1. 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(3,\ a)$, $\mathrm{C}(4,\ 2)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}}$일 때, a의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

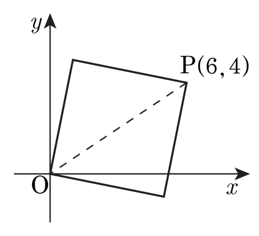
$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2$이므로

$(3-2)^2 + (a-0)^2 = (4-3)^2 + (2-a)^2$

$1 + a^2 = 1 + 4 - 4a + a^2$

$4a = 4 \qquad \therefore a = 1$

2. 다음 그림과 같은 정사각형의 넓이는?



① 16　② 20　③ 26
④ 32　⑤ 52

해설

$\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$ 이므로
주어진 정사각형의 한 변의 길이를 a라고 하면
$\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{52}$ 에서 $a^2 = 26$ 이다.
따라서 정사각형의 넓이는 26이다

3. 두 점 $A(2,0)$, $B(5,3)$ 에 대하여 $\overline{AB}$ 를 $2:1$ 로 내분하는 점을 P , $2:1$ 로 외분하는 점을 Q 라고 할 때, $\overline{PQ}$ 의 길이를 구하면?

① $2\sqrt{2}$　② $\sqrt{10}$　③ 10　④ 4　⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$$P = \left(\frac{2\times5+1\times2}{3}, \frac{2\times3+1\times0}{3}\right) = (4,2)$$

$$Q = \left(\frac{2\times5-1\times2}{2-1}, \frac{2\times3-1\times0}{2-1}\right) = (8,6)$$

$$\therefore\ \overline{PQ} = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}$$

4. $\triangle$ABC 의 세 꼭짓점의 좌표가 A $(-1, -2)$, B $(2,\ 5)$, C $(7,\ 3)$ 으로 주어질 때, 각 변의 중점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표는?

① G $\left(\frac{4}{3},\ 1\right)$　② G $\left(\frac{7}{3},\ \frac{2}{3}\right)$　③ G $\left(2,\ \frac{8}{3}\right)$
④ G $\left(\frac{8}{3},\ 1\right)$　⑤ G $\left(\frac{8}{3},\ 2\right)$

해설

세 변의 중점의 좌표를 각각 구하면

$\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{9}{2},\ 4\right)$, $\left(3,\ \frac{1}{2}\right)$

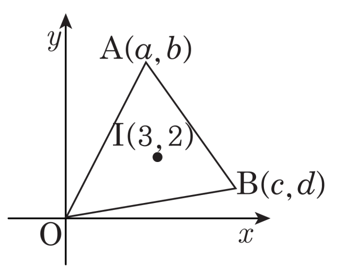
구하고자 하는 무게중심의 좌표를 G (x, y) 라 하면

$x = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{9}{2} + 3}{3}$, $y = \dfrac{\frac{3}{2} + 4 + \frac{1}{2}}{3}$

$\therefore\ x = \frac{8}{3},\ y = 2$

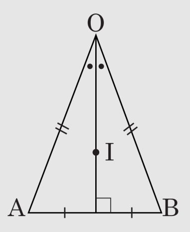
$\therefore$ G $\left(\frac{8}{3}, 2\right)$

5. 그림과 같이 세 점 O(0, 0), A(a, b), B(c, d) 로 이루어진 삼각형 OAB 의 내심 I 의 좌표가 (3, 2) 이다. $\overline{OA} = \overline{OB}$ 일 때, $\frac{3c+2d}{3a+2b}$ 의 값은?



① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{2}{3}$
④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ 알 수 없다

해설



$\triangle$OAB 가 $\overline{OA} = \overline{OB}$ 인 이등변삼각형이고,
$\angle AOI = \angle BOI$ 이므로
$\overline{OI}$ 는 $\overline{AB}$ 와 수직이다.
$\overline{OI}$ 의 기울기가 $\frac{2}{3}$ 이므로
$\overline{AB}$ 의 기울기는 $-\frac{3}{2}$ 이다.
$\therefore \frac{b-d}{a-c} = -\frac{3}{2}$
$\therefore 3a+2b = 3c+2d$
$\therefore \frac{3c+2d}{3a+2b} = 1$

6. 두 직선 $x+y-4=0,\ 2x-y+1=0$의 교점과 점 $(2,-1)$을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y=ax+b$이다. ab의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=-28$

해설

$\begin{cases} x+y-4=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$ 을 연립하면

교점 : $(1,3) \Rightarrow$ $(1,3),(2,-1)$을 지나는 직선

$y=\dfrac{-1-3}{2-1}(x-1)+3$

$\Rightarrow\ y=-4x+7$

$\therefore a=-4,\ b=7$

$\therefore\ ab=-28$

7. 포물선 $y = x^2 - x + 1$ 위의 점 중에서 직선 $y = x - 3$ 에의 거리가 최소인 점을 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

직선 $y = x - 3$ 에 평행인 직선 $y = x + k$ 와
포물선 $y = x^2 - x + 1$ 과의 접점이 구하는 점이다.
$x^2 - x + 1 = x + k$ 에서 $\frac{D}{4} = 1 - (1 - k) = 0$
$\therefore\ k = 0$
이때, $x = 1,\ y = 1$ 이므로
구하는 점은 $(1,\ 1)$
$\therefore\ a = 1,\ b = 1$
$\therefore\ a + b = 2$

8. 원점에서 직선 $ax + by + 4 = 0$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 일 때 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하면?

① 4 ② 8 ③ $3\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $2\sqrt{3}$

해설

원점 $(0,\ 0)$ 에서 직선 $ax + by + 4 = 0$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|a \times 0 + b \times 0 + 4|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{4}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{2}$$

$4 = \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow 2(a^2 + b^2) = 16$

$\therefore\ a^2 + b^2 = 8$

9. 복소수 $z=a+bi$를 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대응시킬 때, $(2-3i)z$가 실수가 되게 하는 점 P가 그리는 도형은? (단, a, b는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① 원

② 아래로 볼록한 포물선

③ 위로 볼록한 포물선

④ 기울기가 음인 직선

⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$$\begin{aligned}(2-3i)z &= (2-3i)(a+bi)\\ &= (2a+3b)+(2b-3a)i \cdots ㉠\end{aligned}$$

㉠이 실수이려면 $2b=3a$

$\therefore\ b=\dfrac{3}{2}a$

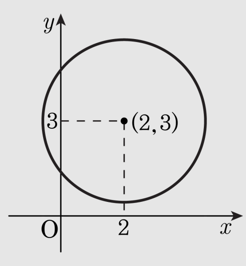
따라서, 기울기가 양인 직선이다.

10. 원 $x^2+y^2-4x-6y-c=0$ 이 y 축과 만나고 x 축과는 만나지 않을 때, 정수 c 의 개수는?

① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

원의 방정식
$x^2+y^2-4x-6y-c=0$
을 표준형으로 바꾸면
$(x-2)^2+(y-3)^2=c+13$ 이므로
중심이 $(2,3)$ 반지름의 길이가 $\sqrt{c+13}$
인 원이 된다.



다음 그림과 같이 y 축과는 만나고,
x 축과는 만나지 않으므로
$2 \le \sqrt{c+13} < 3$ 에서 $-9 \le c < -4$
$\therefore$ 정수 c 의 개수는 $-9,-8,-7,-6,-5$ 의 5 개

11. 원 $x^2+y^2+4x-10y+28=0$ 의 중심과 점 $(4,\ -1)$ 을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 이라고 할 때, $a+b+r^2$ 의 값은?

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

해설

$x^2+y^2+4x-10y+28=0$
$\Rightarrow\ (x+2)^2+(y-5)^2=1$
$\therefore$ 구하는 원은 $(-2,\ 5)$ 와 $(4,\ -1)$ 을 지름의 양 끝으로 하는 원이다.
이 원은 중심이 $\left(\frac{-2+4}{2},\ \frac{5-1}{2}\right)=(1,\ 2)$
반지름이 $\frac{1}{2}\sqrt{(4+2)^2+(-1-5)^2}=3\sqrt{2}$
이므로 원의 방정식은
$(x-1)^2+(y-2)^2=(3\sqrt{2})^2=18$
$\therefore\ a=1,\ b=2,\ r^2=18$
$\therefore\ a+b+r^2=21$

12. 세 점 $(-1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(6,\ 0)$을 지나는 원의 중심의 좌표는?

① $(2, 3)$　② $(-2, 3)$　③ $(2, -3)$
④ $(-2, -3)$　⑤ $\left(2, \frac{3}{2}\right)$

해설

세 점 $(-1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(6,\ 0)$을 지나는 원의 방정식을
$x^2+y^2+ax+by+c=0$ 이라 하면
이 원이 세점을 지나므로
$(-1)^2+1^2-a+b+c=0$
$\therefore a-b-c=2 \cdots\cdots$ ㉠
$2^2+2^2+2a+2b+c=0$
$\therefore 2a+2b+c=-8 \cdots\cdots$ ㉡
$6^2+6a+c=0$
$\therefore 6a+c=-36 \cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$a=-4,\ b=6,\ c=-12$
즉, $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ 이므로
표준형으로 나타내면
$(x-2)^2+(y+3)^2=25$
따라서, 원의 중심의 좌표는 $(2,\ -3)$ 이다.

13. 직선 $x+3y-k=0$이 원 $(x-5)^2+y^2=3$의 넓이를 이등분할 때, k의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.
따라서 원의 중심 $(5,\ 0)$이 직선 위에 있으므로 $5-k=0$
$\therefore\ k=5$

14. 평행이동 $f:(x,y)\to(x+a,\ x+b)$ 에 의해 점 $(1,2)$ 가 점 $(-1,4)$ 으로 옮겨질 때, 평행이동 f 에 의해 원점으로 옮겨지는 점의 좌표는?

① $(2,-2)$ ② $(2,2)$ ③ $(2,0)$
④ $(-2,2)$ ⑤ $(4,2)$

해설
$(1+a, 2+b) = (-1,4)$
$\Rightarrow \quad a=-2, \quad b=2$
$\therefore \quad (x+2, y+2) = (0,0)$
$\Rightarrow \quad x=2, \quad y=-2$
$\Rightarrow \quad (2,-2)$

15. 직선 $3x + y - 5 = 0$을 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 n만큼 평행이동하면 직선 $3x + y - 1 = 0$이 된다. 이 때, n의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

x축 방향으로 1, y축 방향으로 n만큼 평행이동하므로
직선 $3x + y - 5 = 0$에 x 대신 $x - 1$, y 대신 $y - n$을 대입하면
$3(x - 1) + (y - n) - 5 = 0$
$3x + y - n - 8 = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 $3x + y - 1 = 0$과 일치하므로 $-n - 8 = -1 \therefore\ n = -7$

16. 두 직선 $x-3y+5=0$, $x+9y-7=0$ 의 교점을 지나고, x 축의 양의 방향과 $30°$ 의 각을 이루는 직선의 방정식이 $x+by+c=0$ 일 때 $b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

두 식을 연립하여 풀면 두 직선의 교점의 좌표는

$(-2,\ 1)$ 이고, 기울기는 $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y-1=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+2)$

$\therefore x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}+2=0$

$\therefore b=-\sqrt{3},\ c=2+\sqrt{3} \quad \therefore\ b+c=2$

17. 두 점 $(4, -2), (2, -3)$ 을 지나는 직선의 x 절편을 A, y 절편을 B, 원점을 O 라 할 때, $\triangle$OAB 의 면적을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(4, -2), (2, -3)$ 를 지나는 직선은

$y = \frac{-2-(-3)}{4-2}(x-2) - 3 = \frac{1}{2}x - 4$

$\Rightarrow$ x 절편은 8 이고, y 절편은 -4 이다.

$\therefore$ $\triangle$OAB 의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$ 이다.

18. 점 $(2,4)$ 를 지나며 기울기가 음인 직선과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 16 이다. 이 직선의 x 절편을 a, y 절편을 b 라 할 때, $a+b$ 의값은?

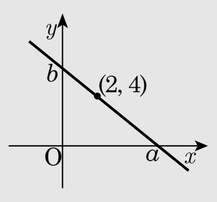
① 12　② 14　③ 16　④ 18　⑤ 20

해설

구하는 직선의 방정식을 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 이 직선이 점 $(2,4)$ 를 지나므로

$\frac{2}{a}+\frac{4}{b}=1$

$\therefore\ 4a+2b=ab\cdots$㉠



$\triangle ABC$ 의 넓이가 16 이므로

$\frac{1}{2}ab=16 \therefore\ ab=32\cdots$㉡

㉠ ㉡에서 $a=4, b=8, a+b=12$

19. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $A(-2k-1, 5)$ $B(k, -k-10)$, $C(2k+5, k-1)$가 일직선 위에 있을 때, k의 값의 곱을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

세 점 A, B, C가 일직선 위에 있으므로
직선 AB와 직선 BC의 기울기는 같다.

$$\frac{-k-10-5}{k-(-2k-1)} = \frac{(k-1)-(-k-10)}{2k+5-k}$$

이 식을 정리하면 $k^2+7k+12=0$

$\therefore$ k의 값의 곱은 12이다.

20. x, y에 관한 이차방정식 $2x^2-3xy+ay^2-2x+9y+b=0$이 직교하는 두 직선의 곱을 나타낼 때, ab를 구하면?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

준식이 나타내는 두 직선을
$px+qy+r=0 \cdots$ ㉠,
$p'x+q'y+r'=0 \cdots$ ㉡이라 하자.
㉠과 ㉡은 서로 직교하므로
$pp'+qq'=0$이다.
(준식)$=(px+qy+r)(p'x+q'y+r')=0$의
전개식에서 x^2 의 계수와 y^2 의 계수의 합은
$pp'+qq'$ 이므로 $a+2=pp'+qq'=0$
$\therefore\ a=-2$
$a=-2$를 준식에 대입하여 정리하면
(준식)
$=2x^2-(3y+2)x+(-2y^2+9y+b)=0 \cdots$ ㉢
㉢이 두 직선의 곱을 나타내므로
㉢의 판별식 $D_1=(3y+2)^2-8(-2y^2+9y+b)$
$=25y^2-60y+(4-8b) \cdots$ ㉣이 완전제곱식이다.
따라서 ㉣의 판별식 $\frac{D_2}{4}$는 0이다.
$\frac{D_2}{4}=30^2-25(4-8b)=0$
$\therefore\ b=-4$
$\therefore\ ab=(-2)\cdot(-4)=8$

21. 직선 $x + ay + 1 = 0$이 직선 $2x + by + 1 = 0$에 수직이고 직선 $x - (b-1)y - 1 = 0$과 평행할 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

두 직선 $x + ay + 1 = 0$, $2x + by + 1 = 0$이 서로 수직이므로

$1 \cdot 2 + a \cdot b = 0 \quad \therefore\ ab = -2 \cdots$ ㉠

두 직선 $x + ay + 1 = 0$, $x - (b-1)y - 1 = 0$이 서로 평행하므로

$\frac{1}{1} = \frac{a}{1-b} \neq \frac{1}{-1} \quad \therefore\ a + b = 1 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 에서 $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

$\therefore\ 1 - 2 \cdot (-2) = 5$

22. 세 직선 $x+2y-3=0,\ 3x+y-4-a=0,\ \ 2x-3y-2a=0$ 이 한 점에서 만나도록 상수 a 의 값은?

① $a=-\frac{3}{5}$　　② $a=-\frac{1}{3}$　　③ $a=-\frac{5}{3}$
④ $a=\frac{5}{3}$　　⑤ $a=5$

해설

두 직선의 교점이 다른 한 직선 위에 있으면 된다.

$x+2y-3=0$ $\cdots$ ㉠
$3x+y-4-a=0$ $\cdots$ ㉡
$2x-3y-2a=0$ $\cdots$ ㉢라하고,

㉡ $\times 3+$ ㉢ $\Leftrightarrow \therefore\ 11x-12-5a=0$

$\therefore\ x=\frac{5a+12}{11}$

㉡ $\times 2-$ ㉢ $\times 3 \Leftrightarrow \therefore\ 11y-8+4a=0$

$\therefore\ y=\frac{-4a+8}{11}$

$\therefore$ ㉡, ㉢의 교점의 좌표는 $\left(\frac{5a+12}{11},\ \frac{-4a+8}{11}\right)$

이 점이 ㉠위에 있어야 하므로

$\frac{5a+12}{11}+2\,\frac{-4a+8}{11}-3=0$

즉, $\frac{5a+12-8a+16}{11}-3=0$

$-3a+28=33,\ 3a=-5 \quad \therefore\ a=-\frac{5}{3}$

23. 직선 $(k-2)x+(2k-3)y+4k-3=0$은 실수 k의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지날 때, 그 점의 좌표를 구하면?

① $(6, -5)$　② $(5, -6)$　③ $(4, -3)$
④ $(5, -4)$　⑤ $(-3, 6)$

해설

$(k-2)x+(2k-3)y+4k-3=0$

$\Rightarrow \quad (x+2y+4)k-(2x+3y+3)=0$

k에 관계없이 일정한 점을 지나려면

$x+2y+4=0, \quad 2x+3y+3=0$

연립하면 $x=6, \ y=-5$

$\therefore$ 일정한 점은 $(6, -5)$

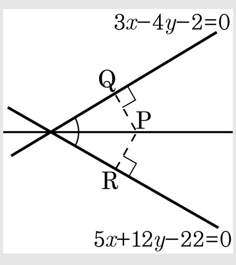
24. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$\dfrac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$

$13(3X-4Y-2)=\pm 5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$

25. 중심이 직선 $3x+y=12$ 의 제 1 사분면 위에 있고, x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 중심이 (a,b) 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면
중심의 좌표는 $(r,\ r)$ 이다.
따라서, 구하는 원의 방정식을
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2 \quad \cdots\cdots$ ㉠
한편, 점 $(r,\ r)$ 는 직선 $3x+y=12$ 위에 있으므로 $3r+r=12$
$\therefore\ r=3$
따라서, 구하는 원의 방정식은 ㉠에서 $(x-3)^2+(y-3)^2=3^2$

26. 두 원 $C_1 : x^2 + y^2 = 9$, $C_2 : x^2 + y^2 - 6ax - 8ay + 25a^2 - 4 = 0$ 과 외접하도록 상수 a 의 값 또는 그 범위를 정하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$C_1 : x^2 + y^2 = 9$
$C_2 : (x - 3a)^2 + (y - 4a)^2 = 4$ 이므로
두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이는 각각 $3, 2$ 이고,
중심거리는 $\sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a$
이때, $3 + 2 = 5a$
$\therefore a = 1$

27. 두 원 $x^2 + y^2 - 5 = 0$, $x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$ 의 교점과 점$(1, 1)$을 지나는 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 일 때, $A + B - C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2 + y^2 - 5 = 0$, $x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$
교점을 지나는 원의 방정식은
$(x^2 + y^2 - 5)m + x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$
의 꼴이고, 이 원이 점 $(1, 1)$을지나므로
$(1 + 1 - 5)m + 1 + 1 - 3 - 1 - 4 = 0$
$\therefore m = -2$
이 값을 대입하고 정리하면
$x^2 + y^2 + 3x + y - 6 = 0$ 이다.
$\therefore A = 3,\ B = 1,\ C = -6$
그러므로 $A + B - C = 10$

28. 두 원 $x^2+y^2-2x+ky-4=0$, $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 의 공통현의 방정식이 직선 $y=x-1$ 과 수직일 때, k 의 값은?

① -3　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 3

해설

두 원의 공통현의 방정식은
$x^2+y^2-2x+ky-4-(x^2+y^2-4x-2y+4)=0$
$2x+(k+2)y-8=0 \cdots$ ㉠
직선 ㉠과 직선 $y=x-1$,
즉 $x-y-1=0$ 이 수직이므로
$2\cdot 1+(k+2)(-1)=0 \quad \therefore k=0$

29. 직선 $y = x + n$ 과 원 $x^2 + y^2 = 8$ 이 만나지 않도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(0,\ 0)$ 에서 직선 $y = x + n$ 까지의 거리가
반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 보다 크면 된다.

$\dfrac{|n|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}$

$\therefore\ n > 4$ ($\because$ n 은 자연수)

$\therefore$ 최소의 n 은 5 이다.

30. 원 $x^2+y^2=2$ 와 직선 $y=-x+k$ 이 한점에서 만나도록 하는 k 값은?(단, $k<0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $k=-2$

해설

원이 직선과 한 점에서 만나려면,
즉 접하려면 원의 중심과 직선사이 거리가
반지름과 같아야 한다.
$\Rightarrow$ 중심 : $(0,\ 0)$ 직선 : $x+y-k=0$
$\dfrac{|1\times 0+1\times 0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$
$\Rightarrow$ $k=\pm 2$
$\therefore$ $k=-2$ ($\because$ $k<0$)

31. 점 $(3,\ -1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y절편을 구하여라.

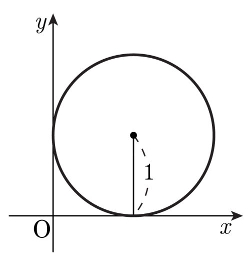
▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(3,\ -1)$을 지나고 접선의 기울기를 m이라고 하면
접선은 $y+1=m(x-3)\cdots①$
따라서 원의 중심$(0,0)$에서 직선
$mx-y-3m-1=0$과의 거리가
원의 반지름 $\sqrt{5}$와 같다.
$\dfrac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$, $|-3m-1|=\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하면
$9m^2+6m+1=5m^2+5$, $4m^2+6m-4=0$
따라서, 기울기 $m=\dfrac{1}{2},-2$
여기서 기울기가 음수인 -2를 ①에 대입하면
$y=-2x+5$
따라서 y절편은 5이다.

32. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1 인 원이 x 축, y 축에 동시에 접하고 있다. 이 원 위의 점 $(x,\ y)$ 에 대하여 $\dfrac{y+2}{x+1}$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\dfrac{y+2}{x+1} = k$ 라 하면 직선 $y+2 = k(x+1)$ 은
k 값에 관계없이 점 $(-1, -2)$ 를 지난다.
이 때, 기울기 k 는 직선이 원래 접할 때 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$$\frac{|k-1+k-2|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$$

$|2k-3| = \sqrt{k^2+1}$

$4k^2 - 12k + 9 = k^2 + 1$

$3k^2 - 12k + 8 = 0$

최댓값과 최솟값은 이 방정식의 해이므로
근과 계수와의 관계에 의해 합은 4 이다.

33. 점 $(a-4, a-2)$ 를 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 다음, $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점과 원점 사이의 거리가 2일 때, 처음 점의 좌표를 (p, q) 라 한다. p^2+q^2 의 값을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$(a-4, a-2) \rightarrow (a, a-2)$
(x 축으로 4만큼 평행이동)
$(a, a-2) \rightarrow (a-2, a)$
($y=x$ 에 대칭이동)
$(a-2, a)$ 와 원점 사이의 거리는
$\sqrt{(a-2)^2+a^2}=2$
$2a^2-4a+4=4,$
$\therefore a=2 \ \ (\because a \neq 0)$
처음 점의 좌표 $(a-4, a-2)$ 에 $a=2$ 를 대입하면
구하는 점의 좌표 $(p,\ q)=(-2,\ 0)$
$\therefore p^2+q^2=4$

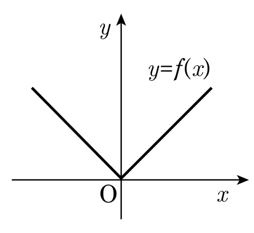
34. 점$(3,\ 4)$를 직선 $x-y+2=0$에 대하여 대칭이동한 점을 구하면?

① $(1,\ 5)$ ② $(2,\ 5)$ ③ $(3,\ 5)$
④ $(4,\ 5)$ ⑤ $(6,\ 5)$

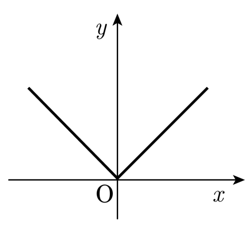
해설

구하려는 점을 $(a,\ b)$라 하면, $(3,\ 4)$와 $(a,\ b)$의 중점은 $x-y+2=0$ 위를 지나고, 두 점을 이은 직선과 $x-y+2=0$은 수직이다.
따라서 중점인 $\left(\frac{a+3}{2},\ \frac{b+4}{2}\right)$를 $x-y+2=0$ 에 대입하면
$a-b=-3\cdots$①
수직조건은 기울기의 곱이 -1이므로 $x-y+2=0$의 기울기가 1일때 두점을 지나는 기울기는 -1이다.
$\frac{b-4}{a-3}=-1$, $a+b=7\cdots$②
따라서 ①, ②를 연립하면 $a=2, b=5$

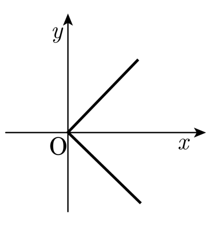
35. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 중
$y = -f(-x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



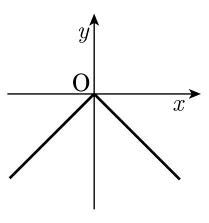
①



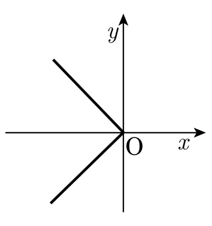
②



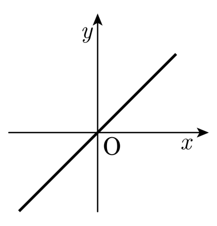
③



④



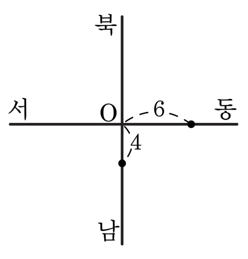
⑤



해설

$y = -f(-x)$, 즉 $-y = f(-x)$ 는 $y = f(x)$ 에
x 대신 $-x$, y 대신 $-y$ 를 대입한 것이므로
$y = f(x)$ 의 그래프를 원점에 대하여
대칭이동한 것이다.
따라서, $y = -f(-x)$ 의 그래프의 개형으로
옳은 것은 ③이다.

36. 다음의 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 6km, B는 남쪽으로 4km 지점에 있다. 지금 A는 시속 4km의 속도로 서쪽으로, B는 시속 2km의 속도로 북쪽을 향하여 동시에 출발했을 때 A, B 사이의 거리가 가장 짧을 때는 출발 후 몇 시간 후인가?

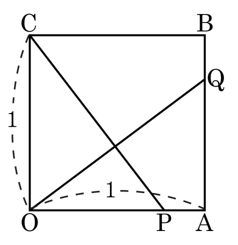


① 1 시간 후 ② 1.2 시간 후 ③ 1.4 시간 후
④ 1.6 시간 후 ⑤ 2 시간 후

해설

동서를 x 축, 남북을 y 축으로 잡으면 최초의 A, B 의 위치는 A(6, 0), B(0, −4) 이고 t 시간 후의 A, B 의 좌표는 $A(6-4t,\ 0)$, $B(0, -4+2t)$ 이다. 따라서, t 시간 후의 $\overline{AB}$ 의 거리는 s 는 $s = \sqrt{(6-4t)^2+(-4+2t)^2} = \sqrt{20t^2-64t+52} = \sqrt{20\left(t^2-\frac{64}{20}t\right)+52} = \sqrt{20\left(t-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{4}{5}}$ 이므로 $t = \frac{8}{5}$ 일 때 최소가 된다. ∴ 출발 후 1.6 시간 후이다.

37. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1 인 정사각형 OABC 의 두 변 $\overline{\mathrm{OA}}$, $\overline{\mathrm{AB}}$ 위에 각각 점 P, Q 를 $\overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{AQ}}$ 가 되도록 잡을때, ($\overline{\mathrm{CP}}$ 의 기울기) × ($\overline{\mathrm{OQ}}$ 의 기울기)를 구하면?



① $-\frac{1}{2}$　　② -1　　③ $\frac{1}{2}$

④ 1　　⑤ 2

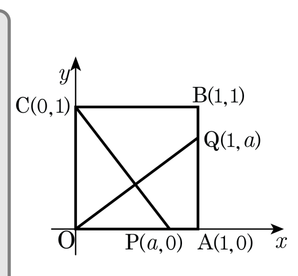
해설

정사각형 OABC 에 다음 그림과 같이 좌표축을 잡으면 ($\overline{\mathrm{CP}}$ 의 기울기)$= \frac{-1}{a}$,

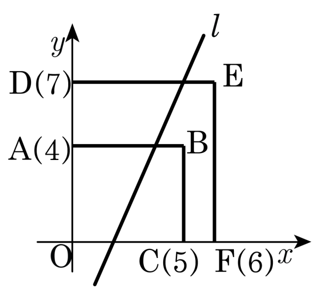
($\overline{\mathrm{OQ}}$ 의 기울기)$= \frac{a}{1}$

따라서, 두 직선의 기울기의 곱은

$\left(\frac{-1}{a}\right) \times \left(\frac{a}{1}\right) = -1$



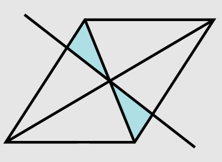
38. 아래 그림에서 직선 l이 두 직사각형 □OABC와 □ODEF의 넓이를 동시에 이등분할 때, 직선 $l : y = ax + b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하면?



① $-\frac{5}{2}$　② $-\frac{3}{2}$　③ $-\frac{1}{2}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{3}{2}$

해설

평행사변형의 넓이를 이등분하는 직선은 두 대각선의 중점을 지나는 직선이다.



따라서, □OABC와 □ODEF의 넓이를 동시에 이등분하는 직선 l은 두 직사각형의 중점을 지날때이다.

□OABC의 중점 : $\left(\frac{5}{2}, \frac{4}{2}\right)$

□ODEF의 중점 : $\left(\frac{6}{2}, \frac{7}{2}\right)$ 이므로

$y = 3x - \frac{11}{2}$ $\therefore$ $a = 3, b = -\frac{11}{2}$

$\therefore$ $a + b = 3 - \frac{11}{2} = -\frac{5}{2}$

해설

직선이 두 사각형과 만나는 점은

$\left(\frac{4-b}{a}, 4\right), \left(\frac{7-b}{a}, 7\right)$ 이다.

이제 각각의 오른쪽 사다리꼴의 넓이를 구해보면

ⅰ)□OABC : $\frac{4}{2}((5 + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}) + (5 - \frac{4\mathrm{b}}{\mathrm{a}})) = 10$

$\Rightarrow$ $2b - 4 + 5a = 0$

ⅱ)□ODEF : $\frac{7}{2}((6 + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}) + (6 - \frac{7-\mathrm{b}}{\mathrm{a}})) = 21$

$\Rightarrow$ $6a + 2b - 7 = 0$

ⅰ)과 ⅱ)를 연립하면

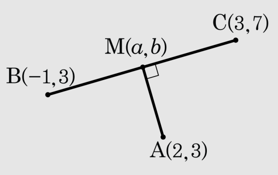
$a = 3, b = -\frac{11}{2}$ $\therefore$ $a + b = 3 - \frac{11}{2} = -\frac{5}{2}$

39. 점 A(2, 3) 에서 두 점 B(−1, 3) , C(3, 7) 을 이은 선분 BC 에 내린 수선의 발을 M(a, b) 라 할 때, $4ab$ 의 값은?

① 7　　② 9　　③ 11　　④ 13　　⑤ 15

해설

$\overline{BC} \perp \overline{AM}$ 이므로 두 직선의 기울기의 곱은 −1 이다.



즉, $\dfrac{7-3}{3-(-1)} \times \dfrac{b-3}{a-2} = -1$

$b-3 = -(a-2)$,　 $\therefore\ a+b=5 \cdots$ ㉠

한편, 직선 BC 의 방정식은

$y-3 = \dfrac{7-3}{3-(-1)}(x+1)$

$\therefore\ y = x+4$

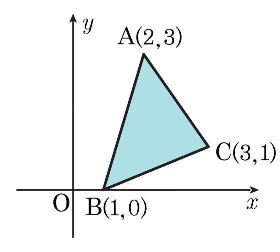
이 때, 점 M 이 $\overline{BC}$ 위의 점이므로

$b = a+4 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{9}{2}$

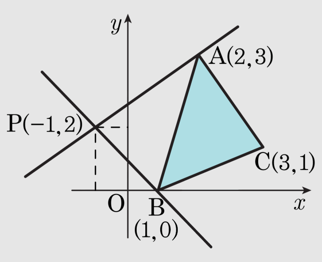
$\therefore\ 4ab = 4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{9}{2} = 9$

40. 직선 $y=-mx-m+2$ 가 아래 그림의 삼각형 ABC 를 지나기 위한 m 의 범위는?



① $-1 \le m \le 3$　② $-1 \le m \le \frac{1}{3}$
③ $-\frac{1}{3} \le m \le 1$　④ $-\frac{1}{3} \le m \le 3$
⑤ $1 \le m \le 3$

해설



직선 $y=-mx-m+2$ 에서 $mx+y+m-2=0$

$m(x+1)+y-2=0$ 이므로

점 P$(-1,\ 2)$ 를 반드시 지난다.

따라서 직선 $y=-mx-m+2$ 가 $\triangle$ABC 를 지나기 위한 기울기 $-m$ 의 범위는

(직선 PB 의 기울기) $\le -m \le$ (직선 PA 의 기울기)

직선 PB 의 기울기는 $\frac{2-0}{-1-1}=-1$

직선 PA 의 기울기는 $\frac{2-3}{-1-2}=\frac{1}{3}$

$-1 \le -m \le \frac{1}{3}$

$\therefore\ -\frac{1}{3} \le m \le 1$

41. 원점 $O(0,\ 0)$ 에서 직선 $(k+1)x+(k+2)y+3=0$ 에 내린 수선의 길이가 최대일 때, 그 길이는? (단, k 는 상수)

① 2　　② 3　　③ $2\sqrt{2}$　　④ $2\sqrt{3}$　　⑤ $3\sqrt{2}$

해설

원점과 직선 사이의 거리를 d 라 하면

$$d=\frac{|3|}{\sqrt{(k+1)^2+(k+2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2k^2+6k+5}}$$

$$\le \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=3\sqrt{2}$$

$(\because\ \sqrt{2k^2+6k+5}$

$$=\sqrt{2\left(k+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\ge\sqrt{\frac{1}{2}})$$

42. 원점 O 와 점 $A(10,0)$ 으로부터 직선$3x+4y+30=0$ 에 내린 수선을 각각 $\overline{OP}$, $\overline{AQ}$ 라 할 때, 사다리꼴 $OPQA$ 의 넓이는?

① 64　　② 72　　③ 80　　④ 81　　⑤ 90

해설

$\overline{OP} = \dfrac{|\,30\,|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 6$

$\overline{AQ} = \dfrac{|\,30+30\,|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 12$

$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{A}H^2} = \sqrt{10^2-6^2} = 8$

따라서 사다리꼴 $OPQA$ 의 넓이를 S 라 하면,

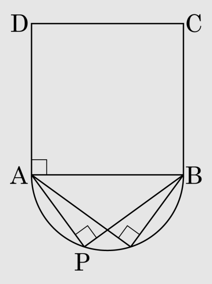
$S = \dfrac{1}{2}\cdot(\overline{OP}+\overline{AQ})\cdot\overline{PQ} = \dfrac{1}{2}\cdot(6+12)\cdot 8 = 72$

43. 한 변의 길이가 a 인 정사각형 ABCD 의 외부에 있는 점으로서 두 꼭짓점을 바라보는 각이 $90°$ 를 이루는 점의 자취의 길이는? (단, 변을 통과하여 바라볼 수는 없다.)

① πa ② $\sqrt{2}\pi a$ ③ $2\pi a$
④ $2\sqrt{2}\pi a$ ⑤ $4\pi a$

해설

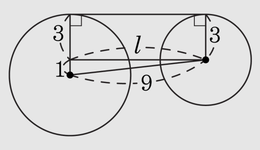
두 점 A, B 를 바라보는 각이 $90°$ 되는점 점 P 의 자취는 AB 를 지름으로 하는 (바깥쪽의) 반원이다.
4개의 반원의 길이의 합이므로
$2 \times \left(2\pi \frac{a}{2}\right) = 4\pi \left(\frac{a}{2}\right) = 2\pi a$



44. 두 원 $x^2+y^2=16, (x-9)^2+y^2=9$ 의 공통외접선의 길이를 l 이라 하고 공통내접선의 길이를 m 이라 할 때, l^2-m^2 의 값은?

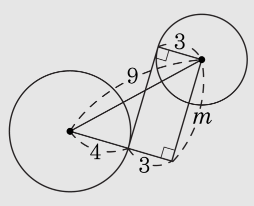
① 48　② -48　③ 32　④ -32　⑤ 30

해설



중심이 (0, 0) (9, 0) 이므로
중심간의 거리는 9이다.

$\therefore\ l^2 = 9^2 - 1^2$



$\therefore\ m^2 = 9^2 - 7^2$

$\therefore\ l^2 - m^2 = (9^2 - 1^2) - (9^2 - 7^2)$
$= -1^2 + 7^2 = 48$

45. 직선 $y = kx+1$ 을 x 축에 대하여 대칭이동하면 원 $x^2+y^2+6x-4y+9=0$ 의 넓이를 이등분한다고 할 때 k 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

먼저 $y = kx + 1$ 를 x 축 대칭시킨 직선은
$y = -kx - 1 \cdots$ ㉠
이제 원의 방정식을 정리하면,
$(x+3) + (y-2)^2 = 4$
직선이 원의 넓이를
이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.
중심이 $(-3, 2)$ 이므로 ㉠ 에 대입하면,
$2 = 3k - 1 \Rightarrow \quad k = 1$

46. 네 점 $O(0,\ 0)$, $A(4,\ 0)$, $B(4,\ 3)$, $C(0,\ 3)$과 임의의 점 P에 대하여 $\overline{PO}+\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$의 최솟값은?

① 5　② $5\sqrt{2}$　③ 10　④ $5\sqrt{5}$　⑤ $10\sqrt{2}$

해설

□OABC를 그려보면 직사각형이 된다.
이 때, $\overline{PO}+\overline{PB}$의 값은 점 P가 $\overline{OB}$ 위에 있을 때 최소이므로
$\overline{PO}+\overline{PB} \ \geq \ \overline{OB}$ $\cdots\cdots$ ㉠
또, $\overline{PA}+\overline{PC}$의 값은 점 P가 $\overline{AC}$ 위에 있을 때 최소이므로
$\overline{PA}+\overline{PC} \ \geq \ \overline{AC}$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에의해 $\overline{PO}+\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$의 값은 점 P가 $\overline{OB}$와 $\overline{AC}$의 교점일 때 최소이므로
$\overline{PO}+\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC} \ \geq \ \overline{OB}+\overline{AC}$
이 때, □OABC의 대각선 OB, AC의 길이는 $\overline{OB} = \overline{AC} = \sqrt{4^2+3^2}=5$
따라서 $\overline{PO}+\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ 의 최솟값은 10이다.

해설

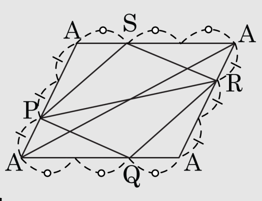
네 점으로부터의 거리의 합이 최소값은 네 점으로 이루어진 사각형의 두 대각선의 길이의 합과 같다

47. 평행사변형 ABCD에 대하여 네 변 AB, BC, CD, DA를 2 : 1로 내분하는 점을 각각 P, Q, R, S라고 하자. A$(-1, 5)$, B$(-4, -1)$이고 R$(7, 6)$일 때, 점 S의 좌표는?

① $(1, 6)$ ② $(1, 7)$ ③ $(2, 6)$ ④ $(2, 7)$ ⑤ $(3, 6)$

해설

다음 그림에서 사각형 P, Q, R, S는 평행사변형이고



대각선 PR의 중점은 평행사변형 ABCD의 대각선 BD의 중점과 일치한다.

A$(-1, 5)$, B$(-4, -1)$이므로 점 P의 좌표는

P$\left(\frac{-8-1}{2+1}, \frac{-2+5}{2+1}\right)$

$\therefore$ P$(-3, 1)$

R$(7, 6)$이므로 대각선 PR의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-3+7}{2}, \frac{1+6}{2}\right)$

즉 $\left(2, \frac{7}{2}\right) \cdots$ ㉠

이 때, 점 D(a, b)로 놓으면

대각선 BD의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-4+a}{2}, \frac{-1+b}{2}\right) \cdots$ ㉡

㉠과 ㉡이 일치하므로 $\frac{-4+a}{2} = 2$에서 $a = 8$

$\frac{-1+b}{2} = \frac{7}{2}$에서 $b = 8$

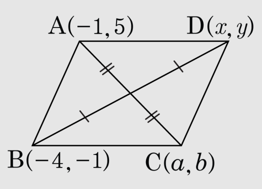
따라서 점 D$(8, 8)$이므로

변 DA를 2 : 1로 내분하는 점 S의 좌표는

S$\left(\frac{-2+8}{2+1}, \frac{10+8}{2+1}\right)$

즉 S$(2, 6)$

[별해] 다음과 같이 두 꼭짓점 C, D를 C(a, b), D(x, y)로 놓으면



$\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 중점이 일치하므로

$\frac{-1+a}{2} = \frac{-4+x}{2}$, $\frac{5+b}{2} = \frac{-1+y}{2}$에서

$x - a = 3 \cdots$ ㉠

$y - b = 6 \cdots$ ㉡

R$(7,\ 6)$이므로 $\frac{2x+a}{3} = 7$에서 $a + 2x = 21 \cdots$ ㉢

$\frac{2y+b}{3} = 6$에서 $b + 2y = 18 \cdots$ ㉣

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a = 5, x = 8$

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $b = 2, y = 8$

$\therefore$ D$(8, 8)$

그러므로 변 DA를 2 : 1로 내분하는 점 S의 좌표는

S$\left(\frac{-2+8}{2+1}, \frac{10+8}{2+1}\right)$

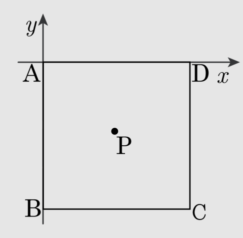
즉 S$(2, 6)$

48. 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD의 내부에 한 점 P가 $2\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PD}}^2$을 만족시킬 때, 점 P의 자취의 길이는?

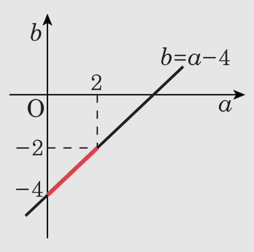
① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

A$(0,\ 0)$, B$(0,\ -2)$,
D$(2,\ 0)$, P$(a,\ b)$ 라고하면 $2 \cdot \overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PD}}^2$ 이므로



$2 \cdot (a^2 + b^2)$
$= a^2 + (b+2)^2 + (a-2)^2 + b^2$
$0 = b - a + 4$
$\therefore$ P$(a,\ b) = (a,\ a-4)$
점 P의 자취는 $b = a - 4$ $(0 < a < 2)$ 와 같으므로
구하는 길이는 두 점 $(0,\ -4)$아 $(2,\ -2)$ 사이의 거리와 같다.
$\therefore \sqrt{(2-0)^2 + (-2+4)^2} = 2\sqrt{2}$



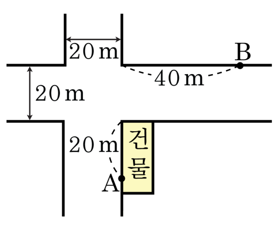
49. 세 점 $\mathrm{A}(-4,0)$, $\mathrm{B}(4,0)$, $\mathrm{C}(0,3)$과 점 $\mathrm{P}(x,y)$가 있다. $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$의 최솟값과 그 때의 점 P의 좌표는?

① 30, $\mathrm{P}(0,1)$ ② 30, $\mathrm{P}(0,2)$ ③ 38, $\mathrm{P}(0,1)$
④ 34, $\mathrm{P}(0,2)$ ⑤ 38, $\mathrm{P}(0,2)$

해설

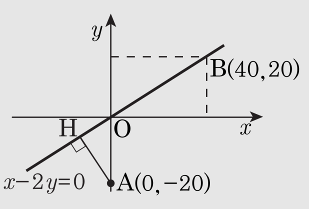
$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$
$=(x+4)^2+y^2+(x-4)^2+y^2+x^2+(y-3)^2$
$=3x^2+3y^2-6y+41$
$=3x^2+3(y-1)^2+38$
따라서 최솟값 38, $\mathrm{P}(0,1)$

50. 다음 그림과 같이 폭이 20 m 인 인도가 수직으로 만나고 있다. A 지점에 서 있는 사람이 B 지점에 있는 가로등을 보기 위하여 움직여야 할 최소 거리는?(단위는 m)



① $2\sqrt{10}$ ② $4\sqrt{10}$ ③ $6\sqrt{5}$
④ $8\sqrt{5}$ ⑤ $10\sqrt{3}$

해설



그림과 같이 건물의 모서리를 원점으로 하는
좌표축을 생각하면 A, B 지점의 좌표는
각각$(0, -20)$, $(40,\ 20)$ 이다. 이때, 원점과
점 B 를 지나는 직선의 방정식이 $x-2y=0$
이므로 가로등을 보기 위하여 움직여야 할
최소거리는 점 A 와 직선 $x-2y=0$
사이의 거리이다. $\therefore\ \overline{AH}=\dfrac{|1\cdot 0-2\cdot(-20)|}{\sqrt{1^2+2^2}}=8\sqrt{5}$