1. 실수 x, y에 대하여, 등식 $2x+y+(x-3y)i=3+2i$가 성립할 때, $\frac{x}{y}$의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{11}$ ② 11 ③ 7 ④ -7 ⑤ -11

해설

$2x+y=3,\ x-3y=2$ 이므로

$x=\frac{11}{7}$, $y=-\frac{1}{7}$

$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{11}{7}\times -\frac{7}{1}=-11$

2. $j^2 = -\sqrt{-1}$ 라 할 때, j^{2012} 의 값은?

① 1

② -1

③ $\sqrt{-1}$

④ $-\sqrt{-1}$

⑤ 두 개의 값을 갖는다.

해설

$j^4 = (-\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$

$\therefore\ j^{2012} = (j^4)^{503} = (-1)^{503} = -1$

3. $z_1 = 1 - i, z_2 = 1 + i$ 일 때, $z_1^3 + z_2^3$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $4 - 2i$ ② 0 ③ 20

④ $-2 + 4i$ ⑤ -4

해설

$$z_1 + z_2 = 2,\ z_1 z_2 = 2$$

$$\begin{aligned} z_1^3 + z_2^3 &= (z_1 + z_2)^3 - 3z_1 z_2 (z_1 + z_2) \\ &= 8 - 12 \\ &= -4 \end{aligned}$$

4. $(2-i)\bar{z}+4iz=-1+4i$를 만족하는 복소수 z에 대하여 $z\bar{z}$의 값은? (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$z=a+bi$라 놓으면 $\bar{z}=a-bi$

$(2-i)(a-bi)+4i(a+bi)=-1+4i$

$(2a-5b)+(3a-2b)i=-1+4i$

$\therefore\ 2a-5b=-1 \cdots ㉠$

$3a-2b=4 \cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=1$

$\therefore\ z=2+i,\quad \bar{z}=2-i$

$\therefore\ z\bar{z}=(2+i)(2-i)=2^2-i^2=5$

5. x에 대한 이차방정식 $x^2-2(m+a-1)x+m^2+a^2-2b=0$이 m의 값에 관계없이 중근을 갖는다. $a+b$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

중근을 가지므로, $\frac{D'}{4}=0$을 만족한다.

$\frac{D'}{4}=(m+a-1)^2-(m^2+a^2-2b)=0$

$m(2a-2)+(1-2a+2b)=0$

m에 대한 항등식이므로

$2a-2=0,\ 1-2a+2b=0$

$\therefore\ a=1,\ b=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+b=\frac{3}{2}$

6. 이차방정식 $3x^2-6x+k=0$이 실근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하면?

① $k<1$ ② $k\le 1$ ③ $k<3$

④ $k\le 3$ ⑤ $1<k<3$

해설

$3x^2+6x+k=0$,

$\frac{D}{4}=(-3)^2-3\cdot k\ge 0$

$3k\le 9 \quad \therefore\ k\le 3$

7. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a-m-1)x+a^2-b+m^2=0$의 근이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\frac{D}{4}=(a-m-1)^2-(a^2-b+m^2)=0$$

m의 값에 관계없이

$$2(-a+1)m+(-2a+b+1)=0$$

이어야 하므로

$$2(-a+1)=0,\ -2a+b+1=0$$

$$\therefore a=1,\ b=1$$

$$\therefore a+b=2$$

8. $x^2+ax+b=0$ (a, b 는 실수) 의 한 근이 $1+i$ 일 때, a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

한 근이 $1+i$ 이므로,

켤레근 $1-i$ 도 식의 근.

$(1+i)+(1-i)=-a$

$\therefore\ a=-2$

9. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 6, b일 때, $a + b$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와
x축과의 교점의 x좌표는
이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$의 실근이다.
$x^2 - 8x + a = 0$에 $x = 6$을 대입하면
$36 - 48 + a = 0$에서 $a = 12$
따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$에서 $(x - 2)(x - 6) = 0$
$x = 2$ 또는 $x = 6$
$\therefore\ b = 2$ $\therefore\ a + b = 14$

10. 이차함수 $y = 4x^2 - 24x + 10$은 $x = a$일 때, 최솟값 b를 갖는다. $a - b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 29

해설

$$y = 4x^2 - 24x + 10$$
$$= 4(x^2 - 6x + 9 - 9) + 10$$
$$= 4(x - 3)^2 - 26$$
$$\therefore a = 3,\ b = -26$$
$$\therefore a - b = 3 - (-26) = 29$$

11. 다음 이차함수 $y = x^2 - 2x - 2$ 의 x의 범위가 $-2 \le x \le 2$ 일 때, 이 함수의 최댓값은?

① -3　　② -2　　③ 0　　④ 6　　⑤ 9

해설

$y = x^2 - 2x - 2 \Rightarrow \quad y = (x-1)^2 - 3$

$-2 \le x \le 2$ 이므로 $x = 1$ 에서 최솟값,

$x = -2$ 에서 최댓값을 갖는다.

$\therefore$ 최댓값 : $(-2-1)^2 - 3 = 6$

12. 다음 삼차방정식을 풀었을 때 두 허근의 합을 구하여라.

$$x^3 - x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$f(x) = x^3 - x^2 + x - 6$ 으로 놓으면 $f(2) = 8 - 4 + 2 - 6 = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x - 2$ 를 인수로 갖는다.

2	1	−1	1	−6
		2	2	6
	1	1	3	0

위의 조립제법에서 $f(x) = (x - 2)(x^2 + x + 3)$ 이므로 주어진 방정식은$(x - 2)(x^2 + x + 3) = 0$

$$\therefore x = 2\ ,\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{11}i}{2}$$

두 허근의 합은 -1

13. 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$의 네 근 중 가장 작은 근을 a, 가장 큰 근을 b라 할 때, $a^2 + b^2$의 값은?

① 8　　② 9　　③ 10　　④ 11　　⑤ 12

해설

$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$

$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{5},\ x = \pm\sqrt{6}$

가장 작은 근 $a = -\sqrt{6}$, 가장 큰 근 $b = \sqrt{6}$

$\therefore\ a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$

14. 삼차방정식 $2x^3-7x^2+11x+13=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha+\beta+\gamma$
(나) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$
(다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$ ② $-\frac{7}{2}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$, $\frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq0)$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

15. 연립방정식 $\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha$,$y = \beta$라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$의 값은?

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

$$\begin{cases} y = x + 1 & \cdots ㉠ \\ x^2 + y^2 = 5 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2 + (x + 1)^2 = 5$, $2x^2 + 2x - 4 = 0$,

$2(x + 2)(x - 1) = 0$

$\therefore\ x = 1,\ -2$

$x = 1$일 때, $y = 2$,

$x = -2$일 때, $y = -1$

$\therefore\ \alpha = 1, \beta = 2$ 또는 $\alpha = -2,\ \beta = -1$

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 3$

16. 실수가 아닌 복소수 z 에 대하여 $\dfrac{z}{1+z^2}$ 가 실수이기 위한 조건은? (단, $z \neq \pm i$ 이고 $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① $z \cdot \bar{z} = 1$　　② $z + \bar{z} = 0$

③ $z + \bar{z} = 1$　　④ $z + \bar{z} = -1$

⑤ $(z+1)(\bar{z}+1) = 1$

해설

$\dfrac{z}{1+z^2}$ 가 실수이면

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$$

$$\frac{z}{1+z^2} - \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2} = 0$$

$$\frac{z(1+\bar{z}^2) - \bar{z}(1+z^2)}{(1+z^2)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

$$\frac{(z-\bar{z}) - z\bar{z}(z-\bar{z})}{(1+z^2)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

$$\frac{(z-\bar{z})(1-z\bar{z})}{(1+z)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

(분모)$\neq 0$ 이므로

(분자)$= (z-\bar{z})(1-z\bar{z}) = 0$

z 가 실수가 아니므로 $z \neq \bar{z}$

$\therefore z\bar{z} = 1$

17. $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\dfrac{1}{3\omega^2+4\omega+2} = a+b\omega$ 를 만족하는 실수 $a,\ b$ 의 값에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하면?

① 1　　② -1　　③ 2　　④ -2　　⑤ $-\dfrac{4}{3}$

해설

$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서

$2\omega+1 = \sqrt{3}i$

양변을 제곱하면,

$4\omega^2+4\omega+4=0$

$\therefore\ \omega^2+\omega+1=0$

$$\begin{aligned} 3\omega^2+4\omega+2 &= 3(\omega^2+\omega+1)+\omega-1 \\ &= \omega-1 \end{aligned}$$

$\dfrac{1}{\omega-1} = a+b\omega$ 에서

$(a+b\omega)(\omega-1)=1$

$(a-2b)\omega-(a+b)=1 \leftarrow \omega^2=-\omega-1$

$\therefore\ a-2b=0,\ a+b=-1$ 에서

$a=-\dfrac{2}{3},\ b=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ a+b=-1$

18. $0 < a < 1$ 일 때, $\sqrt{a}\sqrt{a-1}\sqrt{1-a}\sqrt{-a}$ 를 간단히 하면?

① $a(1-a)$　　② $a(a-1)$　　③ $a^2(a-1)$

④ $a^2(1-a)^2$　　⑤ $-a^2(1-a)^2$

해설

$a>0$, $a-1<0$, $1-a>0$, $-a<0$ 이므로 $\sqrt{a}\sqrt{a-1}\sqrt{1-a}\sqrt{-a}$

$= \sqrt{a}\sqrt{-a}\sqrt{a-1}\sqrt{1-a}$

$= \sqrt{a}\cdot\sqrt{a}i\cdot\sqrt{1-a}\cdot\sqrt{1-a}i$

$= \sqrt{a^2}\sqrt{(1-a)^2}i^2$

$= -a(1-a) = a(a-1)$

19. 이차방정식 $x^2 + mx + m - 1 = 0$의 한 근이 1일 때, 다른 한 근을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

1이 $x^2 + mx + m - 1 = 0$의 근이므로

$x = 1$을 대입하면 $1 + m + m - 1 = 0 \quad \therefore m = 0$

주어진 방정식은 $x^2 - 1 = 0 \quad \therefore \; x = \pm 1$

따라서 다른 한 근은 $x = -1$

20. A, B 두 사람이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$을 푸는데 A는 b를 잘못 읽어 -4와 7을, B는 c를 잘못 읽어 $-3 \pm \sqrt{2}i$를 근으로 얻었다. 원래의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

A는 a와 c를 바르게 읽었으므로
근과 계수와의 관계에서

$$\frac{c}{a} = -4 \cdot 7 = -28,\ c = -28a$$

B는 a와 b는 바르게 읽었으므로

$$-\frac{b}{a} = (-3 + \sqrt{2}i) + (-3 - \sqrt{2}i) = -6,\ b = 6a$$

따라서 원래의 이차방정식은
$ax^2 + 6ax - 28a = 0$
근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 -6

21. x에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(m-2)x + 2m - 1 = 0$의 두 근이 모두 음수일 때, 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

① $m > 5$ ② $m \geq 5$ ③ $m < 5$

④ $m \leq 5$ ⑤ $-5 \leq x \leq 5$

해설

주어진 이차방정식이 두 실근을 가져야 하므로
$D/4 = (m-2)^2 - 2m + 1 \geq 0$
즉 $m^2 - 4m + 4 - 2m + 1 = m^2 - 6m + 5 \geq 0$
따라서 $(m-5)(m-1) \geq 0$이므로
$m \leq 1$ 또는 $m \geq 5$
또 두근의 합 $-2(m-2) < 0$이어야 하므로 $m > 2$
또 두근의 곱 $2m - 1 > 0$이어야 하므로 $m > \dfrac{1}{2}$
따라서 $m \geq 5$

22. 이차함수 $y = -x^2 - 2ax + 4a - 4$의 최댓값을 M이라 할 때, M의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

$y = -x^2 - 2ax + 4a - 4 = -(x + a)^2 + a^2 + 4a - 4$
이므로 $x = -a$일 때 최댓값 $a^2 + 4a - 4$를 가진다.
$\therefore M = a^2 + 4a - 4 = (a + 2)^2 - 8$
따라서 M은 $a = -2$일 때 최댓값 -8을 가진다.

23. 함수 $y=-\left(x^2+4x+5\right)^2-2\left(x^2+4x\right)-6$ 이 $x=m$ 에서 최댓값 M 을 갖는다. 이 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$y=-\left(x^2+4x+5\right)^2-2\left(x^2+4x\right)-6$ 에서
$x^2+4x+5=t$ 로 놓으면
$y=-\left(x^2+4x+5\right)^2-2\left(x^2+4x+5\right)+4$
$=-t^2-2t+4=-(t+1)^2+5$
그런데 $t=x^2+4x+5=(x+2)^2+1\geq 1$ 이므로
$t=1$, 즉 $x=-2$ 일 때 최댓값 1 을 갖는다.
따라서, $m=-2,\ M=1$
$\therefore M+m=-1$

24. 차가 4 인 두 수 중에서 그 제곱의 합이 최소가 되는 두 수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

▷ 정답 : 2

해설

두 수를 각각 x, $x+4$라 하면

$$\begin{aligned} y &= x^2 + (x+4)^2 \\ &= 2x^2 + 8x + 16 \\ &= 2(x+2)^2 + 8 \end{aligned}$$

$x = -2$ 일 때, 최솟값 8 을 갖는다.

$\therefore x = -2,\ x + 4 = 2$

따라서 구하는 두 수는 -2, 2

25. x, y, z가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$
$= -(x^2 - 4x) - y^2 - z^2 + 5$
$= -(x - 2)^2 - y^2 - z^2 + 9$
$x,\ y,\ z$는 실수이므로
$(x - 2)^2 \geq 0,\ y^2 \geq 0,\ z^2 \geq 0$
따라서 $4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$ 는
$x - 2 = 0,\ y = 0,\ z = 0$일 때,
최댓값 9를 갖는다.

26. 두 실수 x, y가 $x^2+y^2+4x+y-2=0$을 만족시킬 때, y의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2+4x+(y^2+y-2)=0$에서 x가 실수이므로

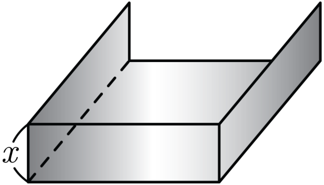
$$\frac{D}{4}=4-y^2-y+2\geq 0$$

$$(y+3)(y-2)\leq 0$$

$$\therefore -3\leq y\leq 2$$

따라서 y의 최댓값은 2, 최솟값은 -3이다.

27. 너비가 60 인 양철판을 아래 그림과 같이 구부려서 물받이를 만들려고 한다. 구부리는 양철판의 길이를 x 라 할 때, 단면의 넓이가 최대가 되는 x 의 값을 구하여라.



① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

단면의 넓이를 y 라 하면

$$\begin{aligned} y &= x(60-2x) \\ &= -2x^2+60x \\ &= -2(x^2-30x+225-225) \\ &= -2(x-15)^2+450 \end{aligned}$$

$x=15$ 일 때, 최대 넓이 450

28. 둘레의 길이가 $20\,\text{cm}$ 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름을 a , 이때 부채꼴의 넓이를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}a(20-2a) = a(10-a) = -a^2+10a \\ &= -(a^2-10a+25)+25 \\ &= -(a-5)^2+25 \end{aligned}$$

$a=5,\ b=25$

따라서 $a+b=30$ 이다.

29. 지면으로부터 초속 30m 로 쏘아 올린 물체의 t 초 후의 높이를 ym 라 할 때, $y = 30x - 5x^2$ 라고 한다. 이 물체의 높이의 최댓값을 구하여라.

▶ **답 :** ____ m

▷ **정답 :** 45 m

해설

$y = -5x^2 + 30x = -5(x - 3)^2 + 45$

30. 삼차방정식 $x^3-7x^2+px+q=0$의 한 근은 $3+\sqrt{2}$이다. 유리수 p, q의 값을 구했을 때, $p+q$의 값은?

① 6 ② 10 ③ -2 ④ -1 ⑤ 1

해설

$x^3-7x^2+px+q=0$의 세 근은 $3+\sqrt{2}, 3-\sqrt{2}, \alpha$

세 근의 합 : $\alpha+(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})=7$

$\therefore\ \alpha=1$

$p=(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})+\alpha(3-\sqrt{2})+\alpha(3+\sqrt{2})=7+6 \quad \therefore\ p=13$

$-q=(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})\cdot 1=7$

$\therefore\ q=-7$

$\therefore\ p+q=13-7=6$

31. 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고르시오.

보 기

㉠ $(1+\omega^2)^3 = -1$

㉡ $(1+\omega)^{10} = \omega^2$

㉢ 모든 자연수 n에 대하여 $(1+\omega)^{3n} = (-1)^n$

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$x^3 = 1$의 한 허근이 ω이므로
$\omega^3 = 1,\ \omega^2 + \omega + 1 = 0$
㉠ $\omega^2 + 1 = -\omega$,
$(\omega^2+1)^3 = (-\omega)^3 = -\omega^3 = -1(\bigcirc)$
㉡ $(1+\omega)^{10} = (-\omega^2)^{10}$
$= \omega^{20} = (\omega^3)^6 \cdot \omega^2 = \omega^2(\bigcirc)$
㉢ $(-\omega^2)^{3n} = (-1)^{3n} \cdot (\omega^3)^{2n}$
$= (-1)^n \cdot 1^{2n} = (-1)^n$
$(\because\ (-1)^{3n} = \{(-1)^3\}^n = (-1)^n)$ $(\bigcirc)$
$\therefore$ ㉠, ㉡, ㉢ 모두 참

32. 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2+3xy-2y^2=0 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha, y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 최솟값을 구하여라.

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

해설

$$\begin{cases} (2x-y)(x+2y)=0 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$$

1) $y=2x$일 때

$x^2+4x^2=5x^2=20$

$\therefore\ x=\pm 2,\ y=\pm 4$

2) $x=-2y$일 때

$4y^2+y^2=5y^2=20$

$\therefore\ y=\pm 2,\ x=\mp 4$

$(x,\ y)=(2,\ 4),(-2,\ -4),(-4,\ 2),(4,\ -2)$

$\therefore\ \alpha+\beta=\ 6,\ -6,\ -2,\ 2$

그러므로 $\alpha+\beta$의 최솟값은 -6

33. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+2x=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2+x+y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 을 풀면 $x=\alpha,\ y=\beta$ 또는 $x=\gamma,\ y=\delta$ 이다. 이 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

인수분해되는 식은 없으나 이차항을 소거할 수 있다.

㉠ − ㉡에서 $x-y=-2$, 즉 $y=x+2$

㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+3x+2=0$

$(x+1)(x+2)=0$

$\therefore\ x=-1,\ -2$

$\therefore\ x=-1,\ y=1$ 또는 $x=-2,\ y=0$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=6$

34. 연립방정식 $xy=z,\ yz=x,\ zx=y$를 만족하는 0이 아닌 실수해 $x,\ y,\ z$의 쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는?

① 1개　　② 2개　　③ 4개

④ 8개　　⑤ 무수히 많다.

해설

주어진 식을 변변 곱하면 $(xyz)^2=xyz$

$xyz\neq 0$ 이므로 $xyz=1$

여기에 $xy=z$를 대입하면 $z^2=1,\ z=\pm1$

(i) $z=1$을 주어진 연립방정식에 대입하면,

$xy=1,\ x=y$

$\therefore\ (x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ 1),\ (-1,\ -1,\ 1)$

(ii) $z=-1$을 주어진 연립방정식에 대입하면

$xy=-1\ ,\ x=-y$

$\therefore\ (x,\ y,\ z)=(1,\ -1,\ -1),\ (-1,\ 1,\ -1)$

(i), (ii)에서 조건을 만족하는 $(x,\ y,\ z)$는 모두 4개이다.

35. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a \\ xy=a \end{cases}$ 를 만족하는 순서쌍 (x, y) 가 한 개 뿐일 때, 양의 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\begin{cases} x+y=2a \cdots ① \\ xy=a \cdots ② \end{cases}$

①에서 $y=-x+2a$ 를 ②에 대입하면

$x(-x+2a)=a$

$\therefore -x^2+2ax=a$ 즉 $x^2-2ax+a=0$ 이 한 개의

실근을 가져야 하므로 $D/4=a^2-a=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 1 그런데

a 는 양의실수 이므로

$a=1$

36. $x^2 - x + 1 = 0$ 의 한 근을 z라 한다. $p = \dfrac{1+z}{3-z}$ 일 때, $7p \cdot \overline{p}$ 의 값을 구하면?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 의 근이 $z,\ \overline{z}$ 이므로

$z + \overline{z} = 1,\ z\overline{z} = 1$

$$\begin{aligned} 7p \cdot \overline{p} &= 7\left(\frac{1+z}{3-z}\right)\left(\overline{\frac{1+z}{3-z}}\right) \\ &= 7\left(\frac{1+z}{3-z}\right)\left(\frac{1+\overline{z}}{3-\overline{z}}\right) \\ &= 7\left\{\frac{1+(z+\overline{z})+z\cdot\overline{z}}{9-3(z+\overline{z})+z\cdot\overline{z}}\right\} \\ &= 3 \end{aligned}$$

37. 이차방정식 $x^2-4x+1=0$의 두 근을 $a,\ b$라 할 때 $\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}$의 값은?

① 4　　② 1　　③ $\sqrt{6}$　　④ $2\sqrt{6}$　　⑤ 6

해설

$x^2-4x+1=0$에서 $\dfrac{D}{4}=(-2)^2-1=3>0$ 이므로

$a,\ b$ 는 서로 다른 실수이고, 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=4,\ ab=1$ 이므로 $a>0,\ b>0$

$a,\ b$를 식에 대입하면

$a^2-4a+1=0,\ b^2-4b+1=0$

$\therefore a^2+1=4a,\ b^2+1=4b$

$\therefore\ \sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}=\sqrt{4a}+\sqrt{4b}$

$=2(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\because a>0,\ b>0)$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}$

$=6(\because a+b=4, ab=1)$

$\therefore\ \sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{6}$

38. 이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근의 차가 2가 되는 q의 최솟값은?

① 5　　② 4　　③ 3　　④ 2　　⑤ 1

해설

이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근을 α, $\alpha+2$라고 하면

$$|\alpha+2-\alpha| = \frac{\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}}{1} = |2|$$

$\sqrt{p^2+8p+16-4q+8}=2$

양변을 제곱하여 q에 관해 정리하면

$4=p^2+8p+16-4q+8,\ 4q=p^2+8p+20$

$$q=\frac{1}{4}p^2+2p+5=\frac{1}{4}(p+4)^2+1$$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

해설

두 근을 α,β라 하면

$\alpha+\beta=p+4, \alpha\beta=q-2$

두 근의 차가 2이므로

$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=2$

$\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}=2$

양변을 제곱하면

$(p+4)^2-4(q-2)=4$

q에 대해 정리하면

$$q=\frac{1}{4}(p+4)^2+1$$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

39. 모든 실수 x에 대하여 이차함수 $y = x^2 - 2x + 2$ 의 그래프가 직선 $y = mx - 2$보다 위쪽에 있을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하면?

① $-6 < m < 2$　② $-4 < m < 1$　③ $-2 < m < 0$

④ $2 < m < 5$　⑤ $4 < m < 6$

해설

모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2 - 2x + 2 > mx - 2$ 가 성립하므로

$x^2 - (m+2)x + 4 > 0$ 에서

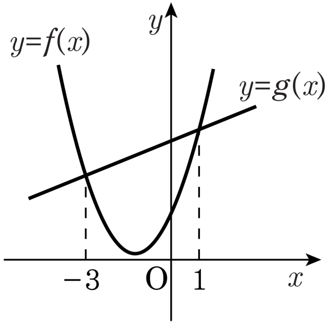
이차방정식 $x^2 - (m+2)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D라 하면

$D = (m+2)^2 - 16 < 0$

$(m+6)(m-2) < 0$

$\therefore -6 < m < 2$

40. 아래 그림과 같이 두 함수 $f(x) = 2x^2 + ax + 4$, $g(x) = cx + d$ 의 그래프가 $x = 1$ 과 $x = -3$ 에서 만난다. 이 때, 함수 $y = f(x) - g(x)$ 의 최솟값은?



① -8 ② -6 ③ -4 ④ 2 ⑤ 4

해설

두 함수를 연립하면,

$2x^2 + ax + 4 = cx + d$

$\Rightarrow 2x^2 + (a-c)x + 4 - d = 0 \cdots$ ㉠

근이 $-3, 1$ 이므로

$2(x+3)(x-1) = 0$과 일치한다.

㉠과 비교하면 $a - c = 4, d = 10$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) - g(x) &= 2x^2 + (a-c)x + 4 - d \\ &= 2x^2 + 4x - 6 \\ &= 2(x+1)^2 - 8 \end{aligned}$$

$\therefore$ 최솟값 : -8

41. x에 관한 방정식 $|x^2-1|-x-k=0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, k의 값의 범위를 구하면?

① $1<k<\frac{5}{4}$ ② $1 \le k \le \frac{5}{4}$ ③ $-5<k<-\frac{5}{4}$

④ $k<1,\ k>\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5}<k<1$

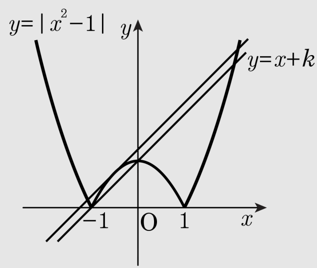
해설

$|x^2-1|-x-k=0$을 변형하여 분리하면

$|x^2-1|=x+k$, $y=|x^2-1|$, $y=x+k$

이 두 함수가 4개의 교점을 가지려면

다음그림과 같아야 한다.



$y=-x^2+1$, $y=x+k$가

두 점에서 만나야하므로

$x^2+x+k-1=0$의 판별식 $D>0$이어야 한다.

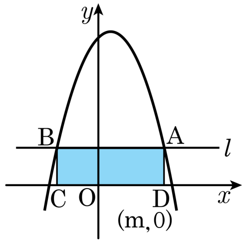
$D=1-4k+4>0 \quad \therefore\ k<\frac{5}{4}$

또, 직선 $y=x+k$는 점 $(-1,0)$을 지나는 직선 위에 존재해야 하므로

$0<-1+k \quad \therefore\ k>1$

$\therefore\ 1<k<\frac{5}{4}$

42. $y=-x^2+x+6$ 의 그래프와 x 축에 평행인 직선 l 이 만나는 두 점 A, B 에서 x 축에 수선을 그어 그 수선의 발을 각각 D, C 라 하고, 점D 의 x 좌표를 m 이라고 할 때, □ABCD 의 둘레의 길이의 최댓값은? $\left(\frac{1}{2}<m<3\right)$



① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{31}{4}$ ③ 10 ④ $\frac{49}{4}$ ⑤ $\frac{29}{2}$

해설

$y=-x^2+x+6=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$ 의 점 A 의 좌표는 $(m,\ -m^2+m+6)$ 이다.

직사각형의 가로의 길이는 $2\left(m-\frac{1}{2}\right)$ 이고,

직사각형의 세로의 길이는 $-m^2+m+6$

(□ABCD둘레의 길이)

$=2\left\{2\left(\mathrm{m}-\frac{1}{2}\right)-\mathrm{m}^2+\mathrm{m}+6\right\}$

$=2(2\mathrm{m}-1-\mathrm{m}^2+\mathrm{m}+6)$

$=2(-\mathrm{m}^2+3\mathrm{m}+5)$

$=-2\left(\mathrm{m}-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{29}{2}$

$m=\frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값은 $\frac{29}{2}$ 이다.

43. 삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근 α, β, γ에 대하여 $\alpha+\beta+\gamma=3$ 일 때, 방정식 $f(2x+3)=0$의 세 근의 합은?

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

세 근의 합은 $\left(-\dfrac{x^2\text{의 계수}}{x^3\text{의 계수}}\right)$ 이므로

x^3 의 계수와 x^2 의 계수만 구하면 된다.

최고차항의 계수가 1 인 삼차방정식을

$f(x)$ 라 하면 세 근의 합이 3 이므로

$f(x)=x^3-3x^2+bx+d$

$f(2x+3)$

$=(2x+3)^3-3\cdot(2x+3)^2+b\cdot(2x+3)+d$

3 차항과 2 차항의 계수를 중심으로

식을 정리하면

$8x^3+24x^2+\ldots\cdots=0$

$\therefore$ 세 근의 합$=-3$

해설

$f(2x+3)=0$의 세 근을

각각 $p,\ q,\ r$이라 하면,

$2p+3=\alpha\ \cdots$ ㉠

$2q+3=\beta\ \cdots$ ㉡

$2r+3=\gamma\ \cdots$ ㉢

㉠ $+$ ㉡ $+$ ㉢에서

$2(p+q+r)+9=3$

$\therefore\ p+q+r=-3$

44. x에 대한 두 이차방정식 $x^2+ax+b=0$, $x^2+bx+a=0$이 한 개의 공통근 α를 가지고, 공통이 아닌 두 근의 비가 $3:5$일 때, $a-b$의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ 0

해설

공통근이 α이므로 $\alpha^2+a\alpha+b=0\cdots$㉠

$\alpha^2+b\alpha+a=0\cdots$㉡

㉠−㉡에서 $(a-b)(\alpha-1)=0$

$a=b$이면 모순이므로 $a\neq b$ $\therefore\ \alpha=1$

$x^2+ax+b=0$, $x^2+bx+a=0$의 공통이 아닌 근을 각각 β, γ라 하면 근과 계수와의 관계에 의하여 $1\cdot\beta=b$, $1\cdot\gamma=a$

따라서, 공통이 아닌 두 근의 비는

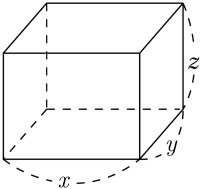
$\beta:\gamma=b:a=3:5\cdots$㉢

한편, ㉠에 $\alpha=1$을 대입하면 $a+b+1=0\cdots$㉣

㉢, ㉣에서 $a=-\frac{5}{8}$, $b=-\frac{3}{8}$

$\therefore\ a-b=-\frac{1}{4}$

45. 다음 그림과 같이 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 x, y, z 인 직육면체의 12 개의 모서리의 길이가 평균이 8 , 표준편차가 2 이다. 이 때, 6 개면의 넓이의 평균은?



① 53 ② 56 ③ 59

④ 62 ⑤ 65

해설

$$\frac{4(x+y+z)}{12}=8 \Rightarrow x+y+z=24$$

$$\frac{4(x^2+y^2+z^2)}{12}-8^2=4$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2=204$$

$$xy+yz+zx=\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}=186$$

$$\frac{2(xy+yz+zx)}{6}=\frac{xy+yz+zx}{3}=\frac{186}{3}=62$$

46. 세 방정식 $x^2+2ax+bc=0$, $x^2+2bx+ca=0$, $x^2+2cx+ab=0$의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은? (단, a, b, c는 실수)

① 세 방정식은 모두 실근을 갖는다.

② 세 방정식은 모두 허근을 갖는다.

③ 반드시 두 방정식만 실근을 갖는다.

④ 반드시 한 방정식만 실근을 갖는다.

⑤ 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

해설

세 방정식의 판별식을 각각

$\frac{D_1}{4}=a^2-bc$,

$\frac{D_2}{4}=b^2-ca$,

$\frac{D_3}{4}=c^2-ab$라 하면

$\frac{D_1}{4}+\frac{D_2}{4}+\frac{D_3}{4}$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}\geq 0$

따라서, $\frac{D_1}{4}$, $\frac{D_2}{4}$, $\frac{D_3}{4}$ 중 적어도 하나는 0보다 크거나 같다.

곧, 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

47. 방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근을 α, β라 하자. 3의 배수가 아닌 정수 n에 대하여 α^n, β^n을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2+(㉮)x+(㉯)=0$이다. ㉮와 ㉯에 알맞은 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

α, β는 방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이므로
$\alpha^2+\alpha+1=0, \beta^2+\beta+1=0$
$\therefore\ \alpha^3=1,\ \beta^3=1$
한편, 근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta=-1, \alpha\beta=1$
㉠ : $n=3k+1$(k는 정수) 일 때,
$\alpha^n+\beta^n=(\alpha^3)^k\cdot\alpha+(\beta^3)^k\cdot\beta$
$=\alpha+\beta=-1$
㉡ : $n=3k+2$(k는 정수) 일 때,
$\alpha^n+\beta^n=(\alpha^3)^k\alpha^2+(\beta^3)^k\beta^2$
$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=1-2=-1$
㉠, ㉡에서 n이 3의 배수가 아니면
$\alpha^n+\beta^n=-1, \alpha^n\beta^n=(\alpha\beta)^n=1$
따라서 α^n, β^n을 두 근으로 하는 이차방정식은
$x^2+x+1=0\ \therefore$ ㉮ $=1$, ㉯ $=1$

48. 함수 $y = x^2 - px$ 와 $y = -x^2 + px$ 의 그래프에 의하여 둘러싸인 부분에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값이 26 일 때, p 의 값을 구하여라. (단, $p > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

포물선의 축이 $x = \frac{p}{2}$ 이므로 직사각형은 직선 $x = \frac{p}{2}$ 에 대하여 대칭이다.

직사각형이 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 t $\left(t > \frac{p}{2}\right)$ 라 하면

가로의 길이는 $2 \times \left(t - \frac{p}{2}\right) = 2t - p$,

세로의 길이는 $(-t^2 + pt) - (t^2 - pt) = -2t^2 + 2pt$

이므로 직사각형의 둘레의 길이는

$2(-2t^2 + 2pt + 2t - p) = -4\left(t - \frac{p+1}{2}\right)^2 + p^2 + 1$ 이다.

따라서 $t = \frac{p+1}{2}$ 일 때, 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은

$p^2 + 1 = 26$ 이므로 $p = 5$ 이다.

49. 연립방정식 $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x^2+y^2-z^2=25 \\ x^3+y^3-z^3=109 \end{cases}$ 의 근을

$x=\alpha,\ y=\beta,\ z=\gamma$ 라 할 때, $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|$ 의 값은?

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

해설

$x+y-z=1 \cdots$ ①

$x^2+y^2-z^2=25 \cdots$ ②

$x^3+y^3-z^3=109 \cdots$ ③

① 에서 $z=x+y-1 \cdots$ ④

④ 를 ②, ③ 에 대입하여 각각 정리하면

$x+y-xy=13,$

$xy(x+y)-(x+y)^2+(x+y)=-36$

$x+y=u,\ xy=v$ 로 놓으면 윗식은 각각

$u-v=13 \cdots$ ⑤

$uv-u^2+u+36=0 \cdots$ ⑥

⑤, ⑥ 을 연립하면 $u=3,\ v=-10$

$\therefore\ x+y=3,\ xy=-10,\ z=2$

$\therefore\ (x,\ y,\ z)=(5,\ -2,\ 2),\ (-2,\ 5,\ 2)$

$\therefore\ |\alpha|+|\beta|+|r|=9$

50. N_1, N_2, N_3, $\cdots$, N_8은 모두 자연수이고, $N_1 < N_2 < \cdots < N_8$, $N_1 + N_2 + N_3 + \cdots + N_8 = 80$이라 할 때, N_8의 최댓값은? (단, $N_1 = 4$)

① 29　② 30　③ 31　④ 32　⑤ 33

해설

$N_1 < N_2 < N_3 < \cdots < N_8$이므로 $N_2 = N_1 + 1$, $N_3 = N_2 + 1 = N_1 + 2$, $\cdots$, $N_7 = N_6 + 1 = N_1 + 6$일 때, N_8은 최댓값이 된다.

$\therefore\ N_1 + (N_1 + 1) + (N_1 + 2) + \cdots + (N_1 + 6) + N_8 = 80$

$7N_1 + (1 + 2 + \cdots + 6) + N_8 = 80$

$28 + 21 + N_8 = 80$

$\therefore\ N_8 = 80 - 49 = 31$