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $a + b = 9$

해설

직선 AB 의 기울기는 $\frac{0-3}{4-1} = -1$ 이므로

직선 AB 에 수직인 직선의 기울기는 1 이다.

또, 선분 AB 를 1 : 2 로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 4 - 2 \times 1}{1 - 2}, \frac{1 \times 0 - 2 \times 3}{1 - 2} \right), \text{ 즉 } (-2, 6)$$

따라서 구하는 직선은 기울기가 1 이고

점 $(-2, 6)$ 을 지나므로

$$y - 6 = 1 \cdot (x + 2), \quad y = x + 8$$

$$a = 1, \quad b = 8 \quad \therefore a + b = 9$$

16. 점 $(2, a)$ 를 지나고 직선 $x + by + 2 = 0$ 에 수직인 직선의 식이 $2x + y = 0$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 5

② 4

③ 8

④ $2\sqrt{2}$

⑤ -6

해설

직선 $2x + y = 0$ 이 $(2, a)$ 를 지나므로 $a = -4$

한편, 직선 $x + by + 2 = 0$ 이

직선 $2x + y = 0$ 에 수직이므로

직선 $x + by + 2 = 0$ 의 기울기는 $-\frac{1}{b} = \frac{1}{2}$

$\therefore b = -2$ 따라서 $a + b = -6$

17. 두 점 $A(-2, -1)$, $B(4, 3)$ 에 대하여 선분 AB 의 수직이등분선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 1

해설

선분 AB 의 중점의 좌표는 $(1, 1)$

선분 AB 의 기울기는 $\frac{3 - (-1)}{4 - (-2)} = \frac{2}{3}$

따라서, 선분 AB 의 수직이등분선은 점 $(1, 1)$ 을 지나고, 기울기가 $-\frac{3}{2}$ 인 직선이므로

구하는 직선의 방정식은 $y - 1 = -\frac{3}{2}(x - 1)$

즉, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

따라서, $a + b = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1$

18. 두 직선 $y = x$, $y = 0$ 과 정점 $A(3, 1)$ 을 지나는 직선으로 둘러싸인 삼각형 면적의 최솟값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

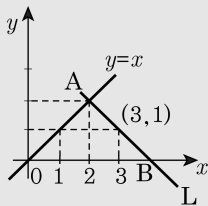
점 A 를 지나는 직선이 $y = x$ 와 수직일 때 $\triangle OAB$ 의 면적은 최소이므로

$(2, 2)$ 인 점에서 교차한다.

따라서 직선 L 은 $(2, 2)$ 와 $(3, 1)$ 을 지나는 직선이다.

$$\therefore L = y - x + 4$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$



19. 두 직선 $x - 3y + 1 = 0$, $x + y - 3 = 0$ 의 교점과 직선 $4x + 3y - 1 = 0$ 사이의 거리는?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x - 3y + 1 = 0$, $x + y - 3 = 0$ 의 교점은 $(2, 1)$

$\therefore 4x + 3y - 1 = 0$ 까지의 거리 :

$$\frac{|4 \times 2 + 3 \times 1 - 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2$$

20. 두 직선 $3x + 4y = 24$ 와 $3x + 4y = 4$ 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 나머지 직선 사이의 거리를 구하면 된다.

$3x + 4y = 24$ 의 점 $(0, 6)$

$$\frac{|0 \times 3 + 6 \times 4 - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4$$

21. 점 $A(2,0)$ 을 지나는 임의의 직선 l 에 대하여 원점 O 와 직선 l 사이의 거리의 최댓값은?

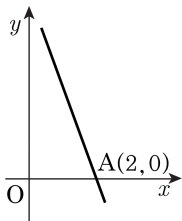
① 2

② 3

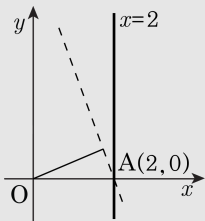
③ $2\sqrt{2}$

④ $\sqrt{5}$

⑤ 4



해설



다음의 그림에서 점 $A(2,0)$ 을 지나고 y 축에 평행한 직선 l , 곧 직선 $x=2$ 에 대하여 원점 O 와 l 사이의 거리가 최대가 되며 이 때 그 거리는 2 이다

22. 세 점 $O(0, 0)$, $A(4, 3)$, $B(-2, 6)$ 을 꼭지점으로 하는 $\triangle OAB$ 의 넓이는?

① 9

② 10

③ 12

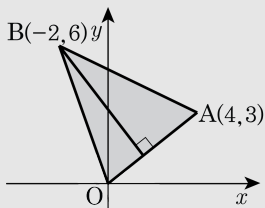
④ 15

⑤ 18

해설

$\overline{OA} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ 이고 직선 OA 의

방정식은 $y = \frac{3}{4}x$



즉 $3x - 4y = 0$ 이므로 점 $B(-2, 6)$ 과 직선 OA 사이의 거리는

$$\frac{|3 \times (-2) - 4 \times 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{30}{5} = 6$$

따라서 $\triangle OAB$ 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 5 \times 6 = 15$

23. 두 원 $x^2 + y^2 - 5 = 0$, $x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$ 의 교점과 점(1,1)을 지나는 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 일 때, $A + B - C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$x^2 + y^2 - 5 = 0, x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$$

교점을 지나는 원의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 5)m + x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$$

의 꼴이고, 이 원이 점 (1,1)을 지나므로

$$(1 + 1 - 5)m + 1 + 1 - 3 - 1 - 4 = 0$$

$$\therefore m = -2$$

이 값을 대입하고 정리하면

$$x^2 + y^2 + 3x + y - 6 = 0 \text{ 이다.}$$

$$\therefore A = 3, B = 1, C = -6$$

$$\text{그러므로 } A + B - C = 10$$

24. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x-3)^2 + (y+4)^2 = r^2$ 의 공통접선이 모두 4 개가 되도록 하는 자연수 r 의 개수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

두 원의 공통접선이 4 개가 되려면 두 원의 위치 관계는 서로 다른 원의 외부에 있어야 한다.

이 때, $x^2 + y^2 = 1$ 은 중심이 $(0, 0)$,

반지름의 길이가 1 인 원이고

$(x-3)^2 + (y+4)^2 = r^2$ 은 중심이 $(3, -4)$,

반지름의 길이가 r 인 원이므로

$$\sqrt{3^2 + (-4)^2} > 1 + r$$

$$5 > 1 + r$$

$$\therefore 0 < r < 4$$

따라서, 자연수 r 은 1, 2, 3 으로 모두 3 개이다.

25. 직선 $y = 2x + k$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 y 절편이 -3 일 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

직선 $y = 2x + k$ 를 원점에 대하여 대칭이동한
직선의 방정식은 $-y = -2x + k$, 즉 $y = 2x - k$
이 때, 이 직선의 y 절편이 -3 이 되어야 하므로

$$-k = -3$$

$$\therefore k = 3$$

26. 다음은 점 $P(a, b)$ 의 직선 $y = x$ 에 대해 대칭인 점 Q 의 좌표 (x, y) 를 구하는 과정이다.

에 알맞은 말을 차례대로 써 넣어라.

(1) $\overline{PQ}$ 의 중점 $\left(\frac{x+a}{2}, \frac{y+b}{2}\right)$ 은 직선

위에 있으므로 $\frac{y+b}{2} = \frac{x+a}{2}$

$\therefore x - y = b - a \cdots \textcircled{1}$

(2) 직선 PQ 는 직선 $y = x$ 에 수직이므로

$\frac{y-b}{x-a} = \text{$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 를 연립하여 x, y 를 구하면

$x = \text{}, y = \text{$ 이다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

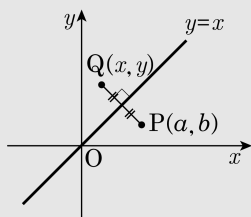
▷ 정답 : $y = x$

▷ 정답 : -1

▷ 정답 : b

▷ 정답 : a

해설



27. 직선 $y = x + 1$ 에 관해서 점 $A(-2, 3)$ 과 대칭인 점의 좌표를 (x, y) 라 할 때, $x + y$ 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$y = x + 1$ 에 $A(-2, 3)$ 에 대칭인 점은 A' 이므로 $\overline{AA'}$ 의 중점은 $y = x + 1$ 위의 점이다.

$$\frac{-2 + a}{2} + 1 = \frac{3 + b}{2} \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또 $\overline{AA'}$ 의 기울기와 $y = x + 1$ 의 기울기의 곱이 -1 이므로

$$\left(\frac{b - 3}{a + 2} \right) \times 1 = -1$$

$$\therefore b - 3 = -a - 2 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에 의해 } a = 2, \quad b = -1$$

$$\therefore (2, -1)$$

28. 다음 그림과 같이 정사각형 OABC의 내부의 점 P에 대하여 $\overline{OP} = 3$, $\overline{AP} = 5$, $\overline{CP} = 7$ 일 때 선분 PB의 길이는?

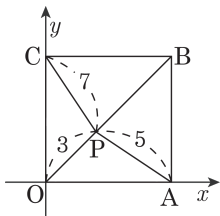
① $2\sqrt{15}$

② $\sqrt{65}$

③ $\sqrt{70}$

④ $5\sqrt{3}$

⑤ $4\sqrt{5}$



해설

정사각형의 한 변의 길이를 a , 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & \cdots \textcircled{㉠} \\ (a-x)^2 + y^2 = 25 & \cdots \textcircled{㉡} \\ x^2 + (a-y)^2 = 49 & \cdots \textcircled{㉢} \end{cases}$$

선분 PB의 길이는

$$\overline{PB} = \sqrt{(a-x)^2 + (a-y)^2} \text{이다.}$$

$\textcircled{㉡} + \textcircled{㉢} - \textcircled{㉠}$ 에서

$$(a-x)^2 + (a-y)^2 = 25 + 49 - 9 = 65$$

$$\text{따라서 } \overline{PB} = \sqrt{65}$$

29. 좌표평면 위의 두 점 $A(7, 4)$, $B(8, 6)$ 과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 값을 최소가 되게 하는 점 P 의 x 좌표를 a 라 할 때, $5a$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

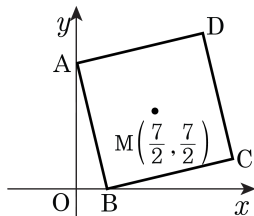
$A(7, 4)$ 를 $y = x$ 에 대칭이동한 점 $C(4, 7)$ 에 대하여 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 가 최소인 점 P 는

선분 BC 와 직선 $y = x$ 의 교점이다.

$$y = -\frac{1}{4}x + 8 \text{와 } y = x \text{의 교점은 } \left(\frac{32}{5}, \frac{32}{5}\right)$$

$$\therefore 5a = 32$$

30. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD가 있다. 정사각형 ABCD의 중심 M의 좌표가 $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$ 일 때, $\triangle OAB$ 의 넓이는? (단, O는 원점이다.)



① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

다음 그림과 같이 두 점 A, B의 좌표를 $A(0, a)$, $B(b, 0)$ 이라 하고 점 D를 지나면서

x 축에 평행한 직선이 y 축과 만나는 점을 E라 하면 $\triangle OAB \cong \triangle EDA$

따라서 $\overline{AE} = \overline{BO} = b$, $\overline{DE} = \overline{AO} = a$

이므로 $D(a, a+b)$

이 때, 점 M은 선분 BD의 중점이므로

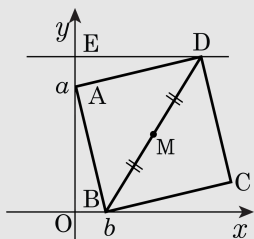
$$M\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$$

$$\text{즉, } \frac{a+b}{2} = \frac{7}{2} \text{에서 } a+b=7$$

또, 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 5이므로 $\triangle OAB$ 에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 5, a^2 + b^2 = 25$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle OAB &= \frac{1}{2}ab = \frac{1}{4} \left\{ (a+b)^2 - (a^2 + b^2) \right\} \\ &= \frac{1}{4} (7^2 - 25) = 6 \end{aligned}$$



31. $\triangle ABC$ 의 무게중심이 $G(1, 4)$ 이고, 세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점이 각각 $(-1, 6)$, (a, b) , $(3, 4)$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$\triangle ABC$ 의 무게중심 G 는

세변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 무게중심과 일치한다.

따라서 $\frac{-1 + a + 3}{3} = 1$, $\frac{6 + b + 4}{3} = 4$ 이므로

$a = 1$, $b = 2$ 이고, $\therefore a + b = 3$

32. 점 $(1, -1)$ 에서 직선 $ax + by = 0 (a \neq 0, b \neq 0)$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 일 때, 상수 a, b 의 관계를 바르게 설명한 것은?

① $a - b = 0$

② $a - b = \sqrt{2}$

③ $a + b = 0$

④ $ab = 0$

⑤ $ab = \sqrt{2}$

해설

$$\frac{|a \times 1 + b \times (-1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{2}$$

$$|a - b| = \sqrt{2} \sqrt{a^2 + b^2}$$

양변을 제곱하면 $a^2 - 2ab + b^2 = 2a^2 + 2b^2$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 0, (a + b)^2 = 0$$

따라서 $a + b = 0$

33. 좌표평면 위의 두 점 A(-1, 0), B(1, 0) 으로부터의 거리의 비가 2 : 1 이 되도록 움직이는 점 P 가 있다. 이때, $\triangle PAB$ 의 넓이가 자연수가 되는 점의 개수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

점 P 의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 이므로

$$\overline{AP} = 2\overline{BP}$$

$$\therefore \overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$$

$$(x+1)^2 + y^2 = 4\{(x-1)^2 + y^2\}$$

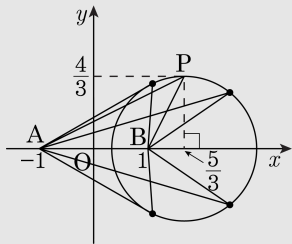
$$3x^2 + 3y^2 - 10x + 3 = 0$$

$$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$$

이때, $\triangle PAB$ 의 넓이는 밑변 AB 가 고정되어 있으므로 높이에 따라 변하게 된다.

즉, 높이가 반지름의 길이와 같을 때, 넓이가 최대이며 $\triangle PAB$ 의 넓이의 최댓값은 $\frac{4}{3}$ 이므로,

넓이가 자연수 1 이 되는 점은 4 개다.



34. 두 점 A(-1, 3), B(2, a) 를
지나는 직선이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 접할 때, a의 값은?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

두 점 A(-1, 3), B(2, a) 를

지나는 직선의 방정식은, $y - 3 = \frac{a - 3}{3}(x + 1)$

$$\therefore (a - 3)x - 3y + a + 6 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

직선 $\textcircled{7}$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 접하므로

원의 중심 (0, 0) 에서 직선 $\textcircled{7}$ 에 이르는 거리가
원의 반지름의 길이인 1 과 같다.

$$\therefore \frac{|a + 6|}{\sqrt{(a - 3)^2 + 9}} = 1$$

$$\therefore |a + 6| = \sqrt{(a - 3)^2 + 9} \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{8}$ 의 양변을 제곱하면 $a^2 + 12a + 36 = a^2 - 6a + 9 + 9, 18a = -18$

$$\therefore a = -1$$

35. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $ax + by + c = 0$ 에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 모두 양수이고 $b \geq a$)

보기

- ㉠ $c = b$ 이면 두 점에서 만난다.
 ㉡ $c = 2b$ 이면 만나지 않는다.
 ㉢ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ 이면 한 점에서 만난다.

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

원의 중심이 $(0, 0)$ 이므로 원의 중심에서 직선 $ax + by + c = 0$ 에 이르는 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\textcircled{A} \quad d = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} < 1 \text{ 그러므로 교점은 2 개다.}$$

$$\text{즉, } n(A \cap B) = 2$$

$$\textcircled{B} \quad d = \frac{2b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \geq \frac{2b}{\sqrt{2}b} > 1 (\because b \geq a)$$

그러므로 교점은 없다.

$$\textcircled{C} \quad d = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1$$

그러므로 교점은 1 개다.

따라서 ㉠, ㉡, ㉢ 모두 참이다.

36. 원 $x^2 + y^2 = 8$ 과 제1사분면에서 접하는 접선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라고 할 때, 직각삼각형 OAB 의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, O 는 원점이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

제1사분면에서의 원 위의 접점을 (x_1, y_1) 이라고 하면 접선의 방정식은 $x_1x + y_1y = 8 \cdots \cdots \textcircled{1}$ (단, $x_1 > 0, y_1 > 0$)

한편, 두 점 A, B 는 각각 접선 $\textcircled{1}$ 과 x 축, y 축의 교점이므로

$$A\left(\frac{8}{x_1}, 0\right), B\left(0, \frac{8}{y_1}\right)$$

따라서, 직각삼각형 OAB 의 넓이를 S 라고 하면

$$S = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{x_1} \cdot \frac{8}{y_1} = \frac{32}{x_1y_1}$$

이 때, (x_1, y_1) 이 원 $x^2 + y^2 = 8$ 위의 점이므로

$$x_1^2 + y_1^2 = 8 \text{ 이고}$$

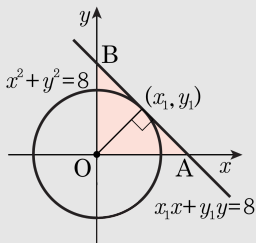
$x_1 > 0, y_1 > 0$ 에서

$$\frac{x_1^2 + y_1^2}{2} \geq \sqrt{x_1^2 \cdot y_1^2} = x_1y_1, \quad x_1y_1 \leq 4$$

$$\therefore \frac{1}{x_1y_1} \geq \frac{1}{4} \leftarrow \frac{x_1^2 + y_1^2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\therefore S = \frac{32}{x_1y_1} \geq 32 \cdot \frac{1}{4} = 8 \text{ (단, 등호는 } x_1 = y_1 \text{ 일 때 성립)}$$

따라서, 구하는 넓이의 최소의 값은 8 이다.



37. 원 밖의 한 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 그은 두 접선의 기울기를 p, q 라 할 때, $p - q$ 의 값은? (단, $p > q$)

① $\frac{\sqrt{6}}{5}$

② $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

③ $\frac{3\sqrt{6}}{5}$

④ $\frac{4\sqrt{6}}{5}$

⑤ $\sqrt{6}$

해설

점 $(3, -1)$ 을 지나고 기울기가 m 인 접선을

$y + 1 = m(x - 3)$ 즉, $mx - y - 3m - 1 = 0$ 이라고 하면

원의 중심 $(0, 0)$ 에서 접선까지의 거리는 원의 반지름 2와 같아야 한다. 따라서

$$2 = \frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}}, \quad |-3m - 1| = 2\sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱을 하여 정리를 하면,

$$5m^2 + 6m - 3 = 0 \text{ 이다.}$$

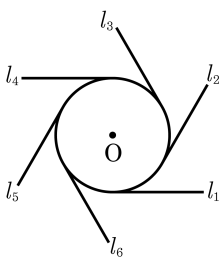
이때, 두 기울기 p, q 은 이차방정식의 두근이므로 근과 계수와의 관계에 의하여

$$\text{두근의 합 } p + q = -\frac{6}{5}, \quad \text{두근의 곱 } pq = -\frac{3}{5}$$

$$\text{따라서 } (p - q)^2 = (p + q)^2 - 4pq = \frac{36}{25} + \frac{12}{5} = \frac{96}{25}$$

$$\text{따라서 } p - q = \frac{4\sqrt{6}}{5}$$

38. 형중이는 수차 제작을 위해 그림과 같은 설계를 하고 있다. $l_1, l_2, \dots, l_6$ 는 원주를 6 등분하는 점에서 원의 접선 방향으로 붙인 날개의 단면이다. 두 접선 l_1 과 l_2 의 연장선의 교점으로부터 원의 중심까지의 거리는 반지름의 몇 배인가?



- ① 2 배 ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 배 ③ $3\sqrt{5}$ 배
 ④ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 배 ⑤ 5 배

해설

그림에서 $l_1 : y = -r$ 라 놓으면

$$l_2 : y = \sqrt{3}x + k = \sqrt{3}x - 2r$$

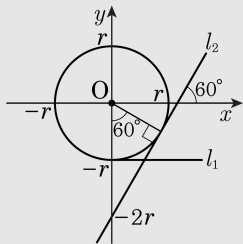
l_2 의 x 절편은 $\frac{2r}{\sqrt{3}}$ 이고

원의 반지름이 $\cos 30^\circ = \frac{r}{x}$ 이므로

$$x = r \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

따라서, 구하는 l_1 과 l_2 의 연장선의 교점으로부터

원의 중심까지의 거리는 반지름의 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 배이다.



39. 좌표평면 위의 원 $x^2 + y^2 = 9$ 와 이 원을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 도형의 교점이 1개일 때, $m^2 + n^2$ 의 값은?

① 20

② 25

③ 30

④ 36

⑤ 40

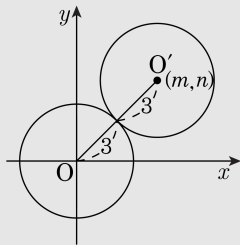
해설

중심이 $O(0, 0)$ 이고
반지름의 길이가 3인 원을,
 x 축의 방향으로 m 만큼,
 y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동하면
중심이 $O'(m, n)$ 이고
반지름의 길이가 3인 원이다.

두 원의 크기가 같으므로 내접할 수 없고,
두 원의 교점이 1개이므로 두 원은 서로 외접한다.
따라서 중심거리가 반지름의 길이의 합과 같으므로

$$\overline{OO'} = \sqrt{m^2 + n^2} = 3 + 3 = 6$$

$$\therefore m^2 + n^2 = 36$$



40. 두 점 $A(1, 3)$, $B(4, m)$ 과 x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' 라 하면

$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP} \geq \overline{AB}$ 이므로

$\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 선분 $A'B$ 의 길이와 같다.

점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점은 $A'(1, -3)$ 이므로

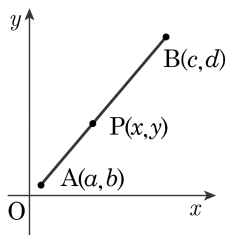
$\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은

$$\overline{A'B} = \sqrt{(4-1)^2 + (m+3)^2} = 5$$

$$(m+3)^2 + 9 = 25, (m+3)^2 = 16$$

$$m+3 = \pm 4 \quad \therefore m = 1 \quad (\because m > 0)$$

41. 두 점 $A(a, b)$, $B(c, d)$ 를 이은 선분 위에 점 $P(x, y)$ 가 있다. $\overline{AB} = 40$ 이고, $5x = 3a + 2c$, $5y = 3b + 2d$ 가 성립할 때, 선분 AP 의 길이를 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$$5x = 3a + 2c \text{ 이므로 } x = \frac{3a + 2c}{5} = \frac{2c + 3a}{2 + 3}$$

$$5y = 3b + 2d \text{ 이므로 } y = \frac{3b + 2d}{5} = \frac{2d + 3b}{2 + 3}$$

따라서 점 P 는 선분 AB 를 $2:3$ 으로 내분하는 점이다.

$$\therefore \overline{AP} = \frac{2}{5}\overline{AB} = \frac{2}{5} \cdot 40 = 16$$

42. 두 함수 $f(x) = x^2 - 6x$, $g(x) = mx + n$ 의 그래프가 만나는 서로 다른 두 교점과 점 $P(2, 5)$ 를 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표가 $(4, 1)$ 일 때, m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 교점을 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 라 하면

$x^2 - 6x = mx + n$, $x^2 - (m+6)x - n = 0$ 의 두 근이 x_1, x_2 이므로
근과 계수와의 관계에 의해 $x_1 + x_2 = m + 6$ 이다.

두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 와 $P(2, 5)$ 의 무게중심이 $(4, 1)$ 이므로

$$\frac{x_1 + x_2 + 2}{3} = 4 \text{에서 } x_1 + x_2 = 10 \text{이므로}$$

$$m + 6 = 10 \quad \therefore m = 4$$

43. 좌표평면 위에 있는 세 점 $A(2, 10), B(-8, -14), C(10, 4)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라고 할 때, D 의 좌표는?

① $D(5, 1)$

② $D(5, -1)$

③ $D(-5, 1)$

④ $D(-5, -1)$

⑤ $D(2, -3)$

해설

다음 그림과 같이 $\overline{AD}$ 가 각의 이등분선일 때,

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC} \text{ 이다.}$$

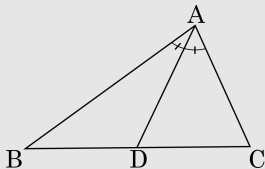
$$\overline{AB} = 26, \overline{AC} = 10 \text{ 이고}$$

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC} \text{ 이므로}$$

D 는 $\overline{BC}$ 를 $13 : 5$ 로 내분하는 점이다.

$$D \left(\frac{13 \times 10 + 5 \times (-8)}{13 + 5}, \frac{13 \times 4 + 5 \times (-14)}{13 + 5} \right)$$

$$\therefore D(5, -1)$$



44. 길이 3인 선분 AB의 양 끝점 A, B가 각각 x 축, y 축 위를 움직일 때, 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 자취를 구하면?

① $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

② $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$

③ $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

④ $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

⑤ $x^2 + 3y^2 = 6$

해설

A(a , 0), B(0, b), P(x , y)라 하면

$\overline{AB} = 3$ 이므로 $\sqrt{a^2 + b^2} = 3$

$a^2 + b^2 = 9 \dots \textcircled{㉠}$

P(x , y)는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로 $x = \frac{a}{3}, y = \frac{2b}{3}$

$\therefore a = 3x, b = \frac{3y}{2} \dots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉡}$ 를 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면 $9x^2 + \frac{9}{4}y^2 = 9$

$\therefore x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

45. 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD에서 두 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 의 중점을 각각 M, N이고, P, Q를 각각 $\overline{AN}$, $\overline{DM}$ 과 $\overline{AN}$, $\overline{DB}$ 의 교점이라 할 때, 사각형 BMPQ의 넓이는?

① $\frac{7}{15}$

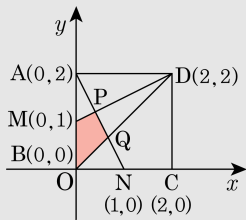
② $\frac{3}{5}$

③ $\frac{1}{5}$

④ $\frac{9}{16}$

⑤ $\frac{3}{4}$

해설



좌표를 이용하여

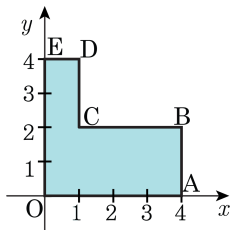
$A(0, 2)$, $B(0, 0)$, $C(2, 0)$, $D(2, 2)$ 라고 표시하면,
 $M(0, 1)$, $N(1, 0)$ 이고, 직선 BQ, PQ, MP의 방정식은

각각 $y = x$, $y = -2x + 2$, $y = \frac{1}{2}x + 1$

따라서 $P\left(\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right)$, $Q\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 이므로

$$\begin{aligned} \square BMPQ &= \triangle ABN - \triangle AMP - \triangle BNQ \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{5} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{15} \end{aligned}$$

46. 아래 그림과 같이 점 $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(4, 2)$, $C(1, 2)$, $D(1, 4)$, $E(0, 4)$ 를 꼭지점으로 하는 도형의 넓이를 직선 $y = ax$ 가 이등분할 때, a 의 값은?



① $\frac{2}{3}$

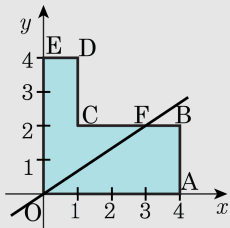
② $\frac{4}{5}$

③ $\frac{5}{6}$

④ $\frac{6}{7}$

⑤ 1

해설



어두운 부분의 넓이가 10이고, 직선 $y = ax$ 로 이등분되므로 점 F의 좌표를 $(k, 2)$ 라 하면

$$\text{사다리꼴 OABF의 넓이는 } \frac{1}{2} \{4 + (4 - k)\} \times 2 = 5$$

$\therefore k = 3$ 따라서, 기울기는 $\frac{2}{3}$ 이다.

47. 좌표평면 위에서 $x^2 + 2xy + 2y^2 - 4x - ky + 5 = 0$ 이 두 개의 직선을 나타낼 수 있도록 하는 k 의 값을 구하면? (단, $k < 5$)

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 4

해설

x 에 관해서 정리하면, $x^2 + 2(y-2)x + 2y^2 - ky - 5 = 0 \cdots \textcircled{7}$

$\textcircled{7}$ 이 두 일차식의 곱으로 나타내어지므로

$$D/4 = (y-2)^2 - (2y^2 - ky + 5)$$

$= -y^2 + (k-4)y - 1$ 이 완전제곱식이 되어야 한다.

$$\therefore D = (k-4)^2 - 4 = 0 \text{에서 } k = 2$$

48. 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 와 x 축이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식을 구할 때 기울기는? (단, 기울기는 양수이다.)

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$

⑤ $\frac{3}{4}$

해설

각의 이등분선은 각의 두 변에서 같은 거리에 있는 점들이다. 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(x, y)$ 에서 각의 두 변인 x 축과 직선

$$y = \frac{4}{3}x \text{ 에 이르는 거리는 같다. } |y| = \frac{|4x - 3y|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}, y = \pm \frac{4x - 3y}{5}$$

기울기가 양수이므로 $y = \frac{1}{2}x$, 기울기는 $\frac{1}{2}$

50. 한 점 $P(a, b)$ 에서 두 원 $(x-4)^2+(y+1)^2 = 4$ 와 $(x-2)^2+(y-2)^2 = 9$ 에 그은 각각의 접선과 두 원과의 접점을 A, B 라 할 때, $\overline{PA} = \overline{PB}$ 인 점 $P(a, b)$ 의 자취를 구하면?

① $2a - 3b - 7 = 0$

② $2a - 3b + 7 = 0$

③ $a^2 + b^2 = 3$

④ $a^2 + b^2 = 4$

⑤ $a^2 + b^2 = 5$

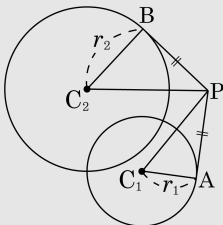
해설

$$(x-4)^2+(y+1)^2 = 4, (x-2)^2+(y-2)^2 = 9$$

문제의 조건에서

$$\overline{PA} = \overline{PB} \text{ 이므로 } (\overline{PA})^2 = (\overline{PB})^2$$

$$\Rightarrow (\overline{PC_1})^2 - r_1^2 = (\overline{PC_2})^2 - r_2^2$$



원의 중심 $C_1 = (4, -1)$, $C_2 = (2, 2)$,

반지름 $r_1 = 2$, $r_2 = 3$

$$\therefore (a-4)^2+(b+1)^2-4=(a-2)^2+(b-2)^2-9$$

$\therefore$ 위를 정리하면 $2a - 3b - 7 = 0$