1. 이차함수 $y = x^2 - 6x - 10$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -19

해설

$y = x^2 - 6x - 10 = (x-3)^2 - 19$

$x = 3$ 일 때, 최솟값은 -19 이다.

2. $y=-\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x=-3$ 에서 최댓값 5 를 갖는 포물선의 식의 y 절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y=-\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x=-3$ 에서 최댓값 5 를 갖는 포물선의 식은 $y=-\frac{1}{3}(x+3)^2+5$ 이다. $y=-\frac{1}{3}(x+3)^2+5=-\frac{1}{3}x^2-2x+2$

따라서 y 의 절편은 2 이다.

3. 다음 삼차방정식을 풀었을 때 두 허근의 합을 구하여라.

$$x^3 - x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$f(x) = x^3 - x^2 + x - 6$ 으로 놓으면 $f(2) = 8 - 4 + 2 - 6 = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x - 2$ 를 인수로 갖는다.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -1 & 1 & -6 \\ & & 2 & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

위의 조립제법에서 $f(x) = (x - 2)(x^2 + x + 3)$ 이므로 주어진 방정식은$(x - 2)(x^2 + x + 3) = 0$

$\therefore x = 2$, $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{11}i}{2}$

두 허근의 합은 -1

4. 복소수 전체의 집합에서 두 복소수 α, β 에 대하여 연산 ◎을 $\alpha ◎ \beta = (\alpha+i)(\beta+i)$ 로 정의할 때, 등식 $(2+i) ◎ z = 1$ 을 만족하는 복소수 z 는?

① $-\frac{1}{4}-\frac{5}{4}i$ ② $-i$ ③ i

④ $1+i$ ⑤ $\frac{1}{4}-\frac{5}{4}i$

해설

$$(2+i) ◎ z = \{(2+i)+i\}(z+i)$$
$$= (2+2i)(z+i) = 1$$

$z+i = \frac{1}{2+2i}$ 이므로

$$z = \frac{1}{2+2i} - i$$
$$= \frac{(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} - i$$
$$= \frac{2-2i-8i}{8} = \frac{1}{4} - \frac{5}{4}i$$

5. x, y, z가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$

$= -(x^2 - 4x) - y^2 - z^2 + 5$

$= -(x-2)^2 - y^2 - z^2 + 9$

$x,\ y,\ z$는 실수이므로

$(x-2)^2 \geq 0,\ y^2 \geq 0,\ z^2 \geq 0$

따라서 $4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$ 는

$x - 2 = 0,\ y = 0,\ z = 0$일 때,

최댓값 9를 갖는다.

6. 두 실수 x, y가 $x^2+y^2+4x+y-2=0$을 만족시킬 때, y의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2+4x+(y^2+y-2)=0$에서 x가 실수이므로

$$\frac{D}{4}=4-y^2-y+2\geq 0$$

$(y+3)(y-2)\leq 0$

$\therefore -3\leq y\leq 2$

따라서 y의 최댓값은 2, 최솟값은 -3이다.

7. 사차방정식 $2x^4+7x^2-4=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\dfrac{\beta}{\alpha}$의 값은?

① $1+i$ ② i ③ 0 ④ -1 ⑤ 24

해설

$2x^4+7x^2-4=0$에서 $x^2=t$라 하면

$2t^2+7t-4=0$, $(2t-1)(t+4)=0$

$\therefore\ t=\dfrac{1}{2}$ 또는 $t=-4$

$\therefore\ x=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ 또는 $x=\pm 2i$

이 때, α, β는 허근이므로

$\alpha=2i$, $\beta=-2i$ 또는 $\alpha=-2i$, $\beta=2i$

$\therefore\ \dfrac{\beta}{\alpha}=-1$

8. x의 삼차방정식 $x^3 + px^2 + qx - 105 = 0$의 세 근이 모두 2보다 큰 정수일 때, $p+q$의 값을 구하면?

① 56 ② 21 ③ 10 ④ -10 ⑤ -21

해설

세 근을 α , β , γ 라 하면 근과 계수와의 관계에 의해서

$\alpha+\beta+\gamma=-p$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q$, $\alpha\beta\gamma=105$

마지막 식에서 $\alpha\beta\gamma=3\cdot5\cdot7$

$\therefore$ 세 근은 3, 5, 7 이다.

$\therefore\ p=-(3+5+7)=-15$,

$q=3\cdot5+5\cdot7+7\cdot3=15+35+21=71$

$\therefore\ p+q=56$

9. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+2x=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2+x+y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 을 풀면 $x=\alpha,\ y=\beta$ 또는 $x=\gamma,\ y=\delta$ 이다. 이 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 6

해설

인수분해되는 식은 없으나 이차항을 소거할 수 있다.

㉠ − ㉡에서 $x-y=-2$, 즉 $y=x+2$

㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+3x+2=0$

$(x+1)(x+2)=0$

$\therefore\ x=-1,\ -2$

$\therefore\ x=-1,\ y=1$ 또는 $x=-2,\ y=0$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=6$

10. 유리수 $a,\ b,\ c,\ d$에 대하여 $(\sqrt{2}+i)^4+a(\sqrt{2}+i)^3+b(\sqrt{2}+i)^2+c(\sqrt{2}+i)+d=0$을 만족한다. 이 때, $a-b-c-d$의 값은? (단, $i^2=-1$)

① -7　　② 3　　③ 1　　④ -1

해설

$(\sqrt{2}+i)^4=-7+4\sqrt{2}i$, $(\sqrt{2}+i)^3=-\sqrt{2}+5i,$
$(\sqrt{2}+i)^2=1+2\sqrt{2}i$
$(-7+4\sqrt{2}i)+a(-\sqrt{2}+5i)$
$+b(1+2\sqrt{2}i)+c(\sqrt{2}+i)+d=0$
$(-7-\sqrt{2}a+b+\sqrt{2}c+d)$
$+(4\sqrt{2}+5a+2\sqrt{2}b+c)i=0$
$\therefore\ (-7+b+d)+(c-a)\sqrt{2}=0,$
$(5a+c)+(4+2b)\sqrt{2}=0$
$a,\ b,\ c,\ d$ 는 유리수이므로 $-7+b+d=0$:
$c-a=0,\ 5a+c=0,\ 4+2b=0$
$\therefore\ a=0,\ b=-2,\ c=0,\ d=9$
$\therefore\ a-b-c-d=-7$

11. $\alpha = a + bi$ (a, b는 실수, $i = \sqrt{-1}$) 일 때, $\alpha^t = b + ai$라 한다. $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ 일 때, $2\alpha^5(\alpha^t)^4$을 간단히 하면?

① $1+i$ ② $1-i$ ③ $2+i$

④ $2-i$ ⑤ $\sqrt{3}+i$

해설

$\alpha = a + bi,\ \alpha^t = b + ai$이므로

$\alpha\alpha^t = (a+bi)(b+ai) = (a^2+b^2)i$

그런데 $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = a + bi$에서

$a = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ b = \dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore\ \alpha\alpha^t = \left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\right)i = i$

$\therefore$ (준식)$= 2\alpha(\alpha \cdot \alpha^t)^4 = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}+i}{2} \cdot i^4 = \sqrt{3}+i$

12. $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{10}+\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{8}$ 값을 구하면?

① $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ③ 1

④ 0 ⑤ -1

해설

$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $2\omega+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\omega^2+\omega+1=0$

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0 \Rightarrow \omega^3=1$

$(\omega^3)^3\cdot\omega+(\omega^3)^2\cdot\omega^2=\omega+\omega^2=-1$

13. $a^2-3a+1=0$일 때, $a^2-2a+\dfrac{3}{a^2+1}$의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

$a^2-3a+1=0$에서

$$a^2-2a+\frac{3}{a^2+1}=a-1+\frac{3}{3a}=a+\frac{1}{a}-1$$

한편, $a^2-3a+1=0$의 양변을 a로 나누면

$$a-3+\frac{1}{a}=0 \quad \therefore\ a+\frac{1}{a}=3$$

$$\therefore(\text{준식})=\left(a+\frac{1}{a}\right)-1=2$$

14. 방정식 $\left\{1+(a+b)^2\right\}x^2-2(1-a-b)x+2=0$의 근이 실수일 때 a^3+b^3-3ab의 값을 구하면 ? (단, a, b는 실수)

① 1　　② -1　　③ 2　　④ -2　　⑤ 0

해설

$$\frac{D}{4}=(1-a-b)^2-\left\{1+(a+b)^2\right\}\cdot 2\geq 0$$

$$-(a+b)^2-2(a+b)-1\geq 0$$

양변에 -1을 곱하면

$$(a+b)^2+2(a+b)+1\leq 0$$

$$\{(a+b)+1\}^2\leq 0$$

그런데 a, b가 실수이므로 $a+b+1=0$

$$\therefore\ a+b=-1$$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^3+b^3-3ab&=(a+b)^3-3ab(a+b)-3ab\\&=(-1)^3-3ab(-1)-3ab\\&=-1\end{aligned}$$

15. 방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(\alpha^2+5\alpha+1)(\beta^2-4\beta+1)$의 값은?

① -2 ② -4 ③ -8 ④ -14 ⑤ -17

해설

방정식 $x^2+3x+1=0$의 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$\alpha^2+3\alpha+1=0,\ \beta^2+3\beta+1=0$

$\alpha^2+1=-3\alpha,\ \beta^2+1=-3\beta$

$\therefore\ (\alpha^2+5\alpha+1)(\beta^2-4\beta+1)$

$=(-3\alpha+5\alpha)(-3\beta-4\beta)$

$=-14\alpha\beta$

근과 계수와의 관계에서 $\alpha\beta=1$이므로

(주어진 식)$=-14$

16. 실계수 이차방정식이 두 허근 α, β를 갖고 $\alpha^2 + 2\beta = 1$일 때, 이 이차방정식은?

① $x^2 + 2x + 3 = 0$

② $x^2 + 4x + 6 = 0$

③ $x^2 - 2x + 3 = 0$

④ $x^2 - 4x + 6 = 0$

⑤ $x^2 - 3x + 2 = 0$

해설

$\alpha = m + ni,\ \beta = m - ni$

$(m,\ n\ :\ $ 실수, $n \neq 0)$라 놓으면

$$\begin{aligned}\alpha^2 + 2\beta &= (m + ni)^2 + 2(m - ni)\\ &= (m^2 - n^2 + 2m) + 2n(m - 1)i = 1\end{aligned}$$에서

$n \neq 0$이므로 $m = 1,\ n^2 = 2$

$\alpha + \beta = 2m = 2$

$\alpha\beta = m^2 + n^2 = 3$

$\therefore\ \alpha,\ \beta$를 두 근으로 갖는 이차방정식은

$x^2 - 2x + 3 = 0$

17. $-1 \le x \le 2$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 + 2ax + 1$ 의 최소값이 -8 일 때, 모든 실수 a 의 값의 합은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

해설

$f(x) = x^2 + 2ax + 1 = (x+a)^2 + 1 - a^2$ 에서 꼭지점의 x 좌표는 $-a$ 이다.

(i) $-a < -1$, 즉 $a > 1$ 일 때, $-1 \le x \le 2$ 에서

$f(x)$ 의 최솟값은 $f(-1) = 2 - 2a = -8$

$\therefore\ a = 5$

(ii) $-1 \le -a < 2$, 즉 $-2 < a \le 1$ 일 때, $-1 \le x \le 2$ 에서

$f(x)$ 의 최솟값은 $f(-a) = 1 - a^2 = -8,\ a^2 = 9$

$\therefore\ a = \pm 3$

$-2 < a \le 1$ 이므로 a 의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $-a \ge 2$, 즉 $a \le -2$ 일 때, $-1 \le x \le 2$ 에서

$f(x)$ 의 최솟값은 $f(2) = 5 + 4a = -8$

$\therefore\ a = -\frac{13}{4}$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 $5 + \left(-\frac{13}{4}\right) = \frac{7}{4}$

18. 가을 전어철을 맞아 전어의 어획량은 매일 현재 어획량의 10% 씩 늘어나고, 마리당 판매 가격은 매일 현재 가격의 5% 씩 줄어들고 있다. 며칠 후에 전어를 한꺼번에 팔아야 최대의 수입을 얻을 수 있는지 구하여라.

▶ 답 : ______ 일

▷ 정답 : 5 일

해설

현재의 전어의 양과 가격을 각각 m마리, p원 라고 할 때, x 일 후의 전어의 양과 가격은 각각

$m\left(1+\frac{1}{10}x\right)$마리, $p\left(1-\frac{1}{20}x\right)$ 원 이다.

이때, x 일 후의 수입을 y 원이라고 하면

$$\begin{aligned} y &= mp\left(1+\frac{1}{10}x\right)\left(1-\frac{1}{20}x\right) \\ &= mp\left(1+\frac{1}{20}x-\frac{1}{200}x^2\right) \\ &= -\frac{mp}{200}(x^2-10x-200) \\ &= -\frac{mp}{200}(x-5)^2+\frac{9}{8}mp \end{aligned}$$

따라서 $x=5$ 일 때, y 는 최댓값을 가지므로 5 일 후에 팔면 최대의 수입을 얻을 수 있다.

19. 연립방정식 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3, \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=3, \frac{1}{xyz}=1$을 풀면 해는 $x=a,\ y=b,\ z=c$이다. 이 때, $a+b+c$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3,$$

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=3,$$

$$\frac{1}{xyz}=1$$

이것은 $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$을 세 근으로 하는

3차방정식의 근과 계수와의 관계이다.

만족하는 3차방정식은

$\alpha^3-3\alpha^2+3\alpha-1=0,$

$(\alpha-1)^3=0,\ \alpha=1,$

즉 $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}=\frac{1}{z}=1,\ x=y=z=1$

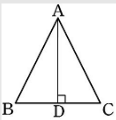
$\therefore\ a+b+c=3$

20. $\overline{AB}=\overline{AC}$ 인 이등변삼각형 ABC의 꼭지점 A에서 변 BC에 그은 수선의 발을 D라 하자. 삼각형 ABC의 둘레의 길이는 높이 AD의 길이의 4배이다. 이 때, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$ 의 값은?

① $\dfrac{4}{3}$ ② $\dfrac{5}{3}$ ③ 2

④ $\dfrac{1+\sqrt{17}}{3}$ ⑤ $\dfrac{1+\sqrt{9}}{3}$

해설



$\overline{AB}=\overline{AC}=a,\quad \overline{BC}=2b,\quad \overline{AD}=h$라 놓으면

$2a+2b=4h\cdots\cdots(\text{i})$

$a^2=b^2+h^2\cdots\cdots(\text{ii})$

(i)에서 $h=\dfrac{a+b}{2}$를 (ii)에 대입하여 정리하면

$3a^2-2ab-5b^2=0\ \cdots\cdots(\text{iii})$

(iii) 식의 양변을 b^2 으로 나누고

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}}=\dfrac{a}{b}=x$라 놓으면

$3x^2-2x-5=0$

$\therefore\ (x+1)(3x-5)=0$

$\therefore\ x=\dfrac{5}{3}(\because\ x>0)$