1. $(x-2)+3yi=0$를 만족하는 실수 $x,\ y$의 합을 구하여라.(단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x-2=0,\ 3y=0$
$x=2,\ y=0 \rightarrow x+y=2$

2. $\dfrac{2+3i}{3-i}$ 를 계산하면?

① $\dfrac{3+11i}{8}$ ② $\dfrac{9+11i}{8}$ ③ $\dfrac{3+9i}{10}$

④ $\dfrac{3+11i}{10}$ ⑤ $\dfrac{9+11i}{10}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{3-i} &= \frac{(2+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}\\ &= \frac{6-3+11i}{10}\\ &= \frac{3+11i}{10}\end{aligned}$$

3. 복소수 $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ 에 대하여 z^2 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $z^2 = i$

해설

$z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ 이므로 $z^2 = \frac{1+2i-1}{2} = i$

4. $z = \dfrac{1+3i}{1-i}$ 일 때, 다음 중 z 의 켤레복소수 $\bar{z}$ 와 같은 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $\dfrac{1+3i}{1+i}$ ② $\dfrac{1-3i}{1+i}$ ③ $\dfrac{1-3i}{1-i}$

④ $\dfrac{1-i}{1+3i}$ ⑤ $\dfrac{1+i}{1-3i}$

해설

$\overline{\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)} = \dfrac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}$ 이므로

$\bar{z} = \overline{\left(\dfrac{1+3i}{1-i}\right)} = \dfrac{\overline{1+3i}}{\overline{1-i}} = \dfrac{1-3i}{1+i}$

5. 방정식 $\frac{x+2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{2x+1}{4}$의 해를 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ 1

해설

양변에 12를 곱하면 $4(x+2)-6=3(2x+1)$

이항하여 정리하면 $4x-6x=3-8+6$, $-2x=1$

$\therefore\ x=-\frac{1}{2}$

6. 방정식 $|x+5|=1$ 를 만족하는 x 의 값들의 합은?

① -9 ② -10 ③ -11 ④ -12 ⑤ -13

해설

$|x+5|=1$

$\Rightarrow \quad x+5=1$ 또는 $x+5=-1$

$\therefore \quad x=-4$ 또는 $x=-6$

7. 이차방정식 $3x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 근을 A, B (단, $A < B$) 라 할 때, $3A + B$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$3x^2 - 2x - 1 = 0$

$(3x + 1)(x - 1) = 0$

$x = -\frac{1}{3}$ 또는 $x = 1$

$\therefore \ 3A + B = 0$

8. 이차방정식 $x^2-3x+2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$의 값은?

① $-\frac{3}{2}$　② $-\frac{3}{2}$　③ $-\frac{1}{6}$　④ $\frac{2}{5}$　⑤ $\frac{5}{2}$

해설

두 근이 각각 α와 β이므로
$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=2$이다.
$\therefore \frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{5}{2}$

9. 이차함수 $y=\frac{1}{3}x^2-6x+k$ 의 최솟값과 이차함수 $y=-3x^2+6x-3k+3$ 의 최댓값이 일치할 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{33}{4}$

해설

$y=\frac{1}{3}x^2-6x+k=\frac{1}{3}(x-9)^2-27+k$

최솟값은 $-27+k$

$y=-3x^2+6x-3k+3$

$=-3(x-1)^2+6-3k$

최댓값은 $6-3k$

$-27+k=6-3k$

$\therefore\ k=\frac{33}{4}$

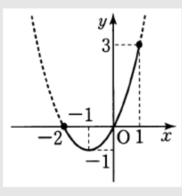
10. $-2 \le x \le 1$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 + 2x$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x) = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$, $-2 \le x \le 1$ 에서
$y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.
즉, $f(-2) = 0$, $f(-1) = -1$, $f(1) = 3$
따라서, $x = 1$ 일 때 최댓값 3,
$x = -1$ 일 때 최솟값 -1 을 가지므로
구하는 합은 $3 - 1 = 2$



11. $x=\dfrac{1+\sqrt{2}i}{3}$ 일 때, $9x^2-6x+5$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x=\dfrac{1+\sqrt{2}i}{3}$ 이므로

$3x=1+\sqrt{2}i$

$3x-1=\sqrt{2}i$

양변을 제곱하면 $9x^2-6x+1=-2$

$\therefore\ 9x^2-6x=-3$

$9x^2-6x+5$ 에서 $9x^2-6x$ 가 -3 이므로 $-3+5=2$

12. 이차방정식 $x^2+(a+2)x+1=0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지려면
$D=(a+2)^2-4=0$이므로
$a^2+4a+4-4=a^2+4a=0$
따라서 $a=0$또는 $a=-4$
따라서 상수 a의 값의 합은 -4

13. 이차방정식 $ax^2+4x-2=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 실수 a 값의 범위는?

① $a>-2$ ② $-2<a<0,\ a>0$
③ $-2<a<0$ ④ $a>2$
⑤ $a<0,\ 0<a<2$

해설

$ax^2+4x-2=0$에서
(ⅰ) 이차방정식이므로 x^2의 계수는 $a\neq 0$이어야 한다.
(ⅱ) 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=2^2-(-2a)>0,\ 2a+4>0$

$\therefore a>-2$

따라서 실수 a값의 범위는
$-2<a<0$ 또는 $a>0$

14. x에 대한 이차식 $2x^2+(k+1)x+k-1$이 완전제곱식이 될 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$2x^2+(k+1)x+k-1$이 완전제곱식이므로
$D=(k+1)^2-8(k-1)=0$
$(k-3)^2=0$
$\therefore\ k=3$

15. 이차식 x^2+2x+4 를 일차식의 곱으로 인수분해 하여라.

① $(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

② $(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$

③ $(x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$

④ $(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

⑤ $(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$

해설

$x^2+2x+4=0$ 의 해를 구하면
$x=-1\pm\sqrt{1-4}=-1\pm\sqrt{3}i$
$\therefore x^2+2x+4$
$=\left\{x-(-1+3\sqrt{i}\right\}\left\{x-(-1-\sqrt{3}i)\right\}$
$=(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

16. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 6, b일 때, $a + b$의 값은?

① 11　　② 12　　③ 13　　④ 14　　⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와
x축과의 교점의 x좌표는
이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$의 실근이다.
$x^2 - 8x + a = 0$에 $x = 6$을 대입하면
$36 - 48 + a = 0$에서 $a = 12$
따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$에서 $(x - 2)(x - 6) = 0$
$x = 2$ 또는 $x = 6$
$\therefore\ b = 2 \therefore\ a + b = 14$

17. 이차함수 $y=x^2-2ax-2b^2-4a+4b-6$의 그래프가 x축에 접할 때, a^2+b^2의 값은? (단, a, b는 실수)

① 2 ② 5 ③ 8 ④ 10 ⑤ 13

해설

$x^2-2ax-2b^2-4a+4b-6=0$에서

$\frac{D}{4}=a^2-(-2b^2-4a+4b-6)=0$

$\therefore (a+2)^2+2(b-1)^2=0$

이 때, a, b가 실수이므로 $a+2=0, b-1=0$

따라서 $a=-2, b=1$이므로

$a^2+b^2=5$

18. 그래프의 모양이 $y=-2x^2$ 과 같고 $x=1$ 일 때 최댓값 5 를 갖는다. 이때, 이 함수의 식은?

① $y=-2x^2-4x+4$
② $y=-2x^2-4x+5$
③ $y=-2x^2+4x-3$
④ $y=-2x^2+4x+3$
⑤ $y=-2x^2-x+5$

해설

꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 5)$, x^2 의 계수가 -2 이므로

$$\begin{aligned} y &= -2(x-1)^2+5 \\ &= -2(x^2-2x+1)+5 \\ &= -2x^2+4x+3 \end{aligned}$$

$\therefore y=-2x^2+4x+3$

19. 다음 사차방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$ 에서 $x = -1$, $x = 2$ 를 대입하면 성립하므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	1	-3	3	1	-6
		-1	4	7	6
2	1	-4	7	-6	0
		2	-4	6	
	1	-2	3	0	

$(x+1)(x-2)(x^2-2x+3) = 0$

$\therefore\ x = -1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{2}i$

따라서 실수근은 -1, 2 이므로 $-1 + 2 = 1$ 이다.

20. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$에서

$x^2 = t$로 놓으면

$t^2 - 13t + 36 = 0$, $(t-4)(t-9) = 0$

$\therefore\ t = 4$ 또는 $t = 9$

(ⅰ) $t = 4$일 때, $x^2 = 4$

$\therefore\ x = \pm 2$

(ⅱ) $t = 9$일 때, $x^2 = 9$

$\therefore\ x = \pm 3$

따라서 모든 해의 합은

$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

21. 삼차방정식 $x^3+x^2+ax+b=0$의 두 근이 -3, $1-\sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① -10　② -5　③ 0　④ 5　⑤ 10

해설

계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $1-\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{2}$이다.
따라서, 근과 계수의 관계에 의하여
$a=(1-\sqrt{2})\left(1+\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1-\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1+\sqrt{2}\right)=-7$
$b=-\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)(-3)=-3$
$\therefore\ a+b=-10$

22. 삼차방정식 $x^3-5x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b는 유리수)

① $1-\sqrt{2}$, 2　　② $-1+\sqrt{2}$, -3　　③ $1-\sqrt{2}$, 3

④ $1-\sqrt{2}$, -3　　⑤ $-1+\sqrt{2}$, 3

해설

한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.

삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로

$\therefore\ 1+\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})+\alpha=5,\quad \alpha=3$

$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1-\sqrt{2}$

23. $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^3+\overline{\omega}^3$의 값을 구하면? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$를 ω라 하면

$\overline{\omega}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ \omega^3=1,\ \overline{\omega}^3=1,\ \omega^3+\overline{\omega}^3=2$

24. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a값은?

① $a = -1$
② $a = 1$
③ $a = \pm 1$
④ $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수
⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}$, $-a^2 \neq -1$

$\therefore\ a \neq \pm 1$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는

a의 값은 $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수이다.

25. 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=1 \\ xy-y^2=6 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x=p,\ y=q$ 또는 $x=r,\ y=s$ 이다. $p+q+r+s$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots ㉠ \\ xy-y^2=6 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=2y+1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$y^2+y-6=0(y-2)(y+3)=0$

$\therefore\ y=2,\ -3$

$y=2,\ y=-3$을 ㉢에 대입하면

각각 $x=5,\ x=-5$

$\therefore\ x=5,\ y=2$ 또는 $x=-5,\ y=-3$

26. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ x^2+2y^2=12 \end{cases}$ 을 만족하는 $x,\ y$에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$
④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2-3xy+2y^2=0$ 에서
$(x-y)(x-2y)=0 \quad \therefore x=y$ 또는 $x=2y$
ⅰ) $x=y$ 일 때
$x^2+2y^2=3x^2=12$
$x=\pm 2,\ y=\pm 2$
ⅱ) $x=2y$ 일 때
$x^2+2y^2=6y^2=12$
$y=\pm\sqrt{2},\quad x=\pm 2\sqrt{2}$
$\therefore x+y=4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$

27. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$ 의 해를 $x=a$, $y=b$라 할 때, ab의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+y^2=5$ $\cdots$ ㉠

$x^2-xy+y^2=3$ $\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $5-xy=3$, $xy=2$

$\therefore$ $ab=2$

28. 복소수 $(1+i)x^2+2(2+i)x+3-3i$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, 실수 x의 값은?
(단, $i^2=-1$)

① -1　　② 1　　③ -3　　④ 3　　⑤ 7

해설

$(x^2+4x+3)+(x^2+2x-3)i$가 순허수이어야 하므로
$x^2+4x+3=0,\ x^2+2x-3\neq 0$
$(x+3)(x+1)=0,\ x=-1,\ x=-3$
$(x+3)(x-1)\neq 0,\ x\neq 1,\ x\neq -3$
$\therefore\ x=-1$

29. 이차방정식 $x^2-mx+4=0$의 두 근의 차가 2일 때, 실수 m의 값은?

① $\pm2\sqrt{2}$ ② $\pm2\sqrt{3}$ ③ $\pm2\sqrt{5}$
④ $\pm2\sqrt{6}$ ⑤ $\pm2\sqrt{7}$

해설

두 근을 α, $\alpha+2$라고 하면,
근과 계수와의 관계에서
$\alpha+(\alpha+2)=m$ ······㉠
$\alpha(\alpha+2)=4$ ······㉡
㉡에서 $\alpha^2+2\alpha-4=0$
$\therefore\ \alpha=-1\pm\sqrt{5}$
이것을 ㉠에 대입하면
$m=2(-1\pm\sqrt{5})+2=\pm2\sqrt{5}$

30. 이차함수 $y = 2x^2 + ax + 12$의 그래프와 직선 $y = 5x + b$가 두 점 P, Q에서 만난다. 선분 PQ의 중점의 좌표가 (3, 17)일 때, $a + b$의 값은?

① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1

해설

두 점 P, Q 의 x 좌표를 각각 α, β 라고 하면
α, β 는 이차방정식 $2x^2 + ax + 12 = 5x + b$의 두 실근이다.
$2x^2 + (a-5)x + 12 - b = 0$에서 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = -\frac{a-5}{2}$ ······ ㉠
또, 선분 PQ의 중점의 x좌표가 3이므로
$\frac{\alpha+\beta}{2} = 3$에서 $\alpha + \beta = 6$ ······ ㉡
㉠, ㉡에서 $-\frac{a-5}{2} = 6$
$\therefore a = -7$
또, 점 (3, 17)은 직선 $y = 5x + b$ 위의 점이므로 $17 = 5 \cdot 3 + b$ $\therefore$ $b = 2$
$\therefore a + b = -7 + 2 = -5$

31. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 2a - 1$의 최솟값을 m이라 할 때, m의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = x^2 - 2ax + 2a - 1 = (x - a)^2 - a^2 + 2a - 1$
이므로 $x = a$일 때 최솟값 $-a^2 + 2a - 1$을 가진다.
$\therefore m = -a^2 + 2a - 1 = -(a - 1)^2$
따라서 m은 $a = 1$일 때, 최댓값 0을 가진다.

32. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 일 때 $x^2 - y^2 + z^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -40

해설

$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3} = t$ 라 하면

$x = 2t-1$, $y = 5t+3$, $z = 3t-2$ 이므로

$x^2 - y^2 + z^2 = (2t-1)^2 - (5t+3)^2 + (3t-2)^2 = -12t^2 - 46t - 4$

$\cdots$ ㉠

$x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 이므로

$t \geq \frac{1}{2}$, $t \geq -\frac{3}{5}$, $t \geq \frac{2}{3}$

$\therefore\ t \geq \frac{2}{3}$

이 범위에서 ㉠은 감소하므로

$t = \frac{2}{3}$ 일 때 최대이고 최댓값은

$-12\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 46 \cdot \frac{2}{3} - 4 = -40$

33. 차가 16 인 두 수가 있다. 두 수의 곱의 최솟값을 구하면?

① 4　② 32　③ 43　④ -26　⑤ -64

해설

차가 16 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(x+16)$ 이다.

$y = x(x+16) = x^2 + 16x = (x^2 + 16x + 64) - 64$

$y = (x+8)^2 - 64$

34. x, y, z가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$
$= -(x^2 - 4x) - y^2 - z^2 + 5$
$= -(x-2)^2 - y^2 - z^2 + 9$
$x,\ y,\ z$는 실수이므로
$(x-2)^2 \geq 0,\ y^2 \geq 0,\ z^2 \geq 0$
따라서 $4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$는
$x - 2 = 0,\ y = 0,\ z = 0$일 때,
최댓값 9를 갖는다.

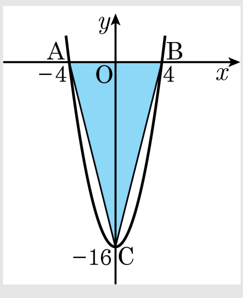
35. 이차함수 $y = x^2 - 16$ 의 그래프에서 x 축과의 교점을 A, B 라 하고 꼭짓점을 C 라 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 64

해설

x 축과의 교점A, B 는 $x^2 - 16 = 0$ 의 근과 같다.
따라서 $x = \pm 4$ 이다.



꼭짓점의 좌표는 $(0, \ -16)$ 이다.

구하는 넓이는 $\frac{1}{2} \times 8 \times 16 = 64$ 이다.

36. 둘레의 길이가 16cm 인 철사를 구부려서 부채꼴모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름을 a , 이때 부채꼴의 넓이를 b 라 할 때, ab 의 값을 구하면?

① 16 ② 20 ③ 36 ④ 55 ⑤ 64

해설

부채꼴의 반지름을 a, 넓이를 b 라 하면

$$b = \frac{1}{2} \times a \times (16 - 2a) = a(8 - a)$$
$$= -a^2 + 8a$$
$$= -(a^2 - 8a + 16 - 16)$$
$$= -(a - 4)^2 + 16$$

이 그래프가 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.
꼭짓점은 $(4, 16)$ 이므로 반지름 $a = 4$ 일 때, 부채꼴의 넓이 $b = 16$ 으로 최대가 된다.
따라서 $ab = 64$ 이다.

37. 지상 40m 높이에서 vm/s 의 속도로 똑바로 위로 쏘아올린 공이 t 초 후에 지면으로부터 hm 만큼의 높이가 될 때, $h = vt + 40 - 5t^2$ 의 식이 성립한다. 공이 3 초 후에 최고 높이에 도달했을 때, 이 최고 높이를 구하여라.

▶ 답 : ______ m

▷ 정답 : 85 m

해설

$h = -5t^2 + vt + 40 = -5\left(t - \frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v^2}{20} + 40$

이 물체는 $t = \frac{v}{10}$ 일 때, 최고 높이 $\frac{v^2}{20} + 40$ 에 도달하고, $\frac{v}{10} = 3$ 이므로 $v = 30$ 이다.

따라서 최고 높이는 85m 이다.

38. 삼차방정식 $x^3 - mx^2 + 24x - 2m + 4 = 0$의 한 근이 $4 - 2\sqrt{2}$일 때, 유리수 m의 값을 구하여라.

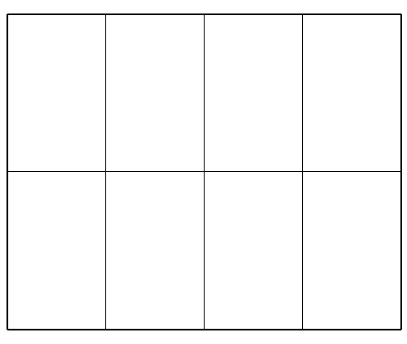
▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 10$

해설

$x = 4 - 2\sqrt{2}$를 주어진 방정식에 대입하면
$(4 - 2\sqrt{2})^3 - m(4 - 2\sqrt{2})^2 + 24(4 - 2\sqrt{2}) - 2m + 4 = 0$
이 식을 정리하면
$(260 - 26m) - (160 - 16m)\sqrt{2} = 0$
무리수가 서로 같은 조건에 의하여
$260 - 26m = 0$, $160 - 16m = 0$
따라서, $m = 10$
계수가 유리수인 방정식이므로 $4 - 2\sqrt{2}$가 근이면 $4 + 2\sqrt{2}$도 근이다.
나머지 한 근을 α라고 하면 근과 계수와의 관계에서
$(4 + 2\sqrt{2}) + (4 - 2\sqrt{2}) + \alpha = m$ ……㉠
$(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})\alpha = 2m - 4$ ……㉡
㉠에서 $\alpha = m - 8$ ……㉢
㉡에서 $8\alpha = 2m - 4$ ……㉣
㉢을 ㉣에 대입하면 $8(m - 8) = 2m - 4$
$\therefore\ m = 10$

39. 학교운동장에 길이가 70 m 인 줄을 가지고 다음 그림과 같은 직사각형 모양의 경계선을 표시하려고 한다. 이 때, 바깥 직사각형의 넓이가 $80\,\text{m}^2$ 이 되도록 하는 바깥 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 합은? (단, 가로의 길이는 10 m 이하이다.)



① 16 m ② 17 m ③ 18 m ④ 19 m ⑤ 20 m

해설
운동장의 가로를 x , 세로를 y 라 하자.
$3x + 5y = 70$
$xy = 80$ 연립하여 풀면, $x = 10,\ y = 8$
$\therefore$ 가로+세로= 18

40. 방정식 $x^2+2x+1+y^2-4y+4=0$을 만족하는 두 실수 $x,\ y$의 합 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$x^2+2x+1+y^2-4x+4=0$ 에서

$(x+1)^2+(y-2)^2=0$

$x,\ y$는 실수이므로 $x=-1,\ y=2$

$\therefore\ x+y=-1+2=1$

41. 복소수 z가 $z+|z|=2+8i$를 만족시킬 때, $|z|^2$의 값은? (단, $z=a+bi$ (a, b 는 실수) 일 때, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ 이다.)

① 68 ② 100 ③ 169 ④ 208 ⑤ 289

해설

$z=a+bi$라 놓자.

$z+|z|=2+8i$,

$a+bi+\sqrt{a^2+b^2}=2+8i$

$a+\sqrt{a^2+b^2}=2, \quad b=8$

$a+\sqrt{a^2+64}=2$

$\sqrt{a^2+64}=2-a$ 양변제곱하면,

$a^2+64=(2-a)^2=a^2-4a+4$

$4a=-60,\ a=-15$

$\therefore \ |z|^2=a^2+b^2=225+64=289$

42. $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{10}+\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{8}$ 값을 구하면?

① $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ③ 1

④ 0 ⑤ -1

해설

$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $2\omega+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\omega^2+\omega+1=0$

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0 \Rightarrow \omega^3=1$

$(\omega^3)^3\cdot\omega+(\omega^3)^2\cdot\omega^2=\omega+\omega^2=-1$

43. $x^2+3ax+b=0$과 $x^2-ax+c=0$은 공통근 1을 갖는다. 이 때, $2a^2+b-c$가 최소가 되는 a의 값은?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

조건에서
$1+3a+b=0 \cdots$ ㉠
$1-a+c=0 \cdots$ ㉡
㉠ − ㉡ : $4a+b-c=0$
$\therefore\ b-c=-4a$
$\therefore\ 2a^2+b-c=2a^2-4a=2(a-1)^2-2$
따라서 $a=1$일 때, 최소이다.

44. 이차항의 계수가 1인 이차방정식에서 상수항을 1만큼 크게 하면 두 근이 같고, 상수항을 3만큼 작게 하면 한 근은 다른 근의 두 배가 된다고 한다. 이 때, 처음 방정식의 두 근의 제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 74

해설

처음 방정식을 $x^2+bx+c=0$이라 하면
$x^2+bx+(c+1)=0$의 근은 중근이 된다.
$\therefore\ D=b^2-4(c+1)=0$
$\therefore\ b^2=4c+4\cdots\cdots$㉠
또, $x^2+bx+(c-3)=0$의 두 근은 $\alpha,\ 2\alpha$가 된다.
$\therefore\ \alpha+2\alpha=-b\cdots\cdots$㉡
$\therefore\ \alpha\cdot 2\alpha=c-3\cdots\cdots$㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 $b=\pm 12,\ c=35$이므로
처음 방정식은 $x^2\pm 12x+35=0$
$\therefore\ x=-5$ 또는 $-7,\quad x=5$ 또는 7
따라서 (두 근의 제곱의 합)$=(\pm 5)^2+(\pm 7)^2=74$

45. 실계수의 이차방정식 $x^2+bx+c=0$이 허근 α, β를 갖고, 두 허근 사이에 $\alpha^2+2\beta=1$인 관계가 성립한다고 한다. 이 때, $b+c$의 값은?

① -1　② 1　③ 3　④ 5　⑤ 7

해설

계수가 실수이므로
$\alpha=p+qi$ 이면 $\beta=p-qi$ $(q\neq 0)$
$\alpha^2+2\beta=1$ 이므로
$(p+qi)^2+2(p-qi)=1$ 에서
$(p^2-q^2+2p-1)+2q(p-1)i=0$
$\therefore p^2-q^2+2p-1=0,\ 2q(p-1)=0$
$q\neq 0$이므로
$p=1,\ q^2=2$
$\therefore\ \alpha+\beta=2p=2,\quad \alpha\beta=p^2+q^2=3$
$\therefore\ x^2-2x+3=0$
$\therefore\ b=-2,\ c=3$
$\therefore\ b+c=1$

46. 이차함수 $y = x^2 - \left(a^2 - 4a + 3\right)x$ 의 그래프와 직선 $y = x + 12 - a^2$ 이 서로 다른 두 점에서 만나고, 두 교점이 원점에 대하여 대칭일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

이차함수 $y = x^2 - \left(a^2 - 4a + 3\right)x$ 의 그래프와 직선 $y = x + 12 - a^2$ 의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2 - \left(a^2 - 4a + 3\right)x = x + 12 - a^2$

즉, $x^2 - \left(a^2 - 4a + 4\right)x + a^2 - 12 = 0$ 의 두 근이다.

그런데 두 교점이 원점에 대하여 대칭이므로 위의 이차방정식의 두 근의 합은 0이고, 두 근의 곱은 음이다.

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여

$a^2 - 4a + 4 = 0$ 에서 $(a-2)^2 = 0 \quad \therefore a = 2$

$a^2 - 12 < 0$ 에서 $-2\sqrt{3} < a < 2\sqrt{3}$

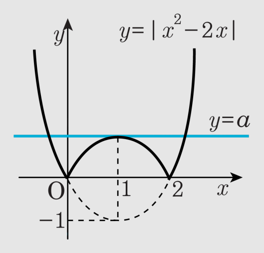
$\therefore a = 2$

47. 함수 $y = |x^2 - 2x|$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 상수 a 의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

함수 $y = |x^2 - 2x|$ 의 그래프를 그리면
아래 그림과 같다.



이때, 직선 $y = a$와 서로 다른 세 점에서 만나려면
직선 $y = a$ 가 포물선 $y = -x^2 + 2x$ 의
꼭지점을 지나야 한다.
$y = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1$ 에서
꼭지점의 좌표는 $(1, 1)$ 이므로 $y = 1$
$\therefore\ a = 1$

48. α, β, γ가 삼차방정식 $x^3-ax-3=0$의 세 근일 때, $\frac{\alpha+\beta}{\gamma^2}, \frac{\beta+\gamma}{\alpha^2}, \frac{\alpha+\gamma}{\beta^2}$를 세 근으로 하는 삼차 방정식을 구하면?

① $3x^3-ax^2+1=0$　② $x^3-ax-3=0$

③ $3x^3+ax^2+1=0$　④ $x^3+ax+3=0$

⑤ $3x^3-ax^2-1=0$

해설

x^3-ax-3

$=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$=0$에서

$\alpha+\beta+\gamma=0,$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-a,\ \alpha\beta\gamma=3$

$\therefore\ \frac{\alpha+\beta}{\gamma^2}=-\frac{\gamma}{\gamma^2}=-\frac{1}{\gamma},$

$\frac{\beta+\gamma}{\alpha^2}=-\frac{\alpha}{\alpha^2}=-\frac{1}{\alpha},$

$\frac{\alpha+\gamma}{\beta^2}=-\frac{\beta}{\beta^2}=-\frac{1}{\beta}$

따라서, $\frac{\alpha+\beta}{\gamma^2},\ \frac{\beta+\gamma}{\alpha^2},\ \frac{\alpha+\gamma}{\beta^2}$를

세 근으로 하는 방정식은

$\left(x+\frac{1}{\alpha}\right)\left(x+\frac{1}{\beta}\right)\left(x+\frac{1}{\gamma}\right)$

$=x^3+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)x^2$

$+\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\alpha\gamma}\right)x+\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$

$=x^3+\left(-\frac{a}{3}\right)x^2+\frac{1}{3}=0$

$\therefore\ 3x^3-ax^2+1=0$

49. A, B 두 사람이 어떤 물건을 3 개월 할부로 공동 구입하였다. 첫달에 A, B 중 한 사람이 다른 사람보다 돈을 많이 지불하였기 때문에 두 번째 달부터는 전달에 많이 지불한 사람은 전달보다 20 %적은 금액을 지불하고, 적게 지불한 사람은 전 달보다 3000 원 많은 금액을 지불하기로 하였다. 금액을 모두 지불하고보니 A, B는 전체 액수의 반씩을 부담하게 되었다. 이 물건을 사는 데 든 비용은 전부 얼마인가? (단, 두 번째 달의 B의 지불금액은 A의 지불금액보다 6000 원이 많았다.)

① 27000 원 ② 30000 원 ③ 81000 원
④ 162000 원 ⑤ 570000 원

해설

첫달에 A, B가 지불한 금액을 각각 x원, y원이라 하면 각자가 지불한 금액의 총합은 다음과 같다.
$A : x + 0.8x + (0.8x + 3000)$
$B : y + (y + 3000) + 0.8(y + 3000)$
따라서 $x + 0.8x + (0.8x + 3000) = y + (y + 3000) + 0.8(y + 3000) \cdots\cdots$ ㉠
$0.8x + 6000 = y + 3000 \cdots\cdots$ ㉡
또, ㉠, ㉡에서 $x = 30000$, $y = 27000$
따라서, A가 지불한 금액은
$30000 + 0.8 \times 30000 + 0.8 \times 30000 + 3000 = 81000$
그런데 물건을 사는 데 든 총 비용은 한 사람이 지불한 금액의 2 배이다.
$\therefore$ (지불한 총 금액)$= 81000 \times 2 = 162000$(원)

50. $a^2+b^2+c^2=12$, $a+b+c=4$ 이 성립할 때, c의 최댓값과 최솟값의 곱은?(단, $a,\ b,\ c$는 실수)

① $-\frac{8}{3}$　② $-\frac{4}{3}$　③ $\frac{4}{3}$　④ $\frac{8}{3}$　⑤ 4

해설

$a+b+c=4$

$\Rightarrow \quad b=4-(a+c)$

$a^2+b^2+c^2=12$

$\Rightarrow \quad a^2+c^2+\{4-(a+c)\}^2=12$

a 에 대한 내림차순으로 정리하면

$a^2+(c-4)a+c^2-4c+2=0$

a,b,c 는 실수이므로 판별식이 0 보다 크거나 같다.

$D=(c-4)^2-4(c^2-4c+2)\geq 0$

$\Rightarrow \quad 3c^2-8c-8\leq 0$

$\Rightarrow \quad \frac{4-2\sqrt{10}}{3}\leq c\leq \frac{4+2\sqrt{10}}{3}$

$\therefore$ (최댓값 $\times$ 최솟값)

$=\left(\frac{4-2\sqrt{10}}{3}\right)\left(\frac{4+2\sqrt{10}}{3}\right)$

$=-\frac{8}{3}$