1. 두 개의 부등식 $x+2>3x-4$, $2x+1 \le 3x$를 동시에 만족하는 x의 값의 범위는?

① $1<x\le 3$ ② $x<1$ ③ $1\le x<3$
④ $x\le 3$ ⑤ $-1\le x<4$

해설
$x+2>3x-4 \Rightarrow x<3$
$2x+1\le 3x \Rightarrow x\ge 1$
따라서 두 부등식을 동시에 만족하는 x 의 값의 범위는 $1\le x<3$ 이다.

2. 다음 연립부등식을 풀면?

$$\begin{cases} 3(x-2) > 2x+5 \\ 3x-4 < 2x+9 \end{cases}$$

① $10 < x < 12$ ② $11 < x < 14$ ③ $11 < x < 13$
④ $10 < x < 13$ ⑤ $9 < x < 15$

해설

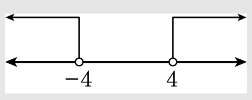
i) $3(x-2) > 2x+5$
$\Rightarrow\ 3x-6 > 2x+5$
$\Rightarrow\ x > 11$
ii) $3x-4 < 2x+9$
$\Rightarrow\ x < 13$
$\therefore\ 11 < x < 13$

3. 다음 연립부등식 중에서 해가 없는 것은?

① $\begin{cases} x > 1 \\ x \ge 4 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x \le -1 \\ x \ge -5 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x > 4 \\ x < -4 \end{cases}$

④ $\begin{cases} x < 5 \\ x \ge 3 \end{cases}$ ⑤ $\begin{cases} x \le 7 \\ x \ge -3 \end{cases}$

해설

③ 

4. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $a > b, c > d$ 이면 $a + c > b + d$ 이다.

② $a > b,\ c > 0$ 이면 $ac > bc,\ \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ 이다.

③ $a > b > 0$ 이면 $a^2 > b^2$ 이다.

④ $a > b,\ c > d$ 이면 $ac > bd$ 이다.

⑤ $a > b,\ c < 0$ 이면 $ac < bc,\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ 이다.

해설

④ $a > b,\ c > d$ 이면 $ac > bd$

반례 : $a,\ b,\ c,\ d$ 가 음수인 경우는 $ac < bd$

5. 부등식 $|x|+|x-2| \le 3$을 풀면 $m \le x \le n$이다. $m+n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

i) $x < 0$일 때

$-x - x + 2 - 3 \le 0$

$-2x \le 1$

$\therefore\ -\frac{1}{2} \le x < 0$

ii) $0 \le x < 2$일 때

$x - x + 2 \le 3$

$\therefore\ 0 \le x < 2$

iii) $x \ge 2$일 때

$2x - 2 \le 3$

$2x \le 5$

$\therefore\ 2 \le x \le \frac{5}{2}$

i), ii), iii) 에서 $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{2}$

$\therefore m = -\frac{1}{2},\ n = \frac{5}{2},\ m + n = 2$

6. 어부 김씨는 둘레 길이가 28 cm 인 직사각형 모양의 양식장의 넓이를 $48\,\mathrm{m}^2$ 이상이 도도록 지으려고 한다. 이 때 양식장의 한 변의 길이를 최대 얼마로 해야 하는가?

① 5 m　② 6 m　③ 7 m　④ 8 m　⑤ 9 m

해설

양식장의 가로의 길이를 $x\,\mathrm{m}$ 라고 하면
둘레의 길이는 28 m 이므로
세로의 길이는 $(14-x)\,\mathrm{m}$ 이다.
양식장의 넓이가 $48\,\mathrm{m}^2$ 이상이므로
$x(14-x) \geq 48,\ 14x - x^2 - 48 \geq 0$
$x^2 - 14x + 48 \leq 0, (x-6)(x-8) \leq 0$
$\therefore 6 \leq x \leq 8$
따라서 한 변의 길이를 최대 8 m 로 해야 한다.

7. 두 삼각형이 있다. 그 중 한 삼각형은 세 변의 길이가 $3,\ 4,\ x$이고, 또 다른 삼각형의 세 변의 길이는 $3^2,\ 4^2,\ x^2$이다. 이 때, 정수 x 의 값의 개수는?

① 2 개　　② 3 개

③ 4 개　　④ 5 개

⑤ 6 개 이상 무수히 많다.

해설

삼각형의 두 변의 합은 다른 한 변보다 커야
하므로 $3+4>x, 3+x>4,\ 4+x>3$,
$9+16>x^2,\ 9+x^2>16,\ 16+x^2>9$의
6개의 부등식을 만족하는
x값의 범위는 $\sqrt{7}<x<5$이고
x가 정수이므로 $x=3,\ x=4$이다.

8. 이차방정식 $x^2 - 4x + k = 0$의 두 실근이 모두 3보다 작기 위한 실수 k의 범위를 구하면 $m < k \le n$이다. mn의 값을 구하면?

① 10　　② 12　　③ -15　　④ -12　　⑤ -10

해설

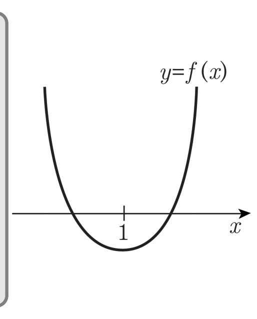
ⅰ) $D/4 = 4 - k \ge 0$, $k \le 4$
ⅱ) $f(3) > 0$, $k > 3$ 따라서,
ⅰ) ⅱ)를 모두 만족하는 k의 범위는 $3 < k \le 4$
$m = 3$, $n = 4$ 이므로 $mn = 12$

9. 이차방정식 $x^2-(a+1)x-3=0$의 한 근은 1보다 크고, 다른 한 근은 1보다 작도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a>-1$　② $a>-2$　③ $a>-3$
④ $a>-4$　⑤ $a>-5$

해설

$f(x)=x^2-(a+1)x-3$ 이라 하면
$f(x)=0$ 의 한 근은 1 보다 크고
다른 한 근은 1 보다 작으므로
$y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
즉, $f(1)<0$ 이므로 $-a-3<0$
$\therefore a>-3$



10. 다음 연립부등식을 만족하는 정수의 개수를 구하여라.

$$\begin{cases} \dfrac{5x+2}{3} - \dfrac{3}{2}x < 2 \\ \dfrac{3x-1}{4} - \dfrac{x}{2} > -1 \end{cases}$$

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 10 개

해설

$10x + 4 - 9x < 12 \quad \therefore \ x < 8$

$3x - 1 - 2x > -4 \quad \therefore \ x > -3$

$\therefore -3 < x < 8$

이므로 이를 만족하는 정수의 개수는 10개이다.

11. 연립부등식 $\begin{cases} 5x - a < 11 \\ x - b < 3(x-3) \end{cases}$ 의 해가 $1 < x < 3$이다. $-ax + b \geq 0$을 만족하는 정수 중 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$5x < a + 11$, $x < \frac{a+11}{5}$

$x - b < 3x - 9$, $9 - b < 2x$, $\frac{9-b}{2} < x$

$\frac{a+11}{5} = 3 \qquad \therefore\ a = 4$

$\frac{9-b}{2} = 1 \qquad \therefore\ b = 7$

$a = 4$, $b = 7$을 $-ax + b \geq 0$에 대입하여 정리하면

$-4x + 7 \geq 0$

$x \leq \frac{7}{4}$이므로 만족하는 정수 중 최댓값은 1이다.

12. 임의의 실수 x에 대하여 $\sqrt{ax^2+ax+b}$가 실수일 때, 계수 a, b가 만족하는 조건을 구하면?

① $0 \le a \le 4b$　② $0 < a \le 4b$　③ $0 \le a < 4b$
④ $0 < a < 4b$　⑤ $0 < a < 4b$

해설

모든 실수 x에 대하여
$ax^2+ax+b \ge 0$을 만족해야 하므로
ⅰ) $a=0$일 때, $b \ge 0 \cdots$①
ⅱ) $a>0$일 때,
$D=a^2-4ab \le 0$
$a-4b \le 0 \cdots$②
①,②에서 $0 \le a \le 4b$

13. 부등식 $5-x>2|x+1|$의 해와 $ax^2+bx+7>0$의 해가 같도록 상수 $a,\ b$의 값을 정할 때, $a+b$의 값은 ?

① -7　　② -5　　③ 5　　④ 7　　⑤ 0

해설

$5-x>2|x+1|$ 을 풀면

(i) $x \geq -1$ 일 때

$5-x>2x+2,\ x<1 \quad \therefore -1 \leq x < 1$

(ii) $x<-1$ 일 때

$5-x>-2x-2,\ x>-7 \quad \therefore -7<x<-1$

(i), (ii) 에 따라 $-7<x<1$

$ax^2+bx+7>0 \Leftrightarrow -7<x<1$ 이므로 $a<0$ 이고

$ax^2+bx+7=a(x+7)(x-1)$

계수를 비교하면

$a=-1, b=-6 \quad \therefore\ a+b=-7$

14. 양의 실수 a, b, c 에 대하여, x 에 관한 연립이차부등식 $\begin{cases} ax^2 - bx + c < 0 \\ cx^2 - bx + a < 0 \end{cases}$ 의 해가 존재할 때, 다음 <보기> 중 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>

ㄱ $b^2 - 4ac > 0$　　ㄴ $a + c < b$

ㄷ $a < 1$ 이고 $b < c$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ 두 식의 판별식 값이
모두 $b^2 - 4ac$ 이고
$D > 0$ 이어야 해가 존재하므로 옳다.
ㄴ주어진 식에
1을 대입하면 성립한다.

15. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근은 -1과 0 사이에 있고, 다른 근은 0과 2 사이에 있을 때 정수 a, b에 대하여, $a+b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$f(x)=x^2+ax+b$ 라고 놓을 때

$$\begin{cases} f(-1)=1-a+b>0 & \cdots ① \\ f(0)=b<0 & \cdots ② \\ f(2)=4+2a+b>0 & \cdots ③ \end{cases}$$

①$\times 2+$③하면 $6+3b>0$

$\therefore\ b>-2$

이것과 ②에서 $-2<b<0$

$\therefore\ b=-1$ ($\because\ b$는 정수)

이 값을 ①, ③에 대입하면

$1-a-1>0,\ 4+2a-1>0$

$\therefore\ -\dfrac{3}{2}<a<0$

$\therefore\ a=-1$ ($\because\ a$는 정수)

$\therefore\ a=-1,\ b=-1,\ a+b=-2$

16. $\frac{2x-3}{4}$의 절대값이 2보다 크고 6보다 작을 때, 만족하는 정수 x의 모든 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

(1) $2 < \frac{2x-3}{4} < 6$일 때,

$8 < 2x-3 < 24$,

$11 < 2x < 27$,

$\frac{11}{2} < x < \frac{27}{2}$

$\therefore\ x = 6,\ 7,\ 8,\ \cdots,\ 13$

(2) $-6 < \frac{2x-3}{4} < -2$일 때,

$-24 < 2x-3 < -8$,

$-21 < 2x < -5$,

$-\frac{21}{2} < x < -\frac{5}{2}$

$\therefore\ x = -10,\ -9,\ -8,\ \cdots,\ -3$

따라서 x의 값의 합은 24이다.

17. 연립부등식 $5x-3>a$, $4x+3\le -x-2a$ 의 해가 존재하도록 상수 a의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a<-2$

해설

주어진 부등식을

$$\begin{cases} 5x-3>a & \cdots ㉠ \\ 4x+3\le -x-2a & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x>\dfrac{a+3}{5}$

㉡에서 $x\le\dfrac{-2a-3}{5}$

해가 존재해야 하므로 $\dfrac{a+3}{5}<\dfrac{-2a-3}{5}$

$\therefore\ a<-2$

18. 90 명이 넘는 사람들이 케이블카를 타려고 한다. 5 명씩 타면 7 명이 남고, 6 명씩 타면 케이블카가 1 개 남는다고 한다. 전체 인원 수를 구하여라.

① 91 명　② 92 명　③ 93 명　④ 94 명　⑤ 95 명

해설

케이블카의 대수를 x 대라고 하면, 전체 인원 수는 $(5x+7)$ 명이다.
하나의 케이블카에 6 명씩 타면 케이블카가 1 대 남으므로
사람이 타고 있는 케이블카의 수는 $(x-1)$ 개이고, 그 중 $(x-2)$ 개는 6 명씩 모두 들어가 있고, 나머지 하나의 케이블카에는 1 명 이상 6 명 이하가 들어가게 된다.
먼저 나머지 하나의 케이블카에 1 명이 들어간 경우를 식으로 표현하면, $6(x-2)+1$ 이고,
하나의 케이블카에 6 명이 들어간 경우를 식으로 표현하면, $6(x-2)+6$ 이다.
전체 인원 수는 이 두 가지 경우 사이에 존재하므로
$6(x-2)+1 \le 5x+7 \le 6(x-2)+6$ 이다.

이를 연립부등식으로 나타내면 $\begin{cases} 6(x-2)+1 \le 5x+7 \\ 5x+7 \le 6(x-2)+6 \end{cases}$ 이고

간단히 하면, $\begin{cases} x \le 18 \\ x \ge 13 \end{cases}$

그러므로, x 의 범위는 $13 \le x \le 18$ 이다.
따라서 케이블카는 13, 14, 15, 16, 17, 18 대가 될 수 있다.
전체 인원 수는 (케이블카의 대수) $\times$ 5 + 7 이므로 72, 77, 82, 87, 92, 97, 102 명이다.
학생수는 90 명이 넘는다고 하였으므로 92, 97 명이 될 수 있다.

19. x, y, z는 실수이고, 두 관계식 $x+y+z=2, 2x^2-yz=4$를 만족시킨다. 이 때 $xy+yz+zx$의 최솟값을 구하여라.

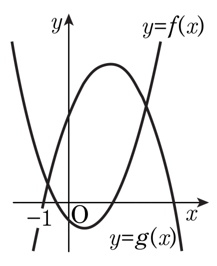
▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$y+z=2-x,\ \ yz=2x^2-4$에서
y, z를 두근으로 하는 이차방정식은
$t^2-(2-x)t+2x^2-4=0$이므로
$D=(2-x)^2-4(2x^2-4)\geq 0$
$\therefore\ -2\leq x\leq \frac{10}{7}$
따라서 $xy+yz+zx=yz+(y+z)x$
$=(2x^2-4)+(2-x)x$
$=(x+1)^2-5$에서 $x=-1$일 때 최솟값 -5

20. 이차항의 계수가 각각 1, -1인 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음의 그림과 같다. 부등식 $f(x)-g(x)\le 0$의 해가 $-1\le x\le 3$이고 $f(2)=1$일 때, $g(1)$의 값은?



① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

해설

$y=f(x)$의 y절편이 -1이므로 $f(x)=x^2+ax-1$로 놓을 수 있다.
$f(2)=2a+3=1$에서 $a=-1$
$\therefore f(x)=x^2-x-1$
$g(x)=-x^2+bx+c$로 놓으면 $f(x)-g(x)\le 0$의 해가 $-1\le x\le 3$이므로
$f(x)-g(x)=2x^2-(1+b)x-1-c=2(x+1)(x-3)=2x^2-4x-6$
따라서, $1+b=4$, $-1-c=-6$에서
$b=3$, $c=5$
$\therefore g(x)=-x^2+3x+5$
$\therefore g(1)=7$