1. 다음 두 점 사이의 거리를 구하여라.

$A(-3, 5),\ B(6, -13)$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $9\sqrt{5}$

해설

$$\overline{AB} = \sqrt{(6+3)^2 + (-13-5)^2} = \sqrt{405} = 9\sqrt{5}$$

2. $\overline{AB} = 7,\ \overline{BC} = 8,\ \overline{AC} = 5$ 인 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{BC}$ 의 중점을 M 이라 할 때, $\overline{AM}$ 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

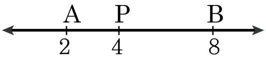
▷ 정답 : $\sqrt{21}$

해설

$\overline{BM} = 4,\ \overline{AM} = x$이므로 중선정리에 의해

$7^2 + 5^2 = 2(x^2 + 4^2)$ $\therefore\ x = \sqrt{21}$

3. 다음 수직선 위의 세 점 A, B, P 에 대하여 선분 AP 와 선분 PB의 길이의 비는?



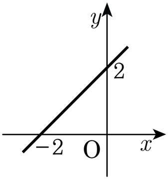
① 1 : 2　② 2 : 3　③ 1 : 3　④ 2 : 5　⑤ 1 : 4

해설

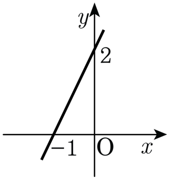
선분 AP의 길이는 $4-2=2$,
선분 PB 의 길이는 $8-4=4$ 이다.
따라서 선분 AP와 선분 PB 의 길이의 비는
$2:4=1:2$ 이다.

4. 다음 중 직선 $y=2(x+1)$ 을 나타내는 그래프는?

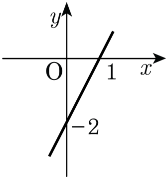
①



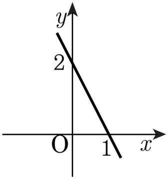
②



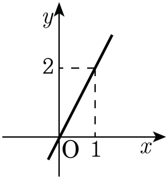
③



④



⑤



해설

$y=2(x+1)=2x+2$ 이므로, 기울기가 2 이고,
y 절편이 2 인 그래프는 ②번이다.

5. 두 점 $(a,\ 1)$, $(3,\ b)$ 가 x 절편이 4 이고, y 절편이 -2 인 직선 위에 있을 때, ab 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

x 절편이 4 이고,
y 절편이 -2 인 직선의 방정식은
$\frac{x}{4}+\frac{y}{-2}=1\ \cdots$ ㉠
점 $(a,\ 1)$ 이 ㉠ 위에 있으므로 $\frac{a}{4}-\frac{1}{2}=1$ 에서
$a=6$
점 $(3,\ b)$ 가 ㉠ 위에 있으므로
$\frac{3}{4}-\frac{b}{2}=1$ 에서 $b=-\frac{1}{2}$
$\therefore ab=-3$

6. 두 점 A$(1,\ -4)$, B$(3,\ 2)$를 지나는 직선과 수직인 직선의 기울기는?

① -3　② $-\frac{1}{3}$　③ -1　④ $\frac{1}{3}$　⑤ 3

해설

직선 AB의 기울기는 $\frac{2-(-4)}{3-1}=3$이므로

수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다.

7. 점$(1,\ 2)$에서 직선 $x+y+1=0$까지의 거리는?

① $4\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{2}$

④ $-\sqrt{2}$ ⑤ $-2\sqrt{2}$

해설

$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리

$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 이므로,

$\therefore\ \dfrac{|1+2+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

8. 중심이 $(2, -1)$ 이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 원의 방정식은?

① $(x+2)^2+(y-1)^2=5$

② $(x+2)^2+(y-1)^2=\sqrt{5}$

③ $(x-2)^2+(y+1)^2=5$

④ $(x-2)^2+(y+1)^2=\sqrt{5}$

⑤ $(x-2)^2+(y+1)^2=5^2$

해설

중심이 $(2, -1)$, $r : \sqrt{5}$ 인 원

$\Rightarrow \quad (x-2)^2+(y+1)^2=5$

9. 원 $x^2+y^2-2kx-4=0$ (k 는 임의의 실수)에 대하여 다음 중 반드시 옳은 것은?

① 반지름의 길이가 2 인 원이다.

② 원의 중심은 y 축 위에 있다.

③ 원은 두 점 $(0,\ -2)$, $(0,\ 2)$를 지난다.

④ 원의 중심은 직선 $y=x$ 위에 존재한다.

⑤ 원은 점 $(1,\ 0)$ 을 지난다.

해설

$x^2+y^2-2kx-4=0$ 을 변형하면
$(x-k)^2+y^2=4+k^2$ 이므로
$x=0$ 일 때, k 에 관계없이 $y^2=4$
$\therefore y=\pm 2$
따라서 주어진 원은
$(0,\ -2)$, $(0,\ 2)$의 두 점을 지난다.
또한, 원의 중심은 x 축 위에 있다

10. 점 (x, y) 를 $(x-1, y+2)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 점 $(b+2, a-1)$ 가 옮겨지는 점의 좌표를 구하면?

① $(a+3, b-3)$ ② $(a+2, b-1)$ ③ $(b+1, a-3)$

④ $(b-2, a+1)$ ⑤ $(b+1, a+1)$

해설

$f(x : y) \rightarrow (x-1,\ y+2)$

$\therefore\ (b+2,\ a-1) \quad \rightarrow \quad (b+1,\ a+1)$

11. 일차함수 $y=(a-2)x+b+2$ 의 그래프가 x 축의 양의 방향과 45^o 의 각을 이루고, y 절편이 5 일 때, $a+b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 상수)

① 0 ② 3 ③ 6 ④ −6 ⑤ −3

해설

$y=(a-2)x+b+2$ 의 그래프가
x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가
$45°$ 이므로
$a-2=\tan 45°=1$ 에서 $a=3$
또, y 절편이 5 이므로
$b+2=5$ 에서 $b=3$
$\therefore\ a+b=6$

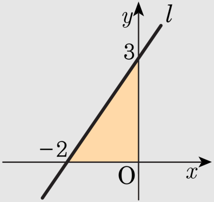
12. 직선 $3x-2y+6=0$이 x 축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$3x-2y+6=0$을 그래프에 도시해보면,



$\therefore$ 빗금 친 부분의 넓이 : $\frac{1}{2}\times 2\times 3=3$

13. $ac < 0$, $bc > 0$ 일 때, 일차함수 $ax + by + c = 0$ 이 나타내는 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

▶ **답:** 사분면

▷ **정답:** 제 2사분면

해설

$b \neq 0$ 이므로,

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots$ ㉠

$ac < 0$, $bc > 0$ 에서 $ac \cdot bc < 0$

$\therefore$ $abc^2 < 0$ 즉, $ab < 0$

$ab < 0$ 에서 기울기 $-\frac{a}{b} > 0$

$bc > 0$ 에서 y 절편 $-\frac{c}{b} < 0$

따라서 ㉠은 제 2 사분면을 지나지 않는다.

14. 두 직선 $2x+y-7=0$, $3x+2y-12=0$ 의 교점을 지나고 직선 $8x+5y=0$ 에 평행한 직선의 방정식은?

① $y=-\frac{5}{8}x+\frac{5}{31}$ ② $y=-\frac{8}{5}x+\frac{31}{5}$ ③ $y=-\frac{2}{3}x+\frac{11}{5}$
④ $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{11}$ ⑤ $y=-\frac{5}{3}x+\frac{11}{31}$

해설

$2x+y-7=0 \cdots\cdots$ ㉠

$3x+2y-12=0 \cdots\cdots$ ㉡

㉠ $\times 2-$ ㉡ : $x=2$, $y=3$

$\therefore$ ㉠, ㉡의 교점 : $(2,\ 3)$

구하는 직선의 기울기는 $-\frac{8}{5}$

$\left(\because\ y=-\frac{8}{5}x\right.$ 와 평행하다.$\left.\right)$

$\therefore$ 구하는 직선은 기울기 $-\frac{8}{5}$ 이고

$(2,\ 3)$ 을 지나므로

$y-3=-\frac{8}{5}(x-2)$

$\therefore y=-\frac{8}{5}x+\frac{31}{5}$

15. 두 직선 $x+y=1$, $ax+2y+a+2=0$ 이 제 1사분면에서 만나도록 하는 정수 a 값의 개수를 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$x+y=1 \cdots ㉠$

$ax+2y+a+2=0 \cdots ㉡$

㉡ − ㉠ × 2 : $(a-2)x+a+4=0$

$\Rightarrow \quad x=\dfrac{a+4}{2-a}$

$\Rightarrow y=1-x=\dfrac{2a+2}{a-2}$

$\therefore$ 교점 : $\left(\dfrac{a+4}{2-a}, \dfrac{2a+2}{a-2}\right)$

교점이 제 1 사분면에 있으므로

$\dfrac{a+4}{2-a}>0, \ \dfrac{2a+2}{a-2}>0$

두 식의 양변에$(a-2)^2$ 을 곱하면

$(a-2)(a+4)<0, \ 2(a+1)(a-2)>0$

$\Rightarrow -4<a<2, \ a<-1 \ or \ a>2$

$\therefore \quad -4<a<-1$

$\therefore$ 정수인 a 의 개수는 $-3, -2$ 즉 2개

16. 함수 $f(x)=ax+1$ 이 a 의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구하면?

① $(1,0)$ ② $(1,1)$ ③ $(0,1)$

④ $(-1,0)$ ⑤ $(0,-1)$

해설

함수 $f(x)=ax+1$ 의 그래프는
a 의 값에 관계없이 점$(0,\ 1)$ 을 지나는 직선이다.

17. 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하여라.

$(0,0),\ (2,6),\ (6,3)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$$\frac{1}{2}|2\cdot 3-6\cdot 6|=15$$

18. 이차방정식 $x^2 - ay^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$a = (\qquad\qquad), k < (\qquad\qquad)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a = -1$

또한, 준식을 표준형으로 나타내면,

$x^2 - 4x + y^2 + 2y + k = 0$ 에서

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5 - k$

여기서, $5 - k > 0$ 이어야 하므로 $k < 5$

19. 중심이 직선 $y = x + 2$ 위에 있고, 점 $(4,\ 4)$ 를 지나며, y축에 접하는 원 중 반지름의 크기가 작은 원의 방정식을 구하면?

① $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 4$

② $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$

③ $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 4$

④ $(x-10)^2 + (y-12)^2 = 100$

⑤ $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 100$

해설

원의 방정식을 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2$ 으로 놓으면
중심 (a, b) 가 $y = x + 2$
위에 있으므로
$b = a + 2$ ·············㉠
점 $(4, 4)$ 를 지나므로
$(4-a)^2 + (4-b)^2 = a^2$ ·············㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $(4-a)^2 + (4-a-2)^2 = a^2$
$a^2 - 12a + 20 = 0 \quad \therefore\ a = 2, 10$
$\therefore\ a = 2$ 일 때 $b = 4$, $a = 10$ 일 때 $b = 12$
따라서 구하는 방정식은
$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 4$,
$(x-10)^2 + (y-12)^2 = 100$

20. 점 (2, 1) 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

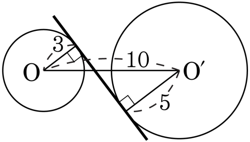
▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 (2, 1) 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 $(r,\ r)$ 이다.
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ 이고
또한 (2, 1) 을 지나므로
$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$,
$(r-1)(r-5)=0$
$\therefore\ r=1$ 또는 5
$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$
$\therefore 1+5=6$

21. 다음 그림의 두 원 O와 O′ 에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2 - (3+5)^2} = 6$

22. 다음 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $y=x+5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}>3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

23. 점 A(−2, 3) 에서 원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 5

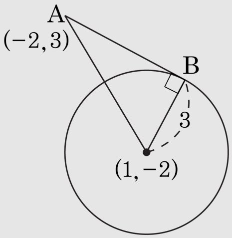
해설

$x^2+y^2-2x+4y-4=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$

원의 중심은 (1, −2), 반지름은 3이므로

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(3^2+(-5)^2)-3^2} = 5$



24. 직선 $y = 2x - 3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동 하였더니 다시 $y = 2x - 3$ 의 그래프가 되었다. 이때, $\frac{b}{a}$ 의 값은? (단, $a \neq 0$)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

직선 $y = 2x - 3$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한
직선의 방정식은
$y - b = 2(x - a) - 3$
직선의 방정식을 정리하면
$y = 2x - 2a - 3 + b$
원래 직선과 같아졌으므로
$-2a + b - 3 = -3,\ 2a = b,$
$\therefore\ \frac{b}{a} = 2$

25. 좌표평면 위의 점 $(-1,\ 3)$ 을 점 $(a,\ b)$ 에 대하여 대칭이동 시킨 점이 $(3,\ 5)$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$(-1,3),(3,5)$ 의 중점이 (a,b) 이다.

$$\Rightarrow \left(\frac{-1+3}{2},\frac{3+5}{2}\right)=(a,b)$$

$$\Rightarrow a+b=5$$

26. 원 $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=1$

② $(x-2)^2+(y+1)^2=1$

③ $(x+2)^2+(y-1)^2=1$

④ $x^2+(y+2)^2=1$

⑤ $(x-2)^2+y^2=1$

해설

$x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 에서

$(x-2)^2+(y-1)^2=1 \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 y 축에 대하여 대칭이동하면

$(x+2)^2+(y-1)^2=1 \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면

$x^2+(y-1)^2=1 \cdots\cdots$ ㉢

㉢을 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동하면

$x^2+(y+2)^2=1$

27. 직선 $2x-3y+6=0$ 을 점 $(4,-3)$ 에 대하여 대칭이동한 다음, 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하면?

① $x-y-5=0$ ② $2x-4y-9=0$

③ $3x-2y-40=0$ ④ $2x-y-21=0$

⑤ $6x-3y-29=0$

해설

직선 $2x-3y+6=0$ 을 점 $(4,-3)$ 에 대하여
대칭이동한 도형의 방정식은
$2(8-x)-3(-6-y)+6=0$
즉, $2x-3y-40=0$
이것을 다시 직선 $y=-x$ 에 대하여
대칭이동한 도형의 방정식은
$2(-y)-3(-x)-40=0$
$\therefore 3x-2y-40=0$

28. 삼각형 ABC의 두 꼭짓점의 좌표가 $\mathrm{A}(-1, 4)$, $\mathrm{B}(0, 3)$이고, 무게중심의 좌표가 $\mathrm{G}(2, 1)$일 때, 꼭짓점 C의 좌표를 구하면?

① $(7, -4)$　② $(3, -6)$　③ $(5, -5)$
④ $(-1, 8)$　⑤ $(1, 1)$

해설

무게중심 구하는 공식을 이용한다.

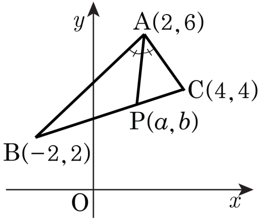
$\mathrm{C} = (x, y)$라 하면

$$\left(\frac{-1+0+x}{3}, \frac{4+3+y}{3}\right) = (2, 1)$$

$\therefore\ x = 7\ \ y = -4$

$\therefore\ \mathrm{C} = (7, -4)$

29. 다음 그림과 같이 세 점 $A(2,\ 6)$, $B(-2,\ 2)$, $C(4,\ 4)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 $P(a,\ b)$ 라 할 때, $3ab$ 의 값은?



① 10　　② 15　　③ 20

④ 25　　⑤ 30

해설

$\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 의 이등분선이
변 BC 와 만나는 점을 $P(a,\ b)$ 라 하면
$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BP} : \overline{CP}$ 가 성립한다.
이때, $\overline{AB} = \sqrt{(-2-2)^2+(2-6)^2} = 4\sqrt{2}$,
$\overline{AC} = \sqrt{(4-2)^2+(4-6)^2} = 2\sqrt{2}$ 이므로
$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BP} : \overline{CP} = 2 : 1$
따라서 점 $P(a,\ b)$ 는 변 BC 를 $2:1$ 로 내분하는 점이다.

$$\therefore a = \frac{2\cdot 4 + 1\cdot(-2)}{2+1} = 2\ ,$$

$$b = \frac{2\cdot 4 + 1\cdot 2}{2+1} = \frac{10}{3}$$

$$\therefore\ 3ab = 3\cdot 2\cdot \frac{10}{3} = 20$$

30. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 5)$, $\mathrm{B}(5,\ 3)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값이 최소가 되는 점 P의 좌표는?

① $(4,\ 5)$　② $(3,\ 4)$　③ $(2,\ 3)$

④ $(1,\ 2)$　⑤ $(0,\ 1)$

해설

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값이 최소가 되기 위한
점 P는 점 A와 점 B의 중점이어야 한다.
따라서 $\mathrm{P}(3, 4)$

해설

$\mathrm{P}(x,\ y)$로 놓으면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2 &= \{(x-1)^2+(y-5)^2\} \\ &\quad+\{(x-5)^2+(y-3)^2\} \\ &= 2x^2-12x+2y^2-16y+60 \\ &= 2(x^2-6x+9)+2(y^2-8y+16)+10 \\ &= 2(x-3)^2+2(y-4)^2+10\end{aligned}$$

따라서 $x=3,\ y=4$일 때 최솟값을 갖는다.

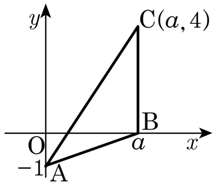
31. 세 점 A $(2,\ 3)$, $\mathrm{B}(-1,\ 5)$, $\mathrm{C}(4,\ a)$이 일직선 위에 있을 때, a의 값은?

① -1 ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{2}{5}$ ④ $-\dfrac{3}{4}$ ⑤ $\dfrac{5}{3}$

해설

세 점이 일직선 위에 있기 위해서는
직선 AB의 기울기와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로
$\dfrac{3-5}{2+1}=\dfrac{a-5}{4+1}$에서
$\therefore a=\dfrac{5}{3}$

32. 다음 그림과 같이 점 A$(0,\ -1)$, B$(a,\ 0)$, C$(a,\ 4)$를 꼭지점으로 하는 ABC가 있다. 점 B를 지나면서 $\triangle$ABC의 넓이를 이등분하는 직선이 존재할 때, 직선의 방정식은?



① $y=-\dfrac{4}{a}x+4$　② $y=-\dfrac{3}{a}x+3$　③ $y=-\dfrac{2}{a}x+2$

④ $y=-\dfrac{2}{a}x+1$　⑤ $y=-\dfrac{1}{a}x+4$

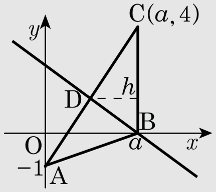
해설

$\triangle$ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{OB}=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot a=2a$

점 B를 지나면서 $\triangle$ABC의 넓이를 이등분하는 직선과 $\overline{AC}$와의 교점을 D,

$\triangle$BCD에서 $\overline{BC}$를 밑변으로 보았을 때 높이를 h라 하면



($\triangle$BCD의 넓이) $=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot h=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot h=2h$

이 넓이는 $\triangle$ABC의 넓이의 $\dfrac{1}{2}$이므로

$2h=a \qquad \therefore h=\dfrac{a}{2}$

따라서 점 D의 x좌표는 $a-\dfrac{a}{2}=\dfrac{1}{2}a$

$\therefore$ D의 좌표는 $\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$

두 점 B$(a, 0)$, D$\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$를 지나는

직선의 방정식은 $y-0=\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{a}{2}-a}(x-a)$

$\therefore y=-\dfrac{3}{a}x+3$

33. $ax-6y-2=0$, $2x-(2a-5)y-1=0$일 때,
두 식을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$가 하나도 없도록 하는 a의 값은?(단, $a>0$)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

두 식을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$가 하나도 없도록 하기 위해서는 두 직선이 서로 평행해야한다.

직선 $ax-6y-2=0$는

$y=\frac{a}{6}x-\frac{1}{3}$이므로 기울기가 $\frac{a}{6}$이다.

$2x-(2a-5)y-1=0$는

$y=\frac{2}{2a-5}x-\frac{1}{2a-5}$이므로

기울기가 $\frac{2}{2a-5}$이다.

$\frac{a}{6}=\frac{2}{2a-5}$이므로

$2a^2-5a-12=0(2a+3)(a-4)=0$

$a=-\frac{3}{2}$ 또는 $a=4$

$\therefore a=4$

34. 두 점 A(−3, 4), B(1, 2) 를 잇는 선분 AB 의 수직 이등분선의 방정식은?

① $2x-y+5=0$ ② $2x+y-2=0$ ③ $2x+y-1=0$

④ $x-2y+3=0$ ⑤ $x-2y+7=0$

해설

선분 $\overline{AB}$ 의 기울기 $=\dfrac{4-2}{-3-1}=-\dfrac{1}{2}$

선분 $\overline{AB}$ 의 중점 : $\left(\dfrac{-3+1}{2},\ \dfrac{4+2}{2}\right)=(-1,\ 3)$

선분 $\overline{AB}$ 에 수직인 기울기 m 은

$m\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1 \quad \therefore\ m=2$

$\therefore\ y=2\cdot(x+1)+3 \ \rightarrow\ 2x-y+5=0$

35. 두 직선 $3x+4y=12$, $3x+4y=7$사이의 거리를 구하면?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$3x+4y=12$ 위의 임의의 한 점을 잡는다.

$(4,\ 0)$과 $3x+4y=7$사이의 거리를 구한다.

$$\therefore \frac{|3\cdot 4+4\cdot 0-7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$$

36. 점 $(a, 2)$ 에서 직선 $12x-5y-4=0$ 에 이르는 거리가 2 가 되도록 하는 실수 a 의 값들의 합은?

① $-\frac{1}{3}$ ② 0 ③ 1 ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{7}{3}$

해설

점 $(a, 2)$ 에서 직선 $12x-5y-4=0$ 에
이르는 거리가 2 이므로

$$2=\frac{|12a-5\times 2-4|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=\frac{|12a-14|}{13}$$

$\therefore |12a-14|=26$ 즉, $12a-14=26$

또는 $12a-14=-26$. $\therefore a=\frac{10}{3}$

또는$a=-1$ 따라서 실수 a 의 값의 합은

$$\frac{10}{3}+(-1)=\frac{7}{3}$$

37. 정점 $A(1,\ 2)$와 직선 $3x-4y-5=0$ 위의 점을 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $3x+4y=0$ ② $x-2y+5=0$ ③ $3x-4y=0$

④ $x+2y+5=0$ ⑤ $x-2y-5=0$

해설

$3x-4y-5=0$ 위의 임의의 점을 $P(a,\ b)$라 하면

$3a-4b-5=0 \cdots$ ㉠

$\overline{AP}$의 중점을 $(X,\ Y)$라 하면

$$X=\frac{1+a}{2},\ Y=\frac{2+b}{2}$$

$\therefore a=2X-1,\ b=2Y-2$

이것을 ㉠에 대입하면

$3(2X-1)-4(2Y-2)-5=0$

$\therefore 6X-8Y=0$

$\therefore 3x-4y=0$

38. 두 원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$, $(x+3)^2+(y-4)^2=4$가 외접할 때, r의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$, $(x+3)^2+(y-4)^2=4$의 중심 사이의 거리 $d=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

두 원이 외접하면 $r+2=5$이므로 $r=3$

39. 두 원 $x^2+y^2-5=0$, $x^2+y^2-3x-y-4=0$ 의 교점과 점$(1,1)$을 지나는 원의 방정식이 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 일 때, $A+B-C$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2+y^2-5=0$, $x^2+y^2-3x-y-4=0$
교점을 지나는 원의 방정식은
$(x^2+y^2-5)m+x^2+y^2-3x-y-4=0$
의 꼴이고, 이 원이 점 $(1,1)$을지나므로
$(1+1-5)m+1+1-3-1-4=0$
$\therefore m=-2$
이 값을 대입하고 정리하면
$x^2+y^2+3x+y-6=0$ 이다.
$\therefore A=3,\ B=1,\ C=-6$
그러므로 $A+B-C=10$

40. 중심이 $C(1,\ 2)$이고, 직선 $L\ :\ x+2y=0$에 접하는 원의 반지름을 r이라 할 때 r^2은 얼마인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

중심에서 접선까지의 거리가 원의 반지름과 같으므로

반지름은 $\dfrac{|1+4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

$\therefore$ 구하는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-2)^2=5$ 이므로

$\therefore\ r^2=5$

41. $\triangle$ABC의 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB}=8$, $\overline{AC}=6$, $\overline{BC}=10$ 이면 $\overline{AM}$ 의 길이는?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$ 이므로
$\triangle$ABC 는 직각삼각형이다.
그리고 빗변인 $\overline{BC}$ 의 중점인 M은 직각삼각형의 외심이다.
$\therefore\ \overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}=5$

42. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(7,4)$, $\mathrm{B}(8,6)$과 직선 $y=x$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 값을 최소가 되게 하는 점 P의 x좌표를 a라 할 때, $5a$의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

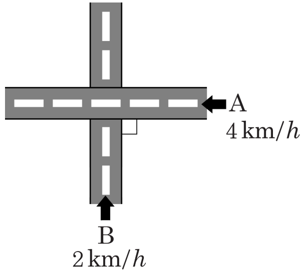
$\mathrm{A}(7,\ 4)$를 $y=x$에 대칭이동한 점 $\mathrm{C}(4,\ 7)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$가 최소인 점 P는

선분 BC와 직선 $y=x$의 교점이다.

$y=-\frac{1}{4}x+8$와 $y=x$의 교점은 $\left(\frac{32}{5},\ \frac{32}{5}\right)$

$\therefore\ 5a=32$

43. 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 6 km, B는 남쪽으로 4 km지점에 있다. 지금 A는 시속 4 km의 속도로 서쪽으로, B는 시속 2 km의 속도로 북쪽을 향하여 동시에 출발했을 때 A, B 사이의 거리가 가장 짧을 때는 출발 후 몇 시간 후인가?



① 1 시간 후 ② 1.2 시간 후 ③ 1.4 시간 후
④ 1.6 시간 후 ⑤ 2 시간 후

해설

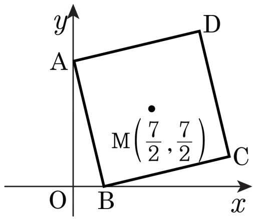
동서를 x 축, 남북을 y 축으로 잡으면
최초의 A, B 의 위치는 A$(6,\ 0)$, B$(0, -4)$ 이고
t 시간 후의 A, B 의 좌표는
A$(6-4t,\ 0)$, B$(0, -4+2t)$ 이다.
따라서 t 시간 후의 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 거리는 s 는

$$s = \sqrt{(6-4t)^2 + (-4+2t)^2}$$
$$= \sqrt{20t^2 - 64t + 52}$$
$$= \sqrt{20\left(t^2 - \frac{64}{20}t\right) + 52}$$
$$= \sqrt{20\left(t - \frac{8}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}}$$ 이므로

$t = \dfrac{8}{5}$ 일 때 최소가 된다.

$\therefore$ 출발 후 1.6 시간 후이다.

44. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD가 있다. 정사각형 ABCD의 중심 M의 좌표가 $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$일 때, $\triangle$OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.)



① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

다음 그림과 같이 두 점 A, B의 좌표를 A$(0, a)$, B$(b, 0)$이라 하고 점 D를 지나면서

x축에 평행한 직선이 y축과 만나는 점을 E라 하면 $\triangle OAB \equiv \triangle EDA$

따라서 $\overline{AE} = \overline{BO} = b, \overline{DE} = \overline{AO} = a$

이므로 D$(a, a+b)$

이 때, 점 M은 선분 BD의 중점이므로

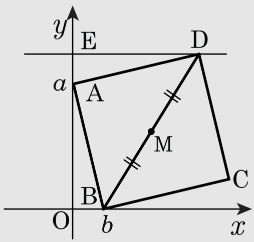
$$M\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$$

즉, $\frac{a+b}{2} = \frac{7}{2}$에서 $a+b=7$

또, 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 5이므로 $\triangle$OAB에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\sqrt{a^2+b^2} = 5, a^2+b^2 = 25$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{4}\left\{(a+b)^2 - \left(a^2+b^2\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\left(7^2 - 25\right) = 6$$



45. $\triangle$ABC 의 무게중심이 G(1, 4) 이고, 세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점이 각각 $(-1\ ,6\ )$, $(a\ ,b\ )$,$(3\ ,4\ )$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\triangle$ABC 의 무게중심 G 는
세변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 무게중심과 일치한다.

따라서 $\dfrac{-1+a+3}{3}=1$, $\dfrac{6+b+4}{3}=4$ 이므로

$a=1$, $b=2$ 이고, $\therefore\ a+b=3$

46. 두 점 $A(-2,\ 1)$, $B(4,\ -3)$에서 같은 거리에 있고 직선 $y=2x-1$ 위에 있는 점 의 좌표는?

① $(-3,\ -7)$ ② $(-2,\ -5)$ ③ $(3,\ 5)$
④ $(2,\ 3)$ ⑤ $(3,\ 2)$

해설

직선 $y=2x-1$ 위에 있는 점을 $P(a,\ b)$라 하면 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$에서
$(a+2)^2+(b-1)^2=(a-4)^2+(b+3)^2$
$12a-8b=20$
$\therefore\ 3a-2b=5 \cdots\cdots$ ①
또, 점 P는 $y=2x-1$ 위에 있으므로
$b=2a-1 \cdots\cdots$ ②
①, ②를 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-7$

해설

두 점으로부터 같은 거리에 있으므로 구하는 점은
$A(-2,1), B(4,-3)$의 수직이등분선 위에 있다.
$\overline{AB}$의 기울기는 $\dfrac{1+3}{-2-4}=-\dfrac{2}{3}$이므로
수직이등분선의 기울기는 $\dfrac{3}{2}$, $A(-2,1), B(4,-3)$ 의 중점 $(1,-1)$를 지나므로
$\therefore\ y+1=\dfrac{3}{2}(x-1)\ \cdots$ ①
구하는 점 P는 $y=2x-1$과 ①의 교점이다.
연립하여 풀면 $x=-3, y=-7$
$\therefore\ P(-3,\ -7)$

47. 좌표평면에서 원점과 직선 $x+y-2+k(x-y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은? (단, k 는 실수)

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

준식을 변형하면 $(1+k)x+(1-k)y-2=0$ 이므로

$$f(k)=\frac{|-2|}{\sqrt{(1+k)^2+(1-k)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k^2+1}}$$

따라서, $k=0$ 일 때 $f(k)$ 의 최댓값은 $\sqrt{2}$

48. 두 정점 $A(-1,\ 0)$, $B(2,\ 0)$ 으로부터 거리의 비가 $1 : 2$ 인 점 P 에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

ㄱ $\triangle PAB$ 의 넓이의 최댓값은 3 이다.
ㄴ $\angle PBA$ 의 최대 크기는 $60°$ 이다.
ㄷ 점 P 의 자취의 길이는 4π 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

두 정점 $A(-1,\ 0)$, $B(2,\ 0)$ 으로부터 거리의
비가 $1 : 2$ 인 점 P 의 자취는
$(0,0)$ 과 $(-4,0)$ 을 지름의 양 끝으로 하는
원이다. 따라서 이 원은 $(x+2)^2+y^2=4$ 로
나타낼 수 있다.
삼각형 밑변의 길이가 정해져있으므로 높이가
최대일 때 삼각형의 넓이도 최대가 된다.
따라서 원의 반지름인 2 가 높이일 때의
넓이인 3 이 최댓값이다.
$\angle PBA$ 의 최대 크기는 점 P 가 원에 접할 때이므로 $\sin(\angle PBA)=$
$\frac{2}{2-(-2)}=\frac{1}{2}$ 에서
$\angle PBA = 30°$
점 P 의 자취의 방정식은 $(x+2)^2+y^2=4$ 이므로
둘레의 길이는 4π 이다

49. 원 $x^2+y^2=1$ 밖의 점 $\mathrm{P}(3,\ 4)$에서 이 원에 두 개의 접선을 그을 때 그 접점을 Q, R이라고 하자. 직선 QR의 방정식을 $ax+by=1$라 할 때 $a+b$를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

접점의 좌표를 $\mathrm{Q}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{R}(x_2,\ y_2)$라고 하면
Q, R에서의 접선의 방정식은 각각
$x_1x+y_1y=1$, $x_2x+y_2y=1$이고,
두 접선은 모두 점 $\mathrm{P}(3,\ 4)$를 지나므로
$3x_1+4y_1=1$, $3x_2+4y_2=1$
여기서 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$는
방정식 $3x+4y=1$의 근이며, 이 두 접점을
지나는 직선은 오직 하나뿐이므로
직선 QR의 방정식은 $3x+4y=1$이다.
$\therefore\ a=3,\ b=4 \quad \therefore\ a+b=7$

50. 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동시키는 것을 A, y축에 대하여 대칭 이동시키는 것을 B, 원점에 대하여 대칭 이동시키는 것을 C, 직선 $y=x$에 대하여 대칭 이동시키는 것을 D라 하자. 직선 $2x+y+1=0$ 을 $A \to B \to C \to D \to C \to B \to A$의 순서로 대칭 이동시킨 도형의 방정식은? (단, $A \to B$는 A에 의하여 대칭 이동시킨 후 다시 B에 의하여 대칭 이동시키는 것을 뜻한다.)

① $2x+y+1=0$ ② $2x+y-1=0$ ③ $x+2y-1=0$

④ $x+2y+1=0$ ⑤ $x-2y-1=0$

해설

$2x+y+1=0$을 A(x축 대칭)하면 $2x-y+1=0$

B(y축 대칭)하면 $-2x-y+1=0$

C(원점 대칭)하면 $2x+y+1=0$이므로

$A \to B \to C$, $C \to B \to A$에 의하여 도형은 자기 자신으로 옮겨진다.

$2x+y+1=0$을 D(직선 $y=x$ 대칭)하면 $2y+x+1=0$

$\therefore\ x+2y+1=0$