1. 다음 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $a > b,\ c > d$ 이면 $a + c > b + d$ 이다.

㉡ $a > b$ 이면 $a^2 > b^2$ 이다.

㉢ $a > b > 0$ 이면 $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$ 이다.

① ㉠　② ㉠, ㉡　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ $a-b>0,\ c-d>0$ 에서 양변을 더해 정리하면 주어진 식이 나온다.

㉡ $a>0>b$ 인 경우 b의 절댓값이 a 보다 크면 주어진 식은 성립하지 않는다.

㉢ 주어진 식에서 a, b의 부호가 모두 양수이므로 그 역수는 반대가 된다.

2. $ax+b>0$의 해가 $x<2$일 때, $(a+b)x<5b$의 해는?

① $x>5$　② $x>10$　③ $x<1$

④ $x<5$　⑤ $x<10$

해설

$ax+b>0$에서 $ax>-b$
해가 $x<2$ 이므로
$a<0$ ······㉠
$-\frac{b}{a}=2$ ······㉡
㉡을 정리하면 $b=-2a$ ······㉢
㉢에서 $b=-2a$를 $(a+b)x<5b$에 대입하면
$(a-2a)x<5\cdot(-2a),\ -ax<-10a$
㉠에서 $a<0$이므로 $x<10$

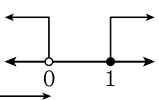
3. 연립부등식$\{x \mid 3 - x > -1,\ 3x - 1 \geq 2\}$ 의 해를 $a \leq x < b$ 라고 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하면?

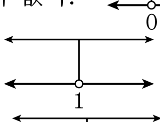
① 17　② 16　③ 15　④ 14　⑤ 13

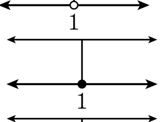
해설

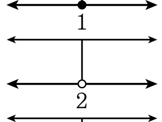
$3 - x > -1, \quad -x > -1 - 3, \ x < 4,$
$3x - 1 \geq 2, \quad 3x \geq 3, \quad x \geq 1$ 이므로
연립부등식의 해는 $1 \leq x < 4$,
따라서 $a^2 + b^2 = 1 + 16 = 17$ 이다.

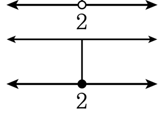
4. 연립부등식 $\begin{cases} 8-3x \le 2 \\ 3x-3 \le 3 \end{cases}$ 의 해를 옳게 구하고 수직선상의 그림을 바르게 그린 것은?

① 해가 없다. 

② 1 , 

③ 1 , 

④ 2 , 

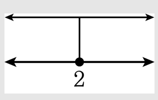
⑤ 2 , 

해설

$\begin{cases} 8-3x \le 2 \\ 3x-3 \le 3 \end{cases}$ 을 정리하면,

$\begin{cases} -3x \le -6 \\ 3x \le 6 \end{cases}$ 이고

간단히 하면 $\begin{cases} x \ge 2 \\ x \le 2 \end{cases}$ 이다.

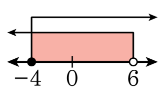
수직선 위에 그리면 

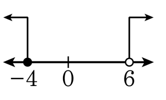
이 되고 해는 2 이다.

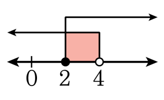
5. 연립부등식

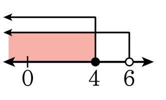
$$\begin{cases} 2(x-3) < x \\ x+5 \le 3(x-1) \end{cases}$$

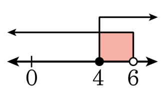
의 해를 수직선 위에 바르게 나타낸 것은?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

1. $2(x-3) < x,\ x < 6$
2. $x+5 \le 3(x-1),\ x \ge 4$

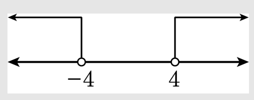
공통된 해를 찾으면 $4 \le x < 6$

6. 다음 연립부등식 중에서 해가 없는 것은?

① $\begin{cases} x > 1 \\ x \geq 4 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq -5 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x > 4 \\ x < -4 \end{cases}$

④ $\begin{cases} x < 5 \\ x \geq 3 \end{cases}$ ⑤ $\begin{cases} x \leq 7 \\ x \geq -3 \end{cases}$

해설

③ 

7. 연립부등식 $\begin{cases} 3x-2 \le x+a \\ 2x-b \le 3x \end{cases}$ 의 해가 4 일 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$\begin{cases} 3x-2 \le x+a & \cdots ① \\ 2x-b \le 3x & \cdots ② \end{cases}$ 이라 하면

①에서 $x \le \dfrac{a+2}{2}$

②에서 $x \ge -b$

$\therefore \ -b \le x \le \dfrac{a+2}{2}$

이 부등식의 해가 4 이려면 $4 \le x \le 4$ 이어야 하므로

$-b=4$ 에서 $b=-4$, $\dfrac{a+2}{2}=4$ 에서 $a=6$

따라서 $a-b=6-(-4)=10$ 이다.

8. 연속하는 세 홀수의 합이 45 보다 크고 55 보다 작을 때, 세 홀수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

▷ 정답 : 17

▷ 정답 : 19

해설

연속하는 세 홀수를 $x-2, x, x+2$ 라 하면

$45 < (x-2)+x+(x+2) < 55$

$45 < 3x < 55$

$\rightarrow \begin{cases} 45 < 3x \\ 3x < 55 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 15 \\ x < \frac{55}{3} \end{cases} \rightarrow 15 < x < \frac{55}{3}$

$\therefore\ x = 16,\ 17,\ 18$

x 는 홀수이므로 17 이다.

따라서 세 홀수는 15 , 17 , 19 이다.

9. 부등식 $2|x+2|+|x-1| \le 6$을 만족하는 정수 x의 개수는?

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

(i) $x \ge 1$일 때

$2x+4+x-1-6=3x-3 \le 0,\ x \le 1$

$\therefore x=1 \cdots$ ㉠

(ii) $-2 \le x < 1$일 때

$2x+4+1-x-6=x-1 \le 0$에서 $x \le 1$

$\therefore -2 \le x < 1 \cdots$ ㉡

(iii) $x < -2$일 때

$-2x-4-x+1-6=-3x-9 \le 0$

$3x \ge -9,\ \ x \ge -3$

$\therefore -3 \le x < -2 \cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $-3 \le x \le 1$

따라서 만족하는 정수 x의 개수는 5 개

10. 부등식 $|2x-a|>7$의 해가 $x<-1$ 또는 $x>b$일 때, 상수 a, b의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$|2x-a|>7$에서

$2x-a<-7$ 또는 $2x-a>7$

$\therefore x<\dfrac{a-7}{2}$ 또는 $x>\dfrac{a+7}{2}$

그런데 주어진 부등식의 해가

$x<-1$ 또는 $x>b$이므로

$\dfrac{a-7}{2}=-1,\ \dfrac{a+7}{2}=b$

$\therefore a=5,\ b=6$

$\therefore a+b=11$

11. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \le 0$의 해를 구하면?

① $x \ge 3$ 또는 $x \le -3$
② x는 모든 실수
③ $x \ne 3$인 모든 실수
④ $x = 3$
⑤ 해가 없다

해설

$x^2 - 6x + 9 \le 0$
$(x-3)^2 \le 0$
$\Rightarrow x = 3$

12. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $kx^2 - 2(k-4)x + 2 \geq 0$이 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $k \leq -2$ ② $-1 \leq k \leq 2$ ③ $1 \leq k \leq 8$
④ $2 \leq k \leq 8$ ⑤ $k \leq 8$

해설

x^2 의 계수가 미지수 k이므로

i) $k = 0$일 때 $8x + 2 \geq 0$에서 $x \geq -\frac{1}{4}$이므로
모든 실수 x에 대하여 성립하는 것은 아니다.
ii) $k \neq 0$일 때 $kx^2 - 2(k-4)x + 2 \geq 0$의 해가 모든 실수이려면
$k > 0 \cdots$ ㉠
$\frac{D}{4} = (k-4)^2 - 2k \leq 0,\ k^2 - 10k + 16 \leq 0,$
$(k-2)(k-8) \leq 0 \quad \therefore 2 \leq x \leq 8 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2 \leq k \leq 8$
i), ii) 에서 $2 \leq k \leq 8$이다.

13. 부등식 $|x-2|<k$를 만족하는 모든 x의 값이 부등식 $|x^2-8| \le 8$을 만족할 때, 실수 k의 최댓값은? (단, $k>0$)

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

부등식 $|x^2-8| \le 8$을 풀면
$-8 \le x^2-8 \le 8$
$0 \le x^2 \le 16$
$\therefore -4 \le x \le 4$
$k>0$이므로 부등식 $|x-2|<k$ 을 풀면
$-k < x-2 < k$
$-k+2 < x < k+2$
이때, 이 부등식의 모든 해가 $|x^2-8| \le 8$을 만족하려면
$-k+2 \ge -4,\ k+2 \le 4$이어야 하므로
$k \le 6,\ k \le 2$
$\therefore 0 < k \le 2$
따라서 실수 k의 최댓값은 2이다.

14. 다음 이차부등식 중 해가 존재하지 않는 것은?

① $2x^2-6x+1 \le 0$　　② $x^2-2x-3<0$

③ $x^2-x+1>0$　　④ $x^2-6x+9>0$

⑤ $4x^2-4x+1<0$

해설

① $(x-\frac{3-\sqrt{7}}{2})(x-\frac{3+\sqrt{7}}{2}) \le 0$

$\Rightarrow \frac{3-\sqrt{7}}{2} \le x \le \frac{3+\sqrt{7}}{2}$

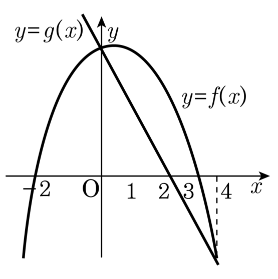
② $(x+1)(x-3)<0 \ \Rightarrow -1<x<3$

③ $(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0 \ \Rightarrow x$ 는 모든 실수

④ $(x-3)^2>0 \Rightarrow x \ne 3$ 인 모든 실수

⑤ $(2x-1)^2<0 \Rightarrow$ 해는 없다

15. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = g(x)$ 가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x) > g(x)$ 의 해를 구하면?



① $-2 < x < 4$　　② $-2 < x < 3$

③ $0 < x < 4$　　④ $2 < x < 3$

⑤ $3 < x < 4$

해설

부등식 $f(x) > g(x)$ 의 해는
함수 $f(x)$ 의 그래프가 직선 $y = g(x)$ 보다
위쪽에 있는 x 의 구간을 의미하므로
구하는 해는 $0 < x < 4$

16. 다음 연립부등식을 풀어라.

$$\begin{cases} 2(2x-3) > x+3 \\ 5x-9 < 2(3x+7) \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x > 3$

해설

ⅰ) $2(2x-3) > x+3$

$\Rightarrow\ 4x-6 > x+3$

$\Rightarrow\ x > 3$

ⅱ) $5x-9 < 2(3x+7)$

$\Rightarrow\ -x < 23$

$\Rightarrow\ x > -23$

$\therefore\ x > 3$

17. 다음 연립부등식 중 해가 <u>없는</u> 것을 모두 고르면?

① $\begin{cases} 3x-2>-2x+3 \\ 2(x+1)\ge 8 \end{cases}$

② $\begin{cases} -\dfrac{x}{2}\le \dfrac{1}{4}-x \\ -0.2x-1\ge -1.2x-3 \end{cases}$

③ $\begin{cases} 7x-1>4x+11 \\ 3x-3\le 1-2x \end{cases}$

④ $\begin{cases} 2x>6 \\ -x\ge -3 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} 2x-3x\le 7 \\ x+1>5 \end{cases}$

해설

① $x\ge 3$

② $-2\ge x\le \dfrac{1}{2}$

③ $x\ge 4$ 또는 $x\le \dfrac{4}{5}$ 이므로 해가 없다.

④ $x>3$ 또는 $x\le 3$ 이므로 해가 없다.

⑤ $x>4$

18. 다음 중 연립부등식 $\begin{cases} 0.5x \le -1.5 + 3.5x \\ 3(x - \frac{2}{5}) < -0.2 \end{cases}$ 의 해로 옳은 것은?

① $x < \frac{1}{3}$　② $x \ge \frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{3} < x \le \frac{1}{2}$
④ 해가 없다.　⑤ $2 < x \le 3$

해설

$\begin{cases} 0.5x \le -1.5 + 3.5x \\ 3(x - \frac{2}{5}) < -0.2 \end{cases}$ 를 간단히 하면

$\begin{cases} x \le -3 + 7x \\ 15x - 6 < -1 \end{cases} \to \begin{cases} x - 7x \le -3 \\ 15x < -1 + 6 \end{cases} \to \begin{cases} x \ge \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{3} \end{cases}$ $\therefore$ 해가 없다.

19. 사탕을 포장하는데 한 박스에 4 개씩 넣으면 12 개가 남고, 6 개씩 넣으면 3 개이상 5 개 미만이 남는다고 한다. 전체 사탕의 개수는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 28 개

해설

묶음의 수를 x묶음이라 하면

사탕의 수 : $(4x+12)$ 개

$6x+3 \le 4x+12 < 6x+5$

$$\begin{cases} 6x+3 \le 4x+12 \\ 4x+12 < 6x+5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x \le 9 \\ -2x < -7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \le \frac{9}{2} \\ x > \frac{7}{2} \end{cases}$$

$\frac{7}{2} < x \le \frac{9}{2}$ 에서 x는 자연수이어야 하므로 $x = 4$

$\therefore$ 사탕의 수는 $4 \times 4 + 12 = 28$ (개) 이다.

20. 규진이는 지금까지 본 세 번의 수학시험에서 각각 92 점, 83 점, 89 점을 받았다. 네 번까지 치른 시험점수의 평균이 85 점 이상 91 점 이하가 되게 하려면 네 번째 시험에서 몇 점 이상을 받아야 하는지 구하여라. (단, 수학시험은 100 점 만점이다.)

▶ 답 : 점

▷ 정답 : 76 점

해설

$85 \le \dfrac{92+83+89+x}{4} \le 91$

$85 \times 4 \le 92+83+89+x \le 91 \times 4$

$\Rightarrow \begin{cases} 340 \le 264+x \\ 264+x \le 364 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -x \le 264-340 \\ 264+x \le 364 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x \ge 76 \\ x \le 100 \end{cases}$

$\therefore\ 76 \le x \le 100$

21. 부등식 $(a-b)x+(b-2a) > 0$의 해가 $x > \frac{3}{2}$일 때, 부등식 $ax^2+(a+2b)x+(a+3b) < 0$의 해를 구하면?

① $3 < x < 7$　② $-3 < x < 1$　③ $x < 2,\ x > 3$
④ $-1 < x < 2$　⑤ $x < -2,\ x > 4$

해설

$(a-b)x > 2a-b$의 해가 $x > \frac{3}{2}$이려면
$a-b > 0,\ \frac{2a-b}{a-b} = \frac{3}{2}$이어야 한다.
$\therefore\ a=-b,\ \ b < 0$
준 부등식 $-bx^2+bx+2b < 0$에서
$x^2-x-2 < 0,\ (x-2)(x+1) < 0$
$\therefore\ -1 < x < 2$

22. 부등식 $x^2 - 4|x| + 3 < 0$을 만족하는 정수 x의 개수는?

① 0 개　　② 1 개　　③ 2 개
④ 3 개　　⑤ 무수히 많다.

해설

$x^2 - 4|x| + 3 < 0$에서 $|x|^2 - 4|x| + 3 < 0$
$(|x| - 1)(|x| - 3) < 0$
$1 < |x| < 3$
따라서, 정수 $x = 2, -2$

23. 부등식 $3[x]^2 + [x] - 10 \leq 0$ 의 해는? (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수)

① $-3 \leq x < 1$ ② $-3 \leq x < 2$ ③ $-2 \leq x < 1$
④ $-2 \leq x < 2$ ⑤ $-2 \leq x < 3$

해설

$3[x]^2 + [x] - 10 \leq 0$ 이므로
$([x] + 2)(3[x] - 5) \leq 0$
$-2 \leq [x] \leq \dfrac{5}{3}$
$[x]$ 는 정수이므로
$-2 \leq [x] \leq 1$
$\therefore -2 \leq x < 2$

24. 다음 <보기> 중 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $x^2 > -1$

㉡ $2\ (x-1)^2 \geq 0$

㉢ $(x+2)^2 + 1 > 0$

㉣ $x^2 - 4x + 1 > 0$

① ㉠, ㉡
② ㉡, ㉢
③ ㉢, ㉣
④ ㉠, ㉡, ㉢
⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ $x^2 \geq 0$이므로 $x^2 > -1$

㉡ $(x-1)^2$은 완전제곱식이므로 $(x-1)^2 \geq 0$이다.

㉢ $(x+2)^2 \geq 0$이므로 $(x+2)^2 + 1 > 0$이다.

㉣ $x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3$이므로 항상 0보다 크다고 할 수 없다.

25. 모든 실수 x 에 대하여 $(k+3)x^2+2(k+3)x+2>0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 k 의 값의 범위는?

① $-3 \le k < -1$　　② $-3 < k \le -1$

③ $-3 \le k \le -1$　　④ $k < -3$ 또는 $k > -1$

⑤ $k \le -3$ 또는 $k \ge -1$

해설

$(k+3)x^2+2(k+3)x+2>0$ 에서 (i) $k+3=0$,
즉 $k=-3$ 일 때
$2>0$ 이므로 주어진
부등식은 항상 성립한다.
(ii) $k+3 \ne 0$,
즉 $k \ne -3$ 일 때
주어진 부등식이 항상 성립하려면
$k+3>0$　$\therefore k>-3 \cdots$ ㉠
이차방정식$(k+3)x^2+2(k+3)x+2=0$ 의
판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4}=(k+3)^2-2(k+3)<0$ 에서
$(k+3)(k+1)<0$
$\therefore -3<k<-1 \cdots$ ㉡
㉠,㉡의 공통 범위를 구하면 $-3<k<-1$
(i), (ii) 에서 $-3 \le k < -1$

26. 부등식 $x^2-2ax+a+2<0$의 해가 존재하지 않기 위한 실수 a 의 값의 범위는?

① $-2 \le a \le 1$ ② $a \le -1$ 또는 $a \ge 2$
③ $-1 \le a \le 2$ ④ $-1 < a < 2$
⑤ $a < -1$ 또는 $a > 2$

해설

$x^2-2ax+a+2<0$ 의 해가 존재하지 않으려면
모든 실수 x 에 대하여
$x^2-2ax+a+2 \ge 0$ 이어야 한다.
이차방정식 $x^2-2ax+a+2=0$ 의 판별식을
D 라 하면 $\frac{D}{4}=a^2-a-2 \le 0$ 에서
$(a+1)(a-2) \le 0$
$\therefore -1 \le a \le 2$

27. 두 대의 승용차 A, B가 같은 거리를 가는데 A는 거리의 반은 시속 vkm로 달리고, 나머지 거리는 시속 u km로 달린다고 한다, 또한 B는 소요된 시간의 반은 시속 u km로 달리고 나머지 소요된 시간은 v km로 달린다고 한다. 승용차 A, B의 평균 속력이 각각 x km/시, y km/시일 때, x와 y의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $x \le y$ ② $x \ge y$ ③ $x = y$ ④ $x < y$ ⑤ $x > y$

해설

승용차 A가 달린 거리를 s,

시간을 t라 하면 $t = \frac{s}{2u} + \frac{s}{2v}$

평균 속력은

$$\frac{s}{t} = \frac{s}{\frac{s}{2u} + \frac{s}{2v}} = \frac{s}{\frac{su + sv}{2uv}} = \frac{2uv}{u+v} = x$$

승용차 B의 평균 속력은 $\frac{1}{2}(u+v) = y$

$$y - x = \frac{1}{2}(u+v) - \frac{2uv}{u+v}$$

$$= \frac{(u+v)^2 - 4uv}{2(u+v)} \ge 0$$

따라서 $y - x \ge 0$이므로 $x \le y$이다.

28. 좌표 평면 위에서 모든 실수 x 에 대하여 직선 $y = 2(kx + 1)$ 이 곡선 $y = -(x - 2)^2 + 1$ 보다 항상 위쪽에 있도록 실수 k 의 값을 정할 때, 다음 중 k 의 값의 범위에 속하지 <u>않는</u> 것은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 0 ⑤ -1

해설

임의의 실수 x 에 대하여 부등식
$2(kx + 1) > -(x - 2)^2 + 1 \cdots$ ㉠이
항상 성립하도록 k 의 값을 정하면 된다.
㉠식을 정리하면
$x^2 + 2(k - 2)x + 5 > 0 \cdots$ ㉡식이
항상 성립하기 위하여

$$\frac{D}{4} = (k - 2)^2 - 5 < 0$$

$$\Rightarrow k^2 - 4k - 1 < 0$$

$$\therefore 2 - \sqrt{5} < k < 2 + \sqrt{5}$$

이때, 0, 1, 2, 3 은 k 의 값의 범위에 속하나
-1 은 속하지 않는다.

29. 이차함수 $y=x^2-2x-3$ 의 그래프가 이차함수 $y=2x^2-2mx+1$ 의 그래프보다 항상 아래쪽에 존재하도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

① $-3<m<3$ ② $-3\ m<1$

③ $-1<m<3$ ④ $m<-1$또는$m>1$

⑤ $m<-1$또는$m>3$

해설

$x^2-2x-3<2x^2-2mx+1$ 에서
$x^2-2(m-1)x+4>0$
이 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-2(m-1)x+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4}=(m-1)^2-4<0$ 에서
$(m+1)(m-3)<0$
$\therefore -1<m<3$

30. $-2 \le x \le 2$ 일 때, x 에 대한 부등식 $x^2 - 6x \ge a^2 - 6a$ 가 항상 성립하기 위한 a 의 값의 범위는?

① $-4 \le a \le 0$　　② $-2 \le a \le 2$　　③ $0 \le a \le 4$

④ $2 \le a \le 4$　　⑤ $4 \le a \le 6$

해설

$f(x) = x^2 - 6x - a^2 + 6a$ 라 놓고
$-2 \le x \le 2$ 에서
$f(x) > 0$ 일 때, a 의 값의 범위를 구한다.
$f(x) = (x-3)^2 - a^2 + 6a - 9$ 이므로
$-2 \le x \le 2$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 $x = 2$ 일 때,
$f(2) = 4 - 12 - a^2 + 6a \ge 0$
$a^2 - 6a + 8 \le 0 \quad \Rightarrow \quad (a-2)(a-4) \le 0$
$\therefore \; 2 \le a \le 4$

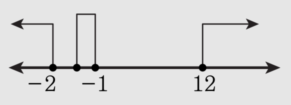
31. x에 대한 이차부등식 $x^2 - 10x - 24 \geq 0$,
$(x+1)(x-a^2+a) \leq 0$을 동시에 만족하는 x의 값의 존재하지 않도록 상수 a의 값의 범위는?

① $-3 < a < 12$　② $-3 < a < 8$　③ $-3 < a < 4$
④ $-2 < a < 12$　⑤ $-2 < a < 3$

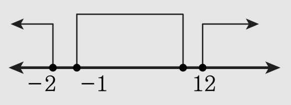
해설

$$\begin{cases} x^2 - 10x - 24 \geq 0 & \cdots \text{(가)} \\ (x+1)(x-a^2+a) \leq & \cdots \text{(나)} \end{cases}$$

(가)에서
$(x-12)(x+2) \geq 0$
$\therefore x \leq -2$ 또는 $x \geq 12$ (가)와 (나)의
공통 범위가 존재하지 않으려면 다음 그림에서



$a^2 - a > -2 \cdots$(다)



$a^2 - a < 12 \cdots$(라)

(다)에서$a^2 - a + 2 > 0$, $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$

$\therefore$모든 실수
(라)에서 $a^2 - a - 12 < 0$, $(a+3) \times (a-4) < 0$
$\therefore -3 < a < 4$
따라서 (다)와 (라)의 공통 범위를 구하면
$-3 < a < 4$

32. 세 변의 길이가 $x-1,\ x,\ x+1$인 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 x의 값의 범위가 $a<x<b$라 할 때, $a+b$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x-1,\ x,\ x+1$은 삼각형의 세 변이므로
$x-1>0$, $x>0$, $x+1>0$
$x-1+x>x+1 \therefore x>2 \cdots\cdots$ ①
한편, 둔각삼각형이 되려면 $(x-1)^2+x^2<(x+1)^2$
$x^2-4x<0$에서 $0<x<4 \quad \cdots\cdots$ ②
①과 ②에서 $2<x<4$
$\therefore\ a=2,\ b=4$
따라서 $a+b=6$

33. x에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$이 $x < 1$에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 범위를 구하면 $a \leq k$이다. 이 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$라 놓으면

i) 축이 $x < 1$에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1,\ a < 2$

ii) $f(1) > 0, \quad 1 - a + 9 > 0, \quad a < 10$

iii) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$\mathrm{D} = a^2 - 4 \cdot 9 \geq 0,\ \ a \geq 6,\ \ a \leq -6$

따라서 i), ii), iii) 에 의해 $a \leq -6$

$\therefore k = -6$

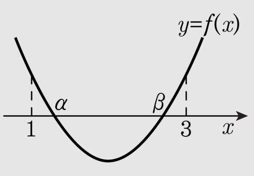
34. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면
$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
$D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a+4)(a-4) > 0$
$\therefore\ a < -4$ 또는 $a > 4$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$
$f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \dfrac{13}{3}$
$\therefore\ a < \dfrac{13}{3}$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이
$x = \dfrac{a}{2}$ 이므로 $1 < \dfrac{a}{2} < 3$
$\therefore\ 2 < a < 6$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \dfrac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4,\ \beta = \dfrac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

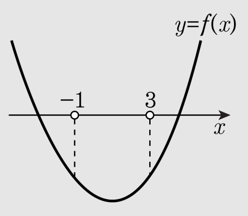
35. $-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2(k-1)x+3k<0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^2 + 2(k-1)x + 3k$ 라 하자.
$-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1) \le 0$, $f(3) \le 0$ 이어야 한다.



(i) $f(-1) \le 0$ 에서 $(-1)^2 + 2(k-1)\cdot(-1) + 3k \le 0$, $k + 3 \le 0$
$\therefore k \le -3$
(ii) $f(3) \le 0$ 에서 $3^2 + 2(k-1)\cdot 3 + 3k \le 0$, $9k + 3 \le 0$
$\therefore k \le -\frac{1}{3}$
(i), (ii) 에서 $k \le -3$
따라서, 실수 k의 최댓값은 -3이다.

36. 함수 $f(x) = ax + b$가 $2 \le f(1) \le 4$, $0 \le f(2) \le 3$을 만족할 때, $f(3)$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(1) = a + b$, $f(2) = 2a + b$
$f(3) = 3a + b$이므로 $f(3) = 2f(2) - f(1)$
조건에서 $2 \le f(1) \le 4$ ⋯⋯ ㉠
$0 \le f(2) \le 3$ ⋯⋯ ㉡
㉠에서 각 변에 -1을 곱하면
$-4 \le -f(1) \le -2$ ⋯⋯ ㉢
㉡에서 각 변에 2를 곱하면
$0 \le 2f(2) \le 6$ ⋯⋯ ㉣
$\therefore\ -4 \le f(3) \le 4$
따라서, $f(3)$의 최댓값은 4, 최솟값은 -4 이다.

37. $a<0$이고 $a+b=0$일 때, 부등식$(a-b)x-a-2b<0$의 해는?

① $x<-\dfrac{1}{2}$ ② $x>-\dfrac{1}{2}$ ③ $x>2$

④ $x<-2$ ⑤ $x>1$

해설

$a+b=0$에서 $b=-a$를 부등식에 대입하면

$(a+a)x-a+2a<0$, $2ax+a<0$, $2ax<-a$

$\therefore\ x>-\dfrac{1}{2}(\because\ 2a<0)$

38. 연립부등식 $\begin{cases} 1.2x-2 \le 0.8x+3.2 \\ 3-\dfrac{x-2}{4} < \dfrac{2x-3}{2} \\ 0.\dot{9}x \le 6 \end{cases}$ 의 해가 $a < x \le b$ 일 때, $a-b$ 의 값을 구하면?

① -9 ② -5 ③ -2 ④ 2 ⑤ 9

해설

i) $1.2x-2 \le 0.8x+3.2$,
$0.4x \le 5.2, \quad x \le 13$
ii) $3-\dfrac{x-2}{4} < \dfrac{2x-3}{2}$ 의 양변에 4 를 곱하면 $12-(x-2) < 2(2x-3), \quad x > 4$
iii) $0.\dot{9}x \le 6$
$\dfrac{9}{9}x \le 6$
$x \le 6$
$\therefore\ 4 < x \le 6$

39. 등식 $2(x+2y)+1=-x+3y$ 이 성립한다고 할 때, $-1<2x+y<1$ 을 만족하는 정수 x, y 를 구하려고 한다. 다음 빈 칸에 알맞은 수를 차례대로 써넣어라.

> [풀이]
> $2(x+2y)+1=-x+3y$ 를 y 에 대해서 정리하면 $y=$ (㉠) 이 된다.
> $-1<2x+y<1$ 를 풀 때 y 대신 $y=$ (㉠) 를 대입하면 $-1<-x-1<1$ 이 된다.
> 부등식을 풀면 $-2<x<0$ 이 되므로 정수인 x 는 (㉡) 이 된다.
> x 값을 (㉠) 에 대입하면 $y=$ (㉢) 가 된다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠ $-3x-1$

▷ 정답 : ㉡ -1

▷ 정답 : ㉢ 2

해설

$2(x+2y)+1=-x+3y$ 를 y 에 대해서 정리하면

$2(x+2y)+1=-x+3y$
$2x+4y+1=-x+3y$
$4y-3y=-x-2x-1$
$y=-3x-1$

$-1<2x+y<1$ 에 y 대신 $y=-3x-1$ 를 대입하면
$-1<2x+(-3x-1)<1$
$-1<-x-1<1$
$0<-x<2$
$-2<x<0$

정수인 x 는 -1 이 된다.
x 값을 $y=-3x-1$ 에 대입하면 $y=2$ 이다.

40. 연립부등식 $\begin{cases} -3x \le 2(1-x) \\ 4+x < -2x+a \end{cases}$ 를 만족하는 정수가 3개만 존재하도록 하는 상수 a의 값의 범위는?

① $a < 4$　　② $4 < a < 7$　　③ $a \le 7$

④ $4 < a \le 7$　　⑤ $4 \le a \le 7$

해설

$\begin{cases} -3x \le 2(1-x) \\ 4+x < -2x+a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ x < \dfrac{a-4}{3} \end{cases}$

정수 x는 $-2, -1, 0$이므로 $0 < \dfrac{a-4}{3} \le 1$

$\therefore\ 4 < a \le 7$

41. 1 개에 700 원 하는 콜라와 1 개에 600 원 하는 사이다를 합해서 20 개를 사려고 한다. 콜라를 사이다 보다 많이 사고 전체 금액이 13,500 원 이하가 되도록 하려고 한다. 콜라를 최소 a 개 살 수 있고, 최대 b 개 살 수 있다고 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=26$

해설

콜라의 개수를 x 개라고 놓으면 사이다의 개수는 $(20-x)$ 개이다.
콜라를 사이다 보다 많이 사게 되면 $x > 20-x$ 이다.
콜라와 사이다를 샀을 때 전체 금액을 식으로 나타내면, $700x+600(20-x)$ 이다. 또 전체 금액은 13,500 원 이하가 되어야 하기 때문에 $700x+600(20-x) \le 13500$ 이다.
위의 두 부등식을 이용하여 연립방정식을 만들면 $\begin{cases} x > 20-x \\ 700x+600(20-x) \le 13500 \end{cases}$ 이다. 이를 간단히 하면 $\begin{cases} x > 10 \\ x \le 15 \end{cases}$ 이다. 따라서 $10 < x \le 15$ 이다. 그러므로 콜라는 최소로 11 개, 최대로 15 개 살 수 있다. 따라서 $a=11$, $b=15$ 이다.
따라서 $a+b=11+15=26$ 이다.

42. 12% 의 설탕물 300g 이 있을 때, 물 xg 을 증발시켜 15% 이상 20% 이하의 설탕물을 만들려고 한다. x 의 값으로 옳지 않은 것은?

① 60 ② 80 ③ 100 ④ 120 ⑤ 130

해설

12% 의 소금물 300g 의 소금의 양은 $\frac{12}{100} \times 300 = 36$ (g) 이다.

따라서 물 xg 을 뺐을 때의 농도를 나타내면 $\frac{36}{300-x} \times 100$ 이다.

이 값이 15% 이상 20% 이하이므로, $15 \le \frac{36}{300-x} \times 100 \le 20$ 이고,

이를 연립 방정식으로 나타내면 $\begin{cases} 15 \le \frac{36}{300-x} \times 100 \\ \frac{36}{300-x} \times 100 \le 20 \end{cases}$ 이다.

간단히 나타내면 $\begin{cases} x \ge 60 \\ x \le 120 \end{cases}$ 이다.

따라서 빼줘야 하는 물의 양 x 의 범위는 $60 \le x \le 120$ 이다.

43. $\alpha < 0 < \beta$ 이고 이차부등식 $ax^2 + bx + c < 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때, 이차부등식 $cx^2 + bx + a < 0$ 의 해는?

① $\frac{1}{\alpha} < x < \frac{1}{\beta}$ ② $\frac{1}{\beta} < x < \frac{1}{\alpha}$

③ $x < \frac{1}{\alpha}$ 또는 $x > \frac{1}{\beta}$ ④ $x < \frac{1}{\beta}$ 또는 $x > \frac{1}{\alpha}$

⑤ b 의 부호에 따라 다르다.

해설

$ax^2 + bx + c < 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ $(\alpha < 0 < \beta)$ 이므로

$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta),\ a > 0$

$\therefore\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a},\ \alpha\beta = \frac{c}{a} < 0 \quad \therefore\ c < 0$

따라서,

$$\begin{aligned} cx^2 + bx + a &= c\left(x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c}\right) \\ &= c\left(x^2 - \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}x + \frac{1}{\alpha\beta}\right) \\ &= c\left\{x^2 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)x + \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\right\} \\ &= c\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)\left(x - \frac{1}{\beta}\right) < 0 \end{aligned}$$

$c < 0$ 이고 $\frac{1}{\alpha} < 0 < \frac{1}{\beta}$ 이므로 구하는 해는 $x < \frac{1}{\alpha}$ 또는 $x > \frac{1}{\beta}$

44. 이차방정식 $x^2+(a-b)x+ab=1$이 a의 어떤 실수값에 대해서도 항상 실근을 갖도록 b의 범위를 정하면?

① $-\frac{\sqrt{2}}{2} \le b \le \frac{\sqrt{2}}{2}$　　② $b \le -\frac{\sqrt{2}}{2},\ b \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$

③ $-\frac{\sqrt{2}}{3} \le b \le \frac{\sqrt{2}}{3}$　　④ $b \le -\frac{\sqrt{2}}{3},\ b \ge \frac{\sqrt{2}}{3}$

⑤ $b \le -2,\ b \ge 2$

해설

$x^2+(a-b)x+ab-1=0$에서

$D=(a-b)^2-4(ab-1) \ge 0$

이 식을 a에 관해서 정리하면, $a^2-6ba+b^2+4 \ge 0$이

부등식이 a에 관계없이 항상 성립하기 위한 조건은 $\frac{D'}{4} \le 0$

이므로

$\frac{D'}{4}=(3b)^2-(b^2+4) \le 0$

$\therefore\ 2b^2-1 \le 0$에서

$(\sqrt{2}b+1)(\sqrt{2}b-1) \le 0$

$-\frac{1}{\sqrt{2}} \le b \le \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \le b \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

45. 연립부등식 $\begin{cases} x^3-2x^2+x-2 \geq 0 \\ x^2-x-6<0 \end{cases}$ 의 해는?

① $-2 \leq x < 3$ ② $-2 < x < 3$ ③ $2 \leq x < 3$
④ $2 < x \leq 3$ ⑤ $2 \leq x \leq 3$

해설

$x^2-2x+x-2 \geq 0$ 에서
$x^2(x-2)+(x-2) \geq 0$
$\therefore (x-2)(x^2+1) \geq 0$
$x^2+1>0$ 이므로 $x-2 \geq 0$
$\therefore x \geq 2 \cdots$ ㈎
$x^2-x-6<0$ 에서 $(x-3)(x+2)<0$
$\therefore -2<x<3 \cdots$ ㈏
따라서 ㈎, ㈏의 공통 범위를 구하면
$2 \leq x < 3$ 이다.

46. 두 수 $a,\ b$ 가 $a \geq b$ 일 때, $M(a,\ b) = a$, $m(a,\ b) = b$ 로 정의한다. 이때 부등식 $M(x-4,\ 2) - m(3,\ x-1) \leq 1$ 을 만족하는 자연수 x 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 7 개

해설

1) $x-1 \leq 3$, 즉 $x \leq 4$ 이면 구하는 식은
$2-(x-1) \leq 1,\ x \geq 2 \qquad \therefore\ 2 \leq x \leq 4$
2) $x-1 > 3,\ x-4 \leq 2$, 즉 $4 < x \leq 6$ 이면 구하는 식은
$2-3 \leq 1\ ,\ -1 \leq 1 \qquad \therefore\ 4 < x \leq 6$
3) $x-4 > 2$, 즉 $x > 6$ 이면 구하는 식은
$x-4-3 \leq 1,\ x \leq 8 \qquad \therefore\ 6 < x \leq 8$
1), 2), 3) 에 의하여 구하는 부등식의 해 $2 \leq x \leq 8$ 를 만족하는 자연수 x 는
$x = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$ 의 7 개

47. 가위로 어떤 볼록사각형의 대각선을 따라 잘랐더니 세 변의 길이가 각각 4, 5, y 인 삼각형 A 와 12, y, x 인 삼각형 B 가 만들어졌다. 삼각형 A 의 변의 길이 중 y 가 가장 길고, 삼각형 B 의 변의 길이 중 y 가 가장 짧을 때, x 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $3 < x < 21$

해설

삼각형 A 에서 $y < 4 + 5$, 즉 $y < 9$
삼각형 B 에서
1) x 가 가장 긴 변인 경우 : $x < y + 12$
   그런데 $y < 9$ 이므로 $x < y + 12 < 9 + 12$
   $\therefore\ x < 21$
2) 12 가 가장 긴 변인 경우 : $12 < x + y$
   그런데 $y < 9$ 이므로 $12 < x + y < x + 9$
   $\therefore\ x > 3$
따라서 1), 2) 에 의해서 $3 < x < 21$ 이다.

48. $[x]=1,\ [y]=2,\ [z]=-1$ 일 때 $[x+2y-z]$의 최대값과 최소값의 합은?
(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

① 12　② 13　③ 14　④ 15　⑤ 16

해설

$[x]=1,\ [y]=2,\ [z]=-1$ 에서
$1 \le x < 2,\ 2 \le y < 3,\ -1 \le z < 0$

$$\begin{array}{rl} & 1 \le x < 2 \\ & 4 \le 2y < 6 \\ +) & 0 < -z \le 1 \\ \hline & 5 < x+2y-z < 9 \end{array}$$

$\therefore\ [x+2y-z]=5,\ 6,\ 7,\ 8$
최대값과 최소값의 합은 $5+8=13$

49. 이차방정식 $x^2 + 2ax + b = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, 이차부등식 $(4a + b + 4)x^2 + 2(a + 2)x + 1 < 0$을 풀면? (단, $\alpha > \beta > 2$)

① $\frac{1}{\beta - 2} < x < \frac{1}{\alpha - 2}$

② $\frac{1}{\alpha - 2} < x < \frac{1}{\beta - 2}$

③ $x < \alpha - 2,\ x > \beta - 2$

④ $x < \beta - 2,\ x > \alpha - 2$

⑤ $\beta - 2 < x < \alpha - 2$

해설

근과 계수와의 관계로부터 $\alpha + \beta = -2a,\ \alpha\beta = b$이므로
$4a + b + 4 = -2(\alpha + \beta) + \alpha\beta + 4 = (\alpha - 2)(\beta - 2)$,
$2(a + 2) = 2a + 4 = -(\alpha + \beta) + 4 = -(\alpha + \beta - 4)$
따라서, 주어진 이차부등식은
$(\alpha - 2)(\beta - 2)x^2 - (\alpha + \beta - 4)x + 1 < 0$
$\therefore\ \{(\alpha - 2)x - 1\}\{(\beta - 2)x - 1\} < 0$
$\alpha > \beta > 2$이므로 $\frac{1}{\alpha - 2} < x < \frac{1}{\beta - 2}$

50. 연립부등식 $\begin{cases} x^2+ax+b<0 \\ x^3+x \geq 0 \end{cases}$ 의 해가

$0 \leq x < 2$이고 실수 a, b가 $|a|+|b|=3$을 만족할 때, a, b의 값에 대하여 $2a+b$의 값을 구하며?

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

해설

$x^3+x=x(x^2+1) \geq 0$ 에서
$x^2+1>0$ 이므로 $x \geq 0$

따라서 연립부등식 $\begin{cases} x^2+ax+b<0 \cdots ① \\ x \geq 0 \cdots ② \end{cases}$ 의 해가

$0 \leq x < 2$ 이기 위해서는 부등식 ①의 해가
$a<x<2(a<0)$ 이어야 한다.
따라서, $x^2+ax+b=(x-a)(x-2)=x^2-(a+2)x+2a$

$\therefore \begin{cases} a=-a-2 \\ b=2a \end{cases} \cdots ③$

$|a|+|b|=3$ 이므로,
$|-a-2|+|2a|=3$
i) $a<-2$ 일 때,
$-a-2-2a=3$
$\therefore a=-\frac{5}{3}$
그러나 $a<-2$ 이므로 부적당
ii) $-2 \leq a < 0$ 일 때,
$a+2-2a=3$
$\therefore a=-1$
③에서 $a=-1, b=-2$
$\therefore 2a+b=-4$