**1.** 이차함수 $y = x^2 - 6x - 10$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-19$

해설

$y = x^2 - 6x - 10 = (x - 3)^2 - 19$
$x = 3$ 일 때, 최솟값은 $-19$ 이다.

**2.** $y=-\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x=-3$ 에서 최댓값 5 를 갖는 포물선의 식의 $y$ 절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y=-\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x=-3$ 에서 최댓값 5 를 갖는 포물선의 식은 $y=-\frac{1}{3}(x+3)^2+5$ 이다. $y=-\frac{1}{3}(x+3)^2+5=-\frac{1}{3}x^2-2x+2$

따라서 $y$ 의 절편은 2 이다.

**3.** 다음 삼차방정식을 풀었을 때 두 허근의 합을 구하여라.

$$x^3 - x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-1$

해설

$f(x) = x^3 - x^2 + x - 6$ 으로 놓으면 $f(2) = 8 - 4 + 2 - 6 = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x - 2$ 를 인수로 갖는다.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -1 & 1 & -6 \\ & & 2 & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

위의 조립제법에서 $f(x) = (x-2)(x^2+x+3)$ 이므로 주어진 방정식은$(x-2)(x^2+x+3) = 0$

$\therefore x = 2\ ,\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{11}i}{2}$

두 허근의 합은 $-1$

**4.** 복소수 전체의 집합에서 두 복소수 $\alpha$, $\beta$ 에 대하여 연산 $\circledcirc$을 $\alpha \circledcirc \beta = (\alpha+i)(\beta+i)$ 로 정의할 때, 등식 $(2+i) \circledcirc z = 1$ 을 만족하는 복소수 $z$ 는?

① $-\frac{1}{4}-\frac{5}{4}i$　② $-i$　③ $i$
④ $1+i$　⑤ $\frac{1}{4}-\frac{5}{4}i$

해설

$$\begin{aligned}(2+i) \circledcirc z &= \{(2+i)+i\}(z+i) \\ &= (2+2i)(z+i) = 1\end{aligned}$$

$z+i = \frac{1}{2+2i}$ 이므로

$$\begin{aligned}z &= \frac{1}{2+2i} - i \\ &= \frac{(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} - i \\ &= \frac{2-2i-8i}{8} = \frac{1}{4}-\frac{5}{4}i\end{aligned}$$

**5.** $x, y, z$가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

| |
|---|
| $4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$ |

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$
$= -(x^2 - 4x) - y^2 - z^2 + 5$
$= -(x-2)^2 - y^2 - z^2 + 9$
$x,\ y,\ z$는 실수이므로
$(x-2)^2 \geq 0,\ y^2 \geq 0,\ z^2 \geq 0$
따라서 $4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$ 는
$x - 2 = 0,\ y = 0,\ z = 0$일 때,
최댓값 9를 갖는다.

**6.** 두 실수 $x, y$가 $x^2 + y^2 + 4x + y - 2 = 0$을 만족시킬 때, $y$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $-1$

해설

$x^2 + 4x + (y^2 + y - 2) = 0$에서 $x$가 실수이므로

$\frac{D}{4} = 4 - y^2 - y + 2 \geq 0$

$(y + 3)(y - 2) \leq 0$

$\therefore -3 \leq y \leq 2$

따라서 $y$의 최댓값은 2, 최솟값은 $-3$이다.

**7.** 사차방정식 $2x^4+7x^2-4=0$의 두 허근을 $\alpha$, $\beta$라 할 때, $\dfrac{\beta}{\alpha}$의 값은?

① $1+i$ ② $i$ ③ $0$ ④ $-1$ ⑤ $24$

**해설**

$2x^4+7x^2-4=0$에서 $x^2=t$라 하면
$2t^2+7t-4=0$, $(2t-1)(t+4)=0$

$\therefore\ t=\dfrac{1}{2}$ 또는 $t=-4$

$\therefore\ x=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ 또는 $x=\pm 2i$

이 때, $\alpha$, $\beta$는 허근이므로
$\alpha=2i$, $\beta=-2i$ 또는 $\alpha=-2i$, $\beta=2i$

$\therefore\ \dfrac{\beta}{\alpha}=-1$

**8.** $x$의 삼차방정식 $x^3 + px^2 + qx - 105 = 0$의 세 근이 모두 2보다 큰 정수일 때, $p+q$의 값을 구하면?

① 56 ② 21 ③ 10 ④ −10 ⑤ −21

해설

세 근을 $\alpha$ , $\beta$ , $\gamma$ 라 하면 근과 계수와의 관계에 의해서
$\alpha+\beta+\gamma=-p,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q,\ \alpha\beta\gamma=105$
마지막 식에서 $\alpha\beta\gamma=3\cdot5\cdot7$
$\therefore$ 세 근은 3, 5, 7 이다.
$\therefore\ p=-(3+5+7)=-15,$
$q=3\cdot5+5\cdot7+7\cdot3=15+35+21=71$
$\therefore\ p+q=56$

**9.** 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+2x=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2+x+y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 을 풀면 $x=\alpha,\ y=\beta$ 또는 $x=\gamma,\ y=\delta$ 이다. 이 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

인수분해되는 식은 없으나 이차항을 소거할 수 있다.

㉠ − ㉡에서 $x-y=-2$, 즉 $y=x+2$

㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+3x+2=0$

$(x+1)(x+2)=0$

$\therefore\ x=-1,\ -2$

$\therefore\ x=-1,\ y=1$ 또는 $x=-2,\ y=0$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=6$

**10.** 유리수 $a,\ b,\ c,\ d$에 대하여 $(\sqrt{2}+i)^4+a(\sqrt{2}+i)^3+b(\sqrt{2}+i)^2+c(\sqrt{2}+i)+d=0$을 만족한다. 이 때, $a-b-c-d$의 값은? (단, $i^2=-1$ )

① $-7$　　② $3$　　③ $1$　　④ $-1$

해설

$(\sqrt{2}+i)^4=-7+4\sqrt{2}i$ , $(\sqrt{2}+i)^3=-\sqrt{2}+5i$,
$(\sqrt{2}+i)^2=1+2\sqrt{2}i$
$(-7+4\sqrt{2}i)+a(-\sqrt{2}+5i)$
$+b(1+2\sqrt{2}i)+c(\sqrt{2}+i)+d=0$
$(-7-\sqrt{2}a+b+\sqrt{2}c+d)$
$+(4\sqrt{2}+5a+2\sqrt{2}b+c)i=0$
$\therefore\ (-7+b+d)+(c-a)\sqrt{2}=0,$
$(5a+c)+(4+2b)\sqrt{2}=0$
$a,\ b,\ c,\ d$ 는 유리수이므로 $-7+b+d=0$ :
$c-a=0,\ 5a+c=0,\ 4+2b=0$
$\therefore\ a=0,\ b=-2,\ c=0,\ d=9$
$\therefore\ a-b-c-d=-7$

**11.** $\alpha = a + bi$ ($a$, $b$는 실수, $i = \sqrt{-1}$) 일 때, $\alpha^t = b + ai$라 한다. $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ 일 때, $2\alpha^5(\alpha^t)^4$을 간단히 하면?

① $1+i$　　② $1-i$　　③ $2+i$
④ $2-i$　　⑤ $\sqrt{3}+i$

해설

$\alpha = a+bi,\ \alpha^t = b+ai$이므로
$\alpha\alpha^t = (a+bi)(b+ai) = (a^2+b^2)i$
그런데 $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = a+bi$에서
$a = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ b = \dfrac{1}{2}$　　$\therefore\ \alpha\alpha^t = \left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\right)i = i$
$\therefore$ (준식)$= 2\alpha(\alpha\cdot\alpha^t)^4 = 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\cdot i^4 = \sqrt{3}+i$

**12.** $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{10}+\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{8}$ 값을 구하면?

① $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ③ 1
④ 0 ⑤ -1

해설

$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ , $2\omega+1=\sqrt{3}i$
양변을 제곱해서 정리하면 $\omega^2+\omega+1=0$
$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0 \Rightarrow \omega^3=1$
$(\omega^3)^3\cdot\omega+(\omega^3)^2\cdot\omega^2=\omega+\omega^2=-1$

**13.** $a^2-3a+1=0$일 때, $a^2-2a+\dfrac{3}{a^2+1}$의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

$a^2-3a+1=0$에서

$a^2-2a+\dfrac{3}{a^2+1}=a-1+\dfrac{3}{3a}=a+\dfrac{1}{a}-1$

한편, $a^2-3a+1=0$의 양변을 $a$로 나누면

$a-3+\dfrac{1}{a}=0 \quad \therefore a+\dfrac{1}{a}=3$

$\therefore$(준식)$=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)-1=2$

**14.** 방정식 $\left\{1+(a+b)^2\right\}x^2-2(1-a-b)x+2=0$의 근이 실수일 때 $a^3+b^3-3ab$의 값을 구하면 ? (단, $a,\ b$는 실수)

① 1　　② $-1$　　③ 2　　④ $-2$　　⑤ 0

해설

$\frac{D}{4}=(1-a-b)^2-\left\{1+(a+b)^2\right\}\cdot 2\geq 0$

$-(a+b)^2-2(a+b)-1\geq 0$

양변에 $-1$을 곱하면

$(a+b)^2+2(a+b)+1\leq 0$

$\{(a+b)+1\}^2\leq 0$

그런데 $a,\ b$가 실수이므로 $a+b+1=0$

$\therefore\ a+b=-1$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^3+b^3-3ab &= (a+b)^3-3ab(a+b)-3ab\\ &= (-1)^3-3ab(-1)-3ab\\ &= -1\end{aligned}$$

**15.** 방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근을 $\alpha, \beta$라 할 때, $(\alpha^2+5\alpha+1)(\beta^2-4\beta+1)$의 값은?

① $-2$　　② $-4$　　③ $-8$　　④ $-14$　　⑤ $-17$

해설

방정식 $x^2+3x+1=0$의 근이 $\alpha,\ \beta$이므로
$\alpha^2+3\alpha+1=0,\ \beta^2+3\beta+1=0$
$\alpha^2+1=-3\alpha,\ \beta^2+1=-3\beta$
$\therefore\ (\alpha^2+5\alpha+1)(\beta^2-4\beta+1)$
$=(-3\alpha+5\alpha)(-3\beta-4\beta)$
$=-14\alpha\beta$
근과 계수와의 관계에서 $\alpha\beta=1$이므로
(주어진 식)$=-14$

**16.** 실계수 이차방정식이 두 허근 $\alpha, \beta$를 갖고 $\alpha^2 + 2\beta = 1$일 때, 이 이차방정식은?

① $x^2 + 2x + 3 = 0$　② $x^2 + 4x + 6 = 0$　③ $x^2 - 2x + 3 = 0$　④ $x^2 - 4x + 6 = 0$　⑤ $x^2 - 3x + 2 = 0$

해설

$\alpha = m + ni,\ \beta = m - ni$
$(m,\ n\ :\ $실수$,\ n \neq 0)$라 놓으면
$\alpha^2 + 2\beta = (m + ni)^2 + 2(m - ni)$
$\quad = (m^2 - n^2 + 2m) + 2n(m - 1)i = 1$에서
$n \neq 0$이므로 $m = 1,\ n^2 = 2$
$\alpha + \beta = 2m = 2$
$\alpha\beta = m^2 + n^2 = 3$
$\therefore\ \alpha,\ \beta$를 두 근으로 갖는 이차방정식은
$x^2 - 2x + 3 = 0$

**17.** $-1 \le x \le 2$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 + 2ax + 1$ 의 최소값이 $-8$ 일 때, 모든 실수 $a$ 의 값의 합은?

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{3}{4}$　③ $\frac{5}{4}$　④ $\frac{7}{4}$　⑤ $\frac{9}{4}$

해설

$f(x) = x^2 + 2ax + 1 = (x+a)^2 + 1 - a^2$ 에서 꼭지점의 $x$ 좌표는 $-a$ 이다.

( i ) $-a < -1$ , 즉 $a > 1$ 일 때, $-1 \le x \le 2$ 에서
$f(x)$ 의 최솟값은 $f(-1) = 2 - 2a = -8$
$\therefore\ a = 5$

( ii ) $-1 \le -a < 2$ , 즉 $-2 < a \le 1$ 일 때, $-1 \le x \le 2$ 에서
$f(x)$ 의 최솟값은 $f(-a) = 1 - a^2 = -8,\ a^2 = 9$
$\therefore\ a = \pm 3$
$-2 < a \le 1$ 이므로 $a$ 의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $-a \ge 2$ , 즉 $a \le -2$ 일 때, $-1 \le x \le 2$ 에서
$f(x)$ 의 최솟값은 $f(2) = 5 + 4a = -8$
$\therefore\ a = -\frac{13}{4}$

따라서 모든 실수 $a$ 의 값의 합은 $5 + \left(-\frac{13}{4}\right) = \frac{7}{4}$

**18.** 가을 전어철을 맞아 전어의 어획량은 매일 현재 어획량의 10% 씩 늘어나고, 마리당 판매 가격은 매일 현재 가격의 5% 씩 줄어들고 있다. 며칠 후에 전어를 한꺼번에 팔아야 최대의 수입을 얻을 수 있는지 구하여라.

▶ 답 : ______ 일

▷ 정답 : 5 일

해설

현재의 전어의 양과 가격을 각각 $m$마리, $p$ 원 라고 할 때, $x$ 일 후의 전어의 양과 가격은 각각

$m\left(1+\frac{1}{10}x\right)$마리, $p\left(1-\frac{1}{20}x\right)$ 원 이다.

이때, $x$ 일 후의 수입을 $y$ 원이라고 하면

$$\begin{aligned} y &= mp\left(1+\frac{1}{10}x\right)\left(1-\frac{1}{20}x\right) \\ &= mp\left(1+\frac{1}{20}x-\frac{1}{200}x^2\right) \\ &= -\frac{mp}{200}(x^2-10x-200) \\ &= -\frac{mp}{200}(x-5)^2+\frac{9}{8}mp \end{aligned}$$

따라서 $x = 5$ 일 때, $y$ 는 최댓값을 가지므로 5 일 후에 팔면 최대의 수입을 얻을 수 있다.

**19.** 연립방정식 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3, \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=3, \frac{1}{xyz}=1$을 풀면 해는 $x=a,\ y=b,\ z=c$이다. 이 때, $a+b+c$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

**해설**

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3,$

$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=3,$

$\frac{1}{xyz}=1$

이것은 $\frac{1}{x},\ \frac{1}{y},\ \frac{1}{z}$을 세 근으로 하는

3차방정식의 근과 계수와의 관계이다.

만족하는 3차방정식은

$\alpha^3-3\alpha^2+3\alpha-1=0,$

$(\alpha-1)^3=0,\ \alpha=1,$

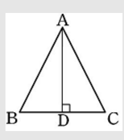
즉 $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}=\frac{1}{z}=1,\ x=y=z=1$

$\therefore\ a+b+c=3$

**20.** $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}}$인 이등변삼각형 ABC의 꼭지점 A에서 변 BC에 그은 수선의 발을 D라 하자. 삼각형 ABC의 둘레의 길이는 높이 AD의 길이의 4배이다. 이 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BD}}}$의 값은?

① $\dfrac{4}{3}$  ② $\dfrac{5}{3}$  ③ 2
④ $\dfrac{1+\sqrt{17}}{3}$  ⑤ $\dfrac{1+\sqrt{9}}{3}$

해설




$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}} = a$, $\overline{\mathrm{BC}} = 2b$, $\overline{\mathrm{AD}} = h$라 놓으면

$2a + 2b = 4h \cdots\cdots$ ( i )

$a^2 = b^2 + h^2 \cdots\cdots$ ( ii )

( i )에서 $h = \dfrac{a+b}{2}$를 (ii)에 대입하여 정리하면

$3a^2 - 2ab - 5b^2 = 0 \ \cdots\cdots$ (iii)

(iii) 식의 양변을 $b^2$으로 나누고

$\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BD}}} = \dfrac{a}{b} = x$라 놓으면

$3x^2 - 2x - 5 = 0$

$\therefore (x+1)(3x-5) = 0$

$\therefore x = \dfrac{5}{3} (\because x > 0)$