1. a, b가 실수일 때, $(a+2i)(3+4i)+5(1-bi)=0$을 만족하는 a, b의 값의 합은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(a+2i)(3+4i)+5(1-bi)=0$에서

$(3a-3)+(4a-5b+6)i=0$

a, b가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $3a-3=0$, $4a-5b+6=0$

$\therefore\ a=1,\ b=2$

따라서 $a+b=3$ 이다.

2. $x = 2009$, $y = 7440$ 일 때, $\dfrac{x+yi}{y-xi} + \dfrac{y-xi}{x+yi}$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ -1 ④ i ⑤ $-i$

해설

주어진 식을 정리하면

$$\frac{x+yi}{y-xi} + \frac{y-xi}{x+yi}$$

$$= \frac{(x+yi)^2 + (y-xi)^2}{(y-xi)(x+yi)}$$

$$= \frac{x^2 + 2xyi - y^2 + y^2 - 2xyi - x^2}{xy + y^2 i - x^2 i + xy} = 0$$

따라서 구하는 값은 0

3. 복소수 $z = 1 - i$ 라고 할 때, $wz + 1 = \overline{w}$ 를 만족하는 복소수 w 의 실수부분을 구하면? (단, $\overline{w}$ 는 w 의 켤레복소수이다.)

① -2 ② -1 ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 2

해설

$w = a + bi$ 라 하면

$$(a+bi)(1-i)+1 = a - ai + bi + b + 1$$
$$= (a+b+1) - (a-b)i$$
$$= a - bi$$ 에서

$a + b + 1 = a$, $\therefore$ $b + 1 = 0$ 이므로 $b = -1$

$a - b = b$ 이므로 $a + 1 = -1$ 에서 $a = -2$

따라서 w 의 실수부분은 -2

4. $2|x-1|+x-4=0$의 해를 구하여라.

▶ **답 :**

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

▷ **정답 :** -2

해설

i) $x<1$일 때,
$-2(x-1)+(x-4)=0$
$\therefore x=-2$
ii) $x\geq 1$일 때,
$2(x-1)+x-4=0$
$\therefore x=2$
따라서 구하는 해는 $x=-2$ 또는 $x=2$ 이다.

5. x에 대한 이차방정식 $kx^2+(2k+1)x+6=0$의 해가 2, α일 때, $k+\alpha$의 값을 구하면?

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

해설

해가 $2, \alpha$라면 방정식에 2를 대입하면 0이 된다.

$k \cdot 2^2+(2k+1)2+6=0$

$4k+4k+8=0$에서 $k=-1$

$k=-1$을 방정식에 대입하고 α를 구한다.

$-x^2-x+6=0,\ x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0,\ x=2,-3$

$\therefore k=-1,\ \alpha=-3$

$\therefore\ k+\alpha=-4$

6. x에 대한 이차방정식 $x^2-2(m+a-1)x+m^2+a^2-2b=0$이 m의 값에 관계없이 중근을 갖는다. $a+b$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

중근을 가지므로, $\frac{D'}{4}=0$을 만족한다.

$\frac{D'}{4}=(m+a-1)^2-(m^2+a^2-2b)=0$

$m(2a-2)+(1-2a+2b)=0$

m에 대한 항등식이므로

$2a-2=0,\ 1-2a+2b=0$

$\therefore\ a=1,\ b=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+b=\frac{3}{2}$

7. 이차방정식 $3x^2 - 6x + 4 = 0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^3 + \beta^3$의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$\alpha + \beta = 2,\ \alpha\beta = \dfrac{4}{3}$

$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

$= 8 - 3 \times \dfrac{4}{3} \times 2 = 0$

8. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b는 실수)

① 2 ② 5 ③ 8 ④ 10 ⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$ 에서

$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$

$\therefore (a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0$

이 때, a, b가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$ 이므로

$a^2 + b^2 = 5$

9. 다음 사차방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$ 에서 $x = -1$, $x = 2$ 를 대입하면 성립하므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 1 & -3 & 3 & 1 & -6 \\
 & & -1 & 4 & 7 & 6 \\
\hline
2 & 1 & -4 & 7 & -6 & \boxed{0} \\
 & & 2 & -4 & 6 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$(x+1)(x-2)(x^2 - 2x + 3) = 0$

$\therefore\ x = -1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{2}i$

따라서 실수근은 -1, 2이므로 $-1 + 2 = 1$이다.

10. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$

④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$

$(x-y)(x-2y)$

$\Rightarrow \quad (x-y)(x-2y) = 0$

$\Rightarrow \quad x = y$ 또는 $x = 2y$

ⅰ) $x = y$

$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$

$x = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2$

ⅱ) $x = 2y$

$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$

$y = \pm\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\sqrt{2}$

$x + y = (4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

11. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① -2의 제곱근은 $\sqrt{2}i$와 $-\sqrt{2}i$이다.

② $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=-\sqrt{(-2)(-3)}$

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

④ $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{\dfrac{-8}{-2}}$

⑤ $-\sqrt{-16}=-4i$

해설

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2i}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

12. 실수 k 에 대하여 $\dfrac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k-2}} = -\sqrt{\dfrac{k-1}{k-2}}$ 이 성립할 때, $|k-3|+|k-1|$ 을 간단히 하면?

① -2 ② 4 ③ 2

④ $|2k-4|$ ⑤ $|-2k-2|$

해설

$k-1 \geq 0,\ k-2 < 0$

$1 \leq k < 2$

$|k-3|+|k-1| = -(k-3)+(k-1) = 2$

13. 방정식 $a^2x+1=a(x+1)$의 해가 존재하지 않을 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$a^2x+1=a(x+1)$ 에서 $a(a-1)x=a-1$

i) $a=1$ 일 때, $0\cdot x=0$ 이므로 해는 무수히 많다.

ii) $a=0$ 이면 $0\cdot x=-1$ 이므로 해가 없다.

iii) $a\neq 0, a\neq 1$ 일 때, $x=\dfrac{a-1}{a(a-1)}=\dfrac{1}{a}$

따라서 해가 없을 때의 a의 값은 0이다.

14. x에 대한 이차방정식 $4x^2+2(2k+m)x+k^2-k+2n=0$이 임의의 실수 k에 대하여 항상 중근을 가질 때, 실수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하면?

① 3 ② $\frac{7}{8}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{7}{8}$ ⑤ $-\frac{5}{8}$

해설

판별식이 0이어야 한다.

$D'=(2k+m)^2-4(k^2-k+2n)=0$

$\Rightarrow \quad m^2+4km+4k-8n=0$

$\Rightarrow \quad 4k(m+1)+m^2-8n=0$

임의의 k에 대해 성립하려면

$m+1=0, \quad m^2-8n=0$

$\Rightarrow \ m=-1,\ n=\frac{1}{8},\ m+n=-\frac{7}{8}$

15. x에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + a + 1 = 0$의 두 근이 연속인 정수가 되게하는 상수 a의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 근을 n, $n+1$이라 하면

$$\begin{cases} n + (n+1) = a \cdots\cdots ㉠ \\ n(n+1) = a + 1 \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $n = \dfrac{a-1}{2} \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$$\frac{a-1}{2}\left(\frac{a-1}{2} + 1\right) = a + 1$$

이것을 정리하면 $(a+1)(a-5) = 0$

$a = -1,\ 5$

$\therefore -1 + 5 = 4$

16. A, B두 사람이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$을 푸는데 A는 b를 잘못 읽어 -4와 7을, B는 c를 잘못 읽어 $-3 \pm \sqrt{2}i$를 근으로 얻었다. 원래의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

A는 a와 c를 바르게 읽었으므로
근과 계수와의 관계에서
$\frac{c}{a} = -4 \cdot 7 = -28$, $c = -28a$
B는 a와 b는 바르게 읽었으므로
$-\frac{b}{a} = (-3 + \sqrt{2}i) + (-3 - \sqrt{2}i) = -6$, $b = 6a$
따라서 원래의 이차방정식은
$ax^2 + 6ax - 28a = 0$
근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 -6

17. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2+px+q=0$ 의 한 근이 $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{7-2\sqrt{12}} = 2-\sqrt{3}$ 이므로,
두 근은 $2-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}$
$p = -(\text{두근의 합}) = -4$
$q = (\text{두근의 곱}) = 1$
$\therefore p+q = -3$

18. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + 2a$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하여라. (단, a 는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$y = x^2 + 2ax + 2a = (x + a)^2 - a^2 + 2a$

$\therefore m = -a^2 + 2a = -(a - 1)^2 + 1$

따라서 m 의 최댓값은 1 이다.

19. 차가 14 인 두 수의 곱의 최솟값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -49

해설

두 수를 x, $x+14$ 라 하고, 두 수의 곱을 y 라고 하면 $y = x(x+14) = x^2 + 14x = (x+7)^2 - 49$

따라서 $x = -7$ 일 때, 최솟값 -49 를 갖는다.

20. x, y, z가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$
$= -(x^2 - 4x) - y^2 - z^2 + 5$
$= -(x - 2)^2 - y^2 - z^2 + 9$
$x,\ y,\ z$는 실수이므로
$(x - 2)^2 \geq 0,\ y^2 \geq 0,\ z^2 \geq 0$
따라서 $4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$ 는
$x - 2 = 0,\ y = 0,\ z = 0$ 일 때,
최댓값 9를 갖는다.

21. 둘레의 길이가 $20\,\text{cm}$ 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름을 a , 이때 부채꼴의 넓이를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}a(20-2a) = a(10-a) = -a^2+10a \\ &= -(a^2-10a+25)+25 \\ &= -(a-5)^2+25 \end{aligned}$$

$a=5,\ b=25$

따라서 $a+b=30$ 이다.

22. 지면으로부터 초속 40m 로 똑바로 위로 쏘아 올린 물체의 x 초 후의 높이를 ym 라고 하면 $y = -5x^2 + 40x$ 의 관계가 성립한다. 이 물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 그 때의 높이를 구하여라.

▶ 답 : ______ 초

▶ 답 : ______ m

▷ 정답 : 4 초

▷ 정답 : 80 m

해설

$y = -5x^2 + 40x$ 에서 $y = -5(x-4)^2 + 80$ 이다.
따라서 $x = 4$ 일 때, y 는 최댓값 80을 갖는다.

23. 방정식 $(x^2+x+2)^2+8=12(x^2+x)$ 의 모든 근의 합은?

① 1 ② 0 ③ -1 ④ -2 ⑤ -3

해설

$x^2+x=Y$ 라 하면, $(Y+2)^2+8=12Y$

$Y^2-8Y+12=0$, $(Y-2)(Y-6)=0$

$Y=2$ 또는 $Y=6$

(i) $Y=2$

$x^2+x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2$ 또는 $x=1$

(ii) $Y=6$

$x^2+x-6=0 \quad \Rightarrow \quad x=-3$ 또는 $x=2$

$\therefore$ 모든 근의 합 $=-2$

24. 4차방정식 $x^4 + 2x^2 + 4x + 8 = 0$을 $(x^2 + a)^2 - (2x + b)^2 = 0$꼴로 변형한 후 네 근을 얻었다. 다음 중 네 근에 포함되는 것은?

① $1 \pm \sqrt{3}i$ ② $1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ③ $-1 \pm \sqrt{3}i$
④ $-1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ⑤ $-1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

해설

$(x^2 + a)^2 - (2x + b)^2$
$= x^4 + (2a - 4)x^2 - 4bx + a^2 - b^2$
이 식은 주어진 4차방정식과 같은 식이므로
$2 = 2a - 4,\ 4 = -4b,\ 8 = a^2 - b^2$
$\therefore a = 3,\ b = -1$
따라서 주어진 4차방정식은
다음과 같이 변형하면,
$(x^2 + 3)^2 - (2x - 1)^2 = 0$
$\therefore\ (x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 2) = 0$
$\therefore\ x = 1 \pm \sqrt{3}i$ 또는 $x = -1 \pm i$

25. 방정식 $x^3-5x^2+2x+1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$의 값을 구하면?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$\alpha+\beta+\gamma=5$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=-1$이므로

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

$=1+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma-(\alpha+\beta+\gamma)$

$=1+2-(-1)-5=-1$

26. 200 m 운동장 트랙에서 두 명의 학생이 일정한 속력으로 달리기를 한다. 두 학생이 같은 방향으로 달리면 3분 후에 만나고, 반대 방향으로 달리면 1분 후에 만난다고 할 때, 두 학생 중 빠른 학생의 속력은?

① 8 km/h ② 9 km/h ③ 10 km/h
④ 11 km/h ⑤ 12 km/h

해설

빠른 학생의 분속 : x
3분간 간 거리 : $3x$
느린 학생의 분속 : y
3분간 간 거리 : $3y$
같은 방향으로 3분간 달려간 후 만났으므로
거리의 차는 200
$3x-3y=200$
반대방향으로 1분간 달려간 후 만났으므로
거리의 합은 200
$x+y=200$

$$\begin{cases} 3x-3y=200 \\ x+y=200 \end{cases}$$

연립방정식을 풀면 $x=\dfrac{400}{3}\text{m/분}$

$$\Rightarrow \frac{400\text{m}}{3}/\text{분}=\frac{0.4\,\text{km}}{3}\times 60/\text{시간}=8\,\text{km/h}$$

27. 방정식 $x^2+5y^2+4xy-2y+1=0$을 만족시키는 실수 $x,\ y$에 대하여 $x+y$의 값을 구하면?

① -7　② -1　③ 1　④ 3　⑤ 7

해설

$x^2+5y^2+4xy-2y+1=0$에서

$x^2+4xy+4y^2+y^2-2y+1=0$

$(x+2y)^2+(y-1)^2=0$

$x+2y,\ y-1$은 실수이므로 $x+2y=0,\ y-1=0$

$\therefore\ y=1,\ x=-2y=-2$

$\therefore\ x+y=-1$

28. $f(x)=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{98}$ 일 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$\frac{1-i}{1+i}=-i$, $\frac{1+i}{1-i}=i$ 이므로

$$f(\frac{1-i}{1+i})+f(\frac{1+i}{1-i})$$
$$=f(-i)+f(i)$$
$$=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{98}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{98}$$
$$=i^{98}+(-i)^{98}$$
$$=i^2+i^2$$
$$=-2$$

29. 복소수 $z=a+bi$ (a, b : 실수)에 대하여 $<z>=b+ai$로 나타낸다. $z=\dfrac{4+3i}{5}$일 때, $5z^5<z>^4$의 값을 구하면?

① $3+4i$ ② $4+3i$ ③ $5+4i$

④ $5+3i$ ⑤ $4+5i$

해설

$z<z>=(a+bi)(b+ai)=(a^2+b^2)i$

$z=\dfrac{4+3i}{5}$이므로

$z<z>=\left\{\left(\dfrac{4}{5}\right)^2+\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\right\}i=i$

$$\begin{aligned}\therefore\ 5z^5<z>^4 &= 5z(z<z>)^4\\ &= 5\left(\frac{4+3i}{5}\right)(i)^4\\ &= 4+3i\end{aligned}$$

30. $a^2-3a+1=0$일 때, $a^2-2a+\dfrac{3}{a^2+1}$의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$a^2-3a+1=0$에서

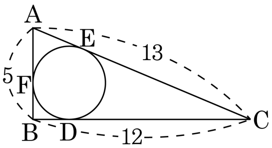
$$a^2-2a+\frac{3}{a^2+1}=a-1+\frac{3}{3a}=a+\frac{1}{a}-1$$

한편, $a^2-3a+1=0$의 양변을 a로 나누면

$$a-3+\frac{1}{a}=0 \quad \therefore\ a+\frac{1}{a}=3$$

$\therefore$(준식)$=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)-1=2$

31. 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 12$, $\overline{AC} = 13$, $\angle B = 90°$인 직각삼각형 ABC에 내접하는 원이 $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$에 접하는 점을 각각 D, E, F라 하자. $\overline{BF} = \alpha$, $\overline{AE} = \beta$라 할 때, α, β를 두 근으로 하고 x^2이 계수가 1인 이차방정식은?



① $x^2 - 5x + 6 = 0$ ② $x^2 + 5x + 6 = 0$

③ $x^2 - 12x + 20 = 0$ ④ $x^2 + 12x + 20 = 0$

⑤ $x^2 - 13x + 30 = 0$

해설

$\overline{BF} = \overline{BD} = \alpha$, $\overline{AF} = \overline{AE} = 5 - \alpha = \beta$,

$\overline{CD} = \overline{CE} = 12 - \alpha$

그런데 $\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{CE}$이므로

$(5 - \alpha) + (12 - \alpha) = 13$

$2\alpha = 4 \quad \therefore \alpha = 2$

$\overline{AE} = 5 - 2 = 3 \quad \therefore \beta = 3$

두 수 2, 3을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2 - (2 + 3)x + 2 \times 3 = 0$

$\therefore x^2 - 5x + 6 = 0$

32. x에 관한 방정식 $|x^2-1|-x-k=0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, k의 값의 범위를 구하면?

① $1<k<\frac{5}{4}$ ② $1\le k\le\frac{5}{4}$ ③ $-5<k<-\frac{5}{4}$

④ $k<1,\ k>\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5}<k<1$

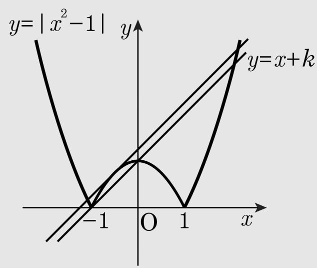
해설

$|x^2-1|-x-k=0$을 변형하여 분리하면

$|x^2-1|=x+k$, $y=|x^2-1|$, $y=x+k$

이 두 함수가 4개의 교점을 가지려면

다음그림과 같아야 한다.



$y=-x^2+1$, $y=x+k$가

두 점에서 만나야하므로

$x^2+x+k-1=0$의 판별식 $D>0$이어야 한다.

$D=1-4k+4>0 \quad \therefore\ k<\frac{5}{4}$

또, 직선 $y=x+k$는 점 $(-1,0)$을 지나는 직선 위에 존재해야 하므로

$0<-1+k \quad \therefore\ k>1$

$\therefore\ 1<k<\frac{5}{4}$

33. 두 실수 x, y 가 $x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 을 만족할 때, x 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 을 y 에 대한 식으로 정리하면

$y^2-2y+\left(x^2+2x-2\right)=0$

x, y 는 실수이므로 이 이차방정식은 실근을 갖는다.

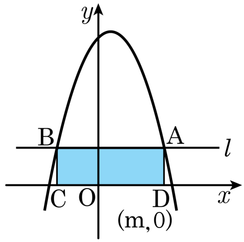
$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-\left(x^2+2x-2\right)\geq 0$

$x^2+2x-3\leq 0$, $(x+3)(x-1)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq 1$, x 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -3

따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 -2

34. $y=-x^2+x+6$ 의 그래프와 x 축에 평행인 직선 l 이 만나는 두 점 A, B 에서 x 축에 수선을 그어 그 수선의 발을 각각 D, C 라 하고, 점D 의 x 좌표를 m 이라고 할 때, □ABCD 의 둘레의 길이의 최댓값은? $\left(\frac{1}{2}<m<3\right)$



① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{31}{4}$ ③ 10 ④ $\frac{49}{4}$ ⑤ $\frac{29}{2}$

해설

$y=-x^2+x+6=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$ 의 점 A 의 좌표는 $(m,\ -m^2+m+6)$ 이다.

직사각형의 가로의 길이는 $2\left(m-\frac{1}{2}\right)$ 이고,

직사각형의 세로의 길이는 $-m^2+m+6$

(□ABCD둘레의 길이)

$=2\left\{2\left(\mathrm{m}-\frac{1}{2}\right)-\mathrm{m}^2+\mathrm{m}+6\right\}$

$=2(2\mathrm{m}-1-\mathrm{m}^2+\mathrm{m}+6)$

$=2(-\mathrm{m}^2+3\mathrm{m}+5)$

$=-2\left(\mathrm{m}-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{29}{2}$

$m=\frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값은 $\frac{29}{2}$ 이다.

35. x에 대한 삼차방정식 $x^3+(3a-1)x^2-5ax+2a=0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ $-\frac{8}{9}$ ⑤ $-\frac{17}{9}$

해설

$x^3+(3a-1)x^2-5ax+2a=0$을 인수분해하면

$(x-1)(x^2+3ax-2a)=0$

ⅰ) 중근이 $x=1$인 경우

$x=1$을 $x^2+3ax-2a$ 에 대입하면 0이 된다.

$1+3a-2a=0$

$\therefore a=-1$

ⅱ) $x^2+3ax-2a=0$이 중근을 갖는 경우

판별식 $D=9a^2+8a=0,\ \ a(9a+8)=0,$

$\therefore a=0,\ \ a=-\frac{8}{9}$

$-1+0-\frac{8}{9}=-\frac{17}{9}$

36. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + 15 = 0$의 한 근이 $1 + 2i$일 때, 나머지 세 근 중 실근의 합은?

① -4 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 4

해설

두 허근은 $1 + 2i$, $1 - 2i$ 나머지 두 실근을 α, β라 하면

네 근의 합 : $(1 + 2i) + (1 - 2i) + \alpha + \beta = -2$

$\therefore$ 두 실근의 합 : $\alpha + \beta = -4$

37. $x^3+1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 값을 차례대로 구하여라.

(1) $\omega^{20}+\omega^{10}+1$
(2) $\omega^{101}+\overline{\omega}^{101}-\omega^{11}\cdot\overline{\omega}-\omega\cdot\overline{\omega}^{11}$

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 0

▷ 정답: 2

해설

ω가 x^2-x+1의 근이므로
$\overline{\omega}$도 x^2-x+1의 근이다.
즉, $\omega^3=-1,\ \overline{\omega}^3$
$=-1,\ \omega^2-\omega+1=0$
(1) $\omega^{20}+\omega^{10}+1$
$=(\omega^3)^6\cdot\omega^2+(\omega^3)^3\cdot\omega+1$
$=(-1)^6\cdot\omega^2+(-1)^3\cdot\omega+1$
$=\omega^2-\omega+1=0$

(2) $\omega^{101}+\overline{\omega}^{101}-\omega^{11}\overline{\omega}-\omega\overline{\omega}^{11}$
$=(\omega^3)^{33}\cdot\omega^2+(\overline{\omega}^3)^{33}\cdot\overline{\omega}^2-$
$\omega\overline{\omega}\left\{(\omega^3)^3\cdot\omega+(\overline{\omega}^3)^3\cdot\overline{\omega}\right\}$
$=(-1)\omega^2+(-1)\overline{\omega}^2-\left\{(-1)\omega+(-1)\overline{\omega}\right\}$
$=-(\omega^2-\omega)-(\overline{\omega}^2-\overline{\omega})$
$=-(-1)-(-1)=2$

38. 연립방정식 $\begin{cases} xy+x+y=5 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$ 을 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$x+y=u,\ \ xy=v$ 라 하면

$$\begin{cases} u+v=5 & \cdots ㉠ \\ u^2-v=7 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$u^2-(5-u)=7$

$u^2+u-12=0$

$(u+4)(u-3)=0$

$\therefore\ \ u=-4$ 또는 $u=3$

(i) $u=-4,\ v=9$, 즉 $x+y=-4,\ xy=9$ 일 때, $x,\ y$ 는 $t^2+4t+9=0$ 의 두 근이므로 $t=-2\pm\sqrt{5}i$

따라서, $x=-2\pm\sqrt{5}i,\ y=-2\mp\sqrt{5}i$ 이므로 (복부호 동순)

$(-2+\sqrt{5}i,\ -2-\sqrt{5}i),\ (-2-\sqrt{5}i,\ -2+\sqrt{5}i)$

(ii) $u=3,\ v=2$, 즉 $x+y=3,\ xy=2$ 일때, $x,\ y$ 는 $t^2-3t+2=0$ 의 두 근이므로

$(t-1)(t-2)=0$

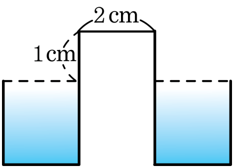
$\therefore\ \ t=1$ 또는 $t=2$

따라서, $x=1,\ y=2$ 또는 $x=2,\ y=1$ 이므로

$(1,\ 2),\ (2,\ 1)$

(i), (ii) 에서 구하는 순서쌍의 개수는 4개이다

39. 폭이 100 cm 인 긴 양철판을 구부려서 두 줄기로 물이 흘러가도록 하였다. 직사각형 단면이 다음 그림과 같이 대칭인 모양으로 물이 가장 많이 흘러갈 수 있도록 했을 때, 물이 흘러가는 단면 중 한 개 단면의 최대 넓이는 몇 cm^2 인가? (단, 아래 그림의 실선은 양철판을 나타낸다.)



① $125\,cm^2$　② $288\,cm^2$　③ $350\,cm^2$

④ $420\,cm^2$　⑤ $120\,cm^2$

해설

직사각형 단면의 세로의 길이를 a, 가로의 길이를 b 라 하면

총길이는 $a+b+a+1+2+a+1+b+a=100$ 에서

$4a+2b=96$

$\therefore 2a+b=48$ 이므로 $b=48-2a$

한 개 단면의 넓이는 ab 이므로

$$\begin{aligned} a(48-2a) &= -2a^2+48a \\ &= -2(a^2-24a) \\ &= -2(a^2+24a+144-144) \\ &= -2(a-12)^2+288 \end{aligned}$$

따라서 $a=12$ 일 때 최대 넓이 $288\,cm^2$

40. 방정식 $x^2+2y^2+2xy-4x-10y+13=0$ 을 만족시키는 실수 x, y 의 합 $x+y$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

주어진 방정식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+2(y-2)x+2y^2-10y+13=0 \quad \cdots ㉠$

이 때, x 가 실수이므로 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$ 이다.

$\frac{D}{4}=(y-2)^2-\left(2y^2-10y+13\right) \geq 0$

$-y^2+6y-9 \geq 0,\ y^2-6y+9 \leq 0$

$(y-3)^2 \leq 0$ y 가 실수이므로 $y-3=0$

$\therefore y=3 \quad \cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면 $x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0$

$\therefore\ x=-1$

$\therefore\ x+y=-1+3=2$

41. 자연수 n 에 대하여 $i(1+i)^n$ 이 양의 실수일 때, 다음 중 n 의 값이 될 수 있는 것은?

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

$i(1+i)^n = p(p>0)$, $(1+i)^n = \frac{p}{i} = -pi$

즉, $(1+i)^n =$ 음수 $\times\, i$ 이어야 한다.

이 때, n 이 홀수이면 $(1+i)^n$ 은 순허수꼴이 될 수 없다.

$n = 2k$ 일 때, $(1+i)^{2k} = (2i)^k$

$k = 4m$ 이면 $(2i)^{4m}$ 이 양의 정수이므로

$k = 4m+1 \Rightarrow (1+i)^{2k} = (2i)^k = (2i)^{4m+1} \Rightarrow$ 양수 $\times\, 2i$

$k = 4m+2 \Rightarrow (1+i)^{2k} = (2i)^k = (2i)^{4m+2} \Rightarrow$ 양수 $\times\, (-4)$

$k = 4m+3 \Rightarrow (1+i)^{2k} = (2i)^k = (2i)^{4m+3} \Rightarrow$ 양수 $\times\, (-8i)$

따라서 $k = 4m+3$, 즉 $n = 2k = 8m+6$ 일 때 조건을 만족한다.

주어진 수 중에서 알맞은 것은 22 이다.

42. 세 방정식 $x^2+2ax+bc=0$, $x^2+2bx+ca=0$, $x^2+2cx+ab=0$ 의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은? (단, a, b, c는 실수)

① 세 방정식은 모두 실근을 갖는다.

② 세 방정식은 모두 허근을 갖는다.

③ 반드시 두 방정식만 실근을 갖는다.

④ 반드시 한 방정식만 실근을 갖는다.

⑤ 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

해설

세 방정식의 판별식을 각각

$$\frac{D_1}{4}=a^2-bc,$$

$$\frac{D_2}{4}=b^2-ca,$$

$\dfrac{D_3}{4}=c^2-ab$라 하면

$$\frac{D_1}{4}+\frac{D_2}{4}+\frac{D_3}{4}$$

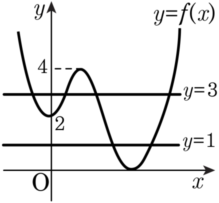
$$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}\geq 0$$

따라서, $\dfrac{D_1}{4}$, $\dfrac{D_2}{4}$, $\dfrac{D_3}{4}$ 중 적어도 하나는 0보다 크거나 같다.

곧, 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

43. 사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 방정식 $\{f(x)\}^2=4f(x)-3$의 실근의 개수는?



① 1개 ② 2개 ③ 3개

④ 4개 ⑤ 6개

해설

$\{f(x)\}^2=4f(x)-3$을 인수분해하면

$\{f(x)-1\}\{f(x)-3\}=0$

$\therefore f(x)=1$ 또는 $f(x)=3$

따라서, 위의 그래프와 같이

$f(x)=1$ 과 $f(x)=3$ 을 만족하는 x는

각각 2개와 4개이므로 실근의 개수는 6개이다.

44. n 이 자연수일 때, 이차함수 $y=2n^2-11n+20$ 의 최솟값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$$y=2n^2-11n+20$$
$$=2\left(n^2-\frac{11}{2}n+\frac{121}{16}\right)-\frac{121}{8}+20$$
$$=2\left(n-\frac{11}{4}\right)^2+\frac{39}{8}$$

n 이 자연수이므로

$\frac{11}{4}$ 에 가장 가까운 자연수는 3 이다.

따라서 $n=3$ 일 때,

최솟값 $2\cdot 3^2-11\cdot 3+20=5$ 를 갖는다.

45. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 두 점 $(-4,\ 0),\ (2,\ 0)$ 을 지나고 최솟값이 -3 일 때, 상수 $a,\ b,\ c$ 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = \dfrac{1}{3}$

▷ 정답 : $b = \dfrac{2}{3}$

▷ 정답 : $c = -\dfrac{8}{3}$

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 두 점 $(-4,\ 0),\ (2,\ 0)$ 을 각각 지나므로

$16a - 4b + c = 0$

$4a + 2b + c = 0$

$\therefore\ b = 2a,\ c = -8a$

또 주어진 함수의 최솟값이 -3 이므로

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= ax^2 + 2ax - 8a \\ &= a(x+1)^2 - 9a \end{aligned}$$

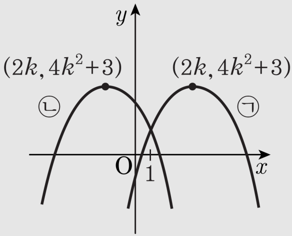
$\therefore\ -9a = -3$

따라서 $a = \dfrac{1}{3},\ b = \dfrac{2}{3},\ c = -\dfrac{8}{3}$ 이다.

46. $x \geq 1$ 에 대하여 $y = -x^2 + 4kx + 3$ 이 최댓값 11 을 가질 때, 상수 k 의 값을 구하면?

① $\frac{9}{4}$　② $\sqrt{2}$　③ $-\sqrt{2}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

해설



$y = -x^2 + 4kx + 3 = -(x-2k)^2 + (4k^2+3)$

㉠ 경우 : $2k \geq 1 \Rightarrow k \geq \frac{1}{2}$

최대 : $4k^2 + 3 = 11,\ k^2 = 2$

$\therefore\ k = \sqrt{2}\ \left(\because\ k \geq \frac{1}{2}\right)$

㉡ 경우 : $2k \leq 1 \Rightarrow k \leq \frac{1}{2}$

최대 : $y = -1 + 4k + 3 = 4k + 2 = 11$

$k = \frac{4}{9}$ 인데 $k \leq \frac{1}{2}$ 이므로

∴ 해가 존재하지 않음.

$\therefore\ k = \sqrt{2}$

47. 어느 공장에서 생산하는 제품은 50 개를 생산할 때까지는 개당 5000 원의 비용이 들어가고 51 개 부터는 생산량이 1 개씩 증가할 때마다 개당 10 원씩 추가로 감소한다. 예컨대 51 개, 52 개의 제품을 생산할 때의 생산 비용이 각각 개당 4990 원, 4980 원이다. 이 때 총 생산 비용이 최대가 될 때의 개당 생산 비용을 구하여라.

▶ 답 : __________ 원

▷ 정답 : 2750 원

해설

생산량을 x개라 하면

(1) $x \le 50$ 일 때

(총 생산 비용) $= 5000 \times x = 5000x$

따라서 $x = 50$ 일 때, 총 생산 비용의 최댓값은 250000 원이다.

(2) $x > 50$ 일 때

(개당 생산 비용) $= 5000 - 10(x - 50) - 10x + 5500$

$$\begin{aligned}(\text{총 생산 비용}) &= (5500 - 10x)x \\ &= -10x^2 + 5500x \\ &= -10(x - 275)^2 + 756250\end{aligned}$$

따라서 $x = 275$ 일 때, 총 생산 비용의 최댓값은 756250 원이다.

(1), (2)에 의하면 생산량 275 개일 때, 총 생산 비용이 최대이다.

이 때, 개당 생산 비용은 2750 원이다.

48. 성은이네 과수원에서는 생산하는 모든 사과를 수경이네 가게에 납품하고 있다. 수경이네 가게에서는 자금 사정이 어려워 올해 사과 한 개당 가격을 x% 인하하여 납품하면 1 년 후에는 올해 인하하여 납품받은 가격에서 $2x$% 를 인상한 가격으로 납품받겠다는 약속을 하였다. 1 년 후 사과 한 개당 가격을 가장 비싸게 받으려면 x 의 값을 얼마로 정해야 하는가?

① 22 ② 25 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

해설

원래 납품하던 사과 한 개의 가격을 a 원이라 하면 올해 x% 인하한 가격은 $a\left(1-\frac{x}{100}\right)$ 원이다.

이 가격에서 $2x$% 인상한 1 년 후의 사과 한 개의 가격을 $f(x)$ 원이라 하면

$$f(x)=a\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{2x}{100}\right)$$

$$=a\left(1+\frac{x}{100}-\frac{x^2}{5000}\right)$$

$$=-\frac{a}{5000}\left(x^2-50x-5000\right)$$

$$=-\frac{a}{5000}\left\{(x-25)^2-5625\right\}$$

이때, $0 \le x \le 100$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=25$ 일 때 최대이고 최댓값은 $\frac{5625}{5000}a$ 이다.

따라서, 올해 사과 한 개당 가격을 25% 인하하여 납품하면 1 년 후에 가장 비싼 가격으로 납품할 수 있다.

49. $\dfrac{x^2-y^2-1}{x-y}=6$을 만족시키는 자연수 $x,\ y$값의 순서쌍의 개수는?

▶ **답 :** ＿＿＿＿ 개

▷ **정답 :** 2 개

해설

$\dfrac{x^2-y^2-1}{x-y}=6$ 에서

$\dfrac{(x-y)(x+y)-1}{x-y}=(x+y)+\dfrac{-1}{x-y}=6$

$x-y$ 는 -1 의 약수이다. 즉 -1 또는 1

i) $x-y=1$ 일 때, $x+y=7$

$\therefore\ x=4,\ y=3$

ii) $x-y=-1$ 일 때, $x+y=5$

$\therefore\ x=2,\ y=3$

따라서 구하는 $(x,\ y)=(4,\ 3),\ (2,\ 3)$ 이므로 2 개이다.

50. x 에 관한 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+4k+4=0$ 의 두 근이 정수일 때, 정수 k 의 값들의 합을 구하면?

① -1 ② 7 ③ 6 ④ -6 ⑤ 1

해설

두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 $(\alpha \ge \beta)$

$\alpha+\beta=-2(k-1)\ \cdots\cdots$ ㉠

$\alpha\beta=4k+4\ \cdots\cdots$ ㉡

㉠×2+㉡을 하면 $\alpha\beta+2\alpha+2\beta=8$, $(\alpha+2)(\beta+2)=12$, $\alpha\beta=-10, 0, 2, 42, 32, 30$

그런데 $\alpha,\ \beta$가 정수이므로 ㉡에서

$$k=\frac{\alpha\beta-4}{4}$$

따라서 k의 정수값은 $-1,\ 7$

$\therefore\ k$의 값들의 합은 6