

1. 다음 등식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립할 때, xy 의 값을 구하여라.

$$(2k + 3)x + (3k - 1)y + 5k - 9 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

k 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$(2x + 3y + 5)k + (3x - y - 9) = 0$$

이것은 k 에 대한 항등식이므로

$$2x + 3y + 5 = 0$$

$$3x - y - 9 = 0$$

연립방정식을 풀면 $x = 2$, $y = -3$

$$\therefore xy = 2 \times (-3) = -6$$

2. $(x+y)a - (x-y)b - (y-z)c - 4z = 0$ 이 x, y, z 의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 곱 abc 를 구하면?

① 4

② 8

③ 16

④ 32

⑤ 64

해설

x, y, z 에 대해 정리하면

$$(a-b)x + (a+b-c)y + (c-4)z = 0$$

x, y, z 에 대한 항등식이므로

$$a = b, a + b - c = 0, c = 4$$

$$\therefore a = b = 2, c = 4$$

$$\therefore abc = 16$$

3. 다항식 $x^3 + ax + b$ 가 다항식 $x^2 - x + 1$ 로 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

나누어 떨어지려면 나머지가 0이어야 하므로
 $x^2 = x - 1$ 을 대입하면
 $ax + (b - 1) = 0$
이 등식이 x 에 대한 항등식이므로,
 $a = 0, b - 1 = 0$
 $\therefore a = 0, b = 1$
 $\therefore a + b = 1$

해설

$x^3 + ax + b$
 $= (x^2 - x + 1)Q(x)$
 $= (x^2 - x + 1)(x + b)$
 $\therefore b = 1, a = 0$

4. 다항식 $8x^3 - 1$ 을 $4x^2 + 2x + 1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 할 때 $Q(x)$ 의 상수항의 계수는?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} 8x^3 - 1 &= (2x)^3 - 1^3 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) \\ \therefore Q(x) &= 2x - 1 \\ \therefore \text{상수항은 } &-1 \end{aligned}$$

5. $x^2 + y^2 + 2xy - x - y$ 을 인수분해 하면?

① $(x - y)(x + y + 1)$

② $(x + y)(x - y - 1)$

③ $(x - y)(x - y - 1)$

④ $(x + y)(x + y - 1)$

⑤ $(x + y)(x + y + 1)$

해설

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + 2xy - x - y \\ &= (x + y)^2 - (x + y) = (x + y)(x + y - 1) \end{aligned}$$

6. 다음 중 다항식 $x^4 - 5x^2 + 4$ 를 인수분해 할 때, 나타나는 인수가 아닌 것은?

① $x - 1$ ② $x - 2$ ③ $x - 3$ ④ $x + 1$ ⑤ $x + 2$

해설

$$\begin{aligned}x^4 - 5x^2 + 4 &= (x^2 - 1)(x^2 - 4) \\ &= (x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)\end{aligned}$$

7. $x^4 + 3x^2 + 4 = (x^2 + x + 2)(x^2 + ax + b)$ 일 때, 상수 a, b 의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\begin{aligned}(\text{좌 변}) &= (x^2 + 2)^2 - x^2 \\&= (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2) \\ \therefore a &= -1, b = 2 \\ \therefore ab &= -1 \times 2 = -2\end{aligned}$$

8. x^3-4x^2+x+6 을 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x+c)$ 이다. $a^2+b^2+c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ 이라 놓으면,
 $x = -1$ 일 때, $-1 - 4 - 1 + 6 = 0$
따라서, $f(x)$ 는 $(x+1)$ 로 나누어 떨어진다.
즉, $f(x)$ 는 $(x+1)$ 의 인수를 갖는다.
즉, $f(x) = (x+1)Q(x)$ 몫
 $Q(x)$ 는 조립제법으로 구한다.

-1		1	-4	1	6
			-1	5	-6
		1	-5	6	0

$f(x) = (x^2 - 5x + 6)(x + 1)$
 $\therefore f(x) = (x - 3)(x - 2)(x + 1)$
 $\therefore a^2 + b^2 + c^2 = (-3)^2 + (-2)^2 + 1^2 = 14$

9. 두 다항식 $x^3 - 3x^2 + 2x$, $x^4 - 4x^3 + 4x^2$ 의 최대공약수와 최소공배수를 각각 $f(x)$, $g(x)$ 라 할 때, $f(3) + g(3)$ 의 값을 구하면?

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-2)(x-1)$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 = x^2(x-2)^2$$

$$\therefore f(x) = x(x-2), g(x) = x^2(x-1)(x-2)^2$$

$$\therefore f(3) + g(3) = 3 + 18 = 21$$

10. 두 다항식 $x^2 - 4x + 3a + b$ 와 $x^2 + bx - 6$ 의 최대공약수가 $x - 2$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 8

해설

$$f(x) = x^2 - 4x + 3a + b,$$

$$g(x) = x^2 + bx - 6 \text{ 이라 하면}$$

$f(x)$ 와 $g(x)$ 는 모두 $x - 2$ 로 나누어떨어지므로

$$f(2) = g(2) = 0 \text{ 에서}$$

$$f(2) = 4 - 8 + 3a + b = 0, g(2) = 4 + 2b - 6 = 0$$

$$\therefore a = 1, b = 1 \therefore a + b = 2$$

11. 두 다항식 A, B 에 대하여 $A + B = -x^3 - 2x^2 + 4x + 5$, $2A - B = 4x^3 - x^2 - x + 1$ 일 때, 두 다항식 A, B 를 구하면?

① $A = x^3 + x^2 + x + 2$, $B = -2x^3 - 3x^2 + 3x + 3$

② $A = x^3 - x^2 + x + 2$, $B = -2x^3 - x^2 + 3x + 3$

③ $A = x^3 - x^2 + x - 2$, $B = -2x^3 - x^2 + 3x + 7$

④ $A = x^3 - x^2 - x + 2$, $B = -2x^3 - x^2 + 5x + 3$

⑤ $A = 3x^3 - 3x^2 + 3x + 6$, $B = -4x^3 + x^2 + x - 1$

해설

$$A + B = -x^3 - 2x^2 + 4x + 5 \cdots \textcircled{1}$$

$$2A - B = 4x^3 - x^2 - x + 1 \cdots \textcircled{2}$$

$$(\textcircled{1} + \textcircled{2}) \div 3 : A = x^3 - x^2 + x + 2$$

$$(2\textcircled{1} - \textcircled{2}) \div 3 : B = -2x^3 - x^2 + 3x + 3$$

12. 다음은 연산법칙을 이용하여 $(x+3)(x+2)$ 를 계산한 식이다.

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x + (x+3)\times 2 \\ &= (x^2+3x) + (2x+6) \\ &= x^2 + (3x+2x) + 6 \\ &= x^2 + 5x + 6\end{aligned}$$

위의 연산과정에서 사용한 연산법칙을 바르게 고른 것은?

- ① 교환법칙, 결합법칙
- ② 교환법칙, 분배법칙
- ③ 분배법칙, 결합법칙
- ④ 결합법칙, 분배법칙, 교환법칙
- ⑤ 연산법칙을 사용하지 않았다.

해설

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x + (x+3)\times 2 \text{ (분배)} \\ &= (x^2+3x) + (2x+6) \text{ (분배)} \\ &= x^2 + (3x+2x) + 6 \text{ (결합)} \\ &= x^2 + 5x + 6\end{aligned}$$

13. 다음 안에 알맞은 수를 차례대로 써 넣어라.

$$(x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div (\text{}x^2 + \text{}x + \text{) = x + 2$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -1

해설

$\text{}x^2 + \text{}x + \text{} = A$ 라 하면
 $(x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div A = x + 2$
 $\therefore A = (x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div (x + 2)$
 $\therefore A = x^2 + 2x - 1$ 이므로
안에 알맞은 수는 차례대로 1, 2, -1 이다.

14. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 2$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나눈 나머지가 $x + 3$ 이 되도록 a, b 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -6$

해설

검산식을 사용

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 = (x^2 - x + 1) \cdot A + (x + 3)$$

$$A = (x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 - (x + 3) = (x^2 - x + 1)(x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + (b - 1)x - 1 = (x^2 - x + 1)(x - 1) \quad \therefore p = -1$$

우변을 정리하면

$$\therefore a = -2, b = 3$$

$$\therefore ab = -6$$

15. 다항식 $f(x)$ 를 $x + \frac{1}{3}$ 으로 나누었을 때, 몫과 나머지를 $Q(x)$, R 라고 한다. 이 때, $f(x)$ 를 $3x + 1$ 으로 나눈 몫과 나머지를 구하면?

① $Q(x), R$

② $3Q(x), 3R$

③ $3Q(x), R$

④ $\frac{1}{3}Q(x), R$

⑤ $\frac{1}{3}Q(x), \frac{1}{3}R$

해설

$$f(x) = Q(x) \left(x + \frac{1}{3} \right) + R = \frac{1}{3} Q(x) (3x + 1) + R$$

16. $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^3-b^3)$ 의 전개식으로 옳은 것은?

① a^3+b^3

② a^6+b^6

③ a^6-b^6

④ a^9+b^9

⑤ a^9-b^9

해설

(준 식) $= (a^3+b^3)(a^3-b^3) = a^6-b^6$

17. $a + b + c = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 일 때, $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ 1 ⑤ 4

해설

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ 에 대입하면

$$ab + bc + ca = -\frac{1}{2}$$

$$(ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c)$$

$$\frac{1}{4} = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c)$$

$$\text{따라서 } a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \frac{1}{4}$$

18. 등식 $(x+1)(x-1)(x^3-x^2+x-1) = x^5-x^4+ax-b$ 가 항상 성립하도록 a, b 값을 정할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

양변에 $x=1$ 을 대입하면, $0=a-b \cdots \textcircled{㉠}$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면, $0=-2-a-b \cdots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 $a=b=-1$

$\therefore a+b=-2$

19. $\frac{2x+3a}{4x+1}$ 가 x 에 관계없이 일정한 값을 가질 때, $12a$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12a = 2$

해설

$\frac{2x+3a}{4x+1} = k$ (일정값 = k)라 놓으면 $2x+3a = k(4x+1)$ 에서

$$(2-4k)x + 3a - k = 0$$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로,

$$2-4k = 0, 3a - k = 0$$

$$k = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } 3a = k \text{ 에서 } a = \frac{1}{6}$$

$$\therefore 12a = 2$$

20. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$, $x-2$ 로 나눈 나머지가 각각 1, 2일 때, $f(x)$ 를 x^2-3x+2 로 나눈 나머지를 구하면?

① $x-1$

② $x+1$

③ $-x+1$

④ x

⑤ $-x$

해설

$$f(x) = (x-1)Q_1(x) + 1 \Rightarrow f(1) = 1$$

$$f(x) = (x-2)Q_2(x) + 2 \Rightarrow f(2) = 2$$

$$f(x) = (x-1)(x-2)Q_3(x) + ax + b \text{라 하면,}$$

$$f(1) = a + b = 1, \quad f(2) = 2a + b = 2 \text{이다.}$$

$$\therefore a = 1, \quad b = 0 \text{이므로 나머지는 } x$$

21. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나누었을 때의 나머지가 $x + 4$ 이고, $x^2 - 4x + 3$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $2x + 3$ 일 때, $f(x)$ 를 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ 으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$ 라 하자. 이때 $R(10)$ 의 값은?
- ① 86 ② 88 ③ 90 ④ 92 ⑤ 94

해설

$$f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + x + 4$$

$$\cdots f(1) = 5, f(2) = 6 \cdots \textcircled{\tiny \text{㉠}}$$

$$f(x) = (x-1)(x-3)P(x) + 2x + 3$$

$$\cdots f(1) = 5, f(3) = 9 \cdots \textcircled{\tiny \text{㉡}}$$

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)Z(x) + R(x)$$

$$R(x) = ax^2 + bx + c \cdots \textcircled{\tiny \text{㉢}}$$

㉠, ㉡를 ㉢에 각각 대입하면,

$$a + b + c = 5, 4a + 2b + c = 6, 9a + 3b + c = 9$$

세식을 연립하여 풀면, $a = 1, b = -2, c = 6$

$$R(x) = x^2 - 2x + 6$$

$$\therefore R(10) = 86$$

22. x 에 대한 다항식 $2x^3 - 5x^2 + ax + b$ 가 다항식 $x^2 - x + 2$ 로 나누어떨어지도록 상수 a, b 의 값을 정하면?

- ① $a = 7, b = -6$ ② $a = 6, b = -5$ ③ $a = 5, b = -3$
④ $a = 4, b = -5$ ⑤ $a = 3, b = 7$

해설

직접 나누면

몫이 $2x - 3$, 나머지가 $(a - 7)x + b + 6$ 이므로

$$2x^3 - 5x^2 + ax + b$$

$$= (x^2 - x + 2)(2x - 3) + (a - 7)x + b + 6$$

$x^2 - x + 2$ 로 나누어떨어지기 위해서는 나머지가 0이어야 하므로

$$(a - 7)x + b + 6 = 0$$

$$\therefore a = 7, b = -6$$

23. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 1$ 를 $x + 1$ 로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

$$\begin{array}{r|rrrr} k & 1 & a & b & 1 \\ & & c & d & 1 \\ \hline & 1 & 3 & -1 & 2 \end{array}$$

- ① $a = 3$ ② $b = 2$ ③ $c = -1$
 ④ $d = -3$ ⑤ $k = -1$

해설

다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 1$ 를 $x + 1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & a & b & 1 & \\ & & -1 & -a+1 & -b+a-1 & \\ \hline & 1 & a-1 & b-a+1 & -b+a & \end{array}$$

이때 $k = -1, c = -1, d = -a + 1, b - a + 1 = -1, -b + a = 2$ 이므로
 $k = -1, c = -1, a = 4, b = 2, d = -3$
 따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

24. $3x^3 - 5x + 2 = a(x - 1)^3 + b(x - 1)^2 + c(x - 1) + d$ 이 x 에 대한
항등식일 때, $a + b + c + d$ 의 값은?

- ① -16 ② 16 ③ 20 ④ 23 ⑤ 25

해설

$$a(x - 1)^3 + b(x - 1)^2 + c(x - 1) + d = (x - 1) \{ a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c \} + d$$
$$= (x - 1)(x - 1)[a(x - 1) + b] + c + d \text{ 이므로}$$
조립제법을 쓰면

1	3	0	-5	2	
		3	3	-2	
1	3	3	-2	0	← d
		3	6		
1	3	6	4		← c
		3			
	3	9			← b
	↑				
	a				

$$a + b + c + d = 3 + 9 + 4 + 0 = 16$$

해설

이 문제의 경우 계수의 합을 구하는 것이므로 양변에 $x = 2$ 를
대입해서 한꺼번에 구하는 값을 얻을 수 있다.

25. x 에 대한 항등식 $x^3 - 1 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$ 를 만족하는 상수 a, b, c, d 의 곱 $abcd$ 의 값은?

- ① -2
- ② 0
- ③ 5
- ④ 10
- ⑤ 18

해설

$$a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$$
$$= (x+1)[(x+1)(a(x+1)+b)+c]+d$$

임을 이용하여 조립제법을 사용하면

-1		1	0	0	-1	
			-1	1	-1	
-1		1	-1	1	-2	← d
			-1	2		
-1		1	-2	3		← c
			-1			
		1	-3			← b
		↑				
		a				

$$\therefore abcd = 1 \times (-3) \times 3 \times (-2) = 18$$

26. $x = 1001$ 일 때, $\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4 + 1)(x^2 - 1)}{(x^4 + 1)(x + 1)} \\ &= x - 1 \\ &= 1001 - 1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

27. 이차항의 계수가 1인 두 이차 다항식의 최소공배수가 $x^3 + 6x^2 - x - 30$ 이고, 최대공약수가 $x - 2$ 일 때, 두 다항식의 합을 바르게 구한 것은?

- ① $2x^2 + 4x - 16$ ② $2x^2 + 3x - 8$ ③ $x^2 - 5x - 1$
- ④ $2x^2 + x + 4$ ⑤ $x^2 + 2x + 5$

해설

두 이차 다항식을 $A = a(x - 2)$, $B = b(x - 2)$ (a , b 는 서로소) 라고 하면

$$L = x^3 + 6x^2 - x - 30 = abG = ab(x - 2) \text{ 이고,}$$

L 을 인수분해하면

$$L = (x - 2)(x^2 + 8x + 15) =$$

$$\frac{(x - 2)}{G} \frac{(x + 3)(x + 5)}{ab}$$

따라서, 두 다항식은

$$(x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6$$

$$(x - 2)(x + 5) = x^2 + 3x - 10 \text{ 이므로}$$

두 다항식의 합은

$$(x^2 + x - 6) + (x^2 + 3x - 10) = 2x^2 + 4x - 16$$

28. 세 실수 a, b, c 가 다음 세 조건을 만족한다.

$$a + b + c = 1, \quad ab + bc + ca = 1, \quad abc = 1$$

이 때, $(a + b)(b + c)(c + a)$ 의 값은?

- ① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} &a + b + c = 1 \text{에서} \\ &a + b = 1 - c, \quad b + c = 1 - a, \quad c + a = 1 - b \\ &(a + b)(b + c)(c + a) \\ &= (1 - c)(1 - a)(1 - b) \\ &= 1 - (a + b + c) + (ab + bc + ca) - abc \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

29. $a = (3 + 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1) \cdots (3^{1024} + 1)$ 이라고 할 때 곱셈 공식을 이용하여 a 의 값을 지수의 형태로 나타내면 $\frac{1}{k}(3^l + m)$ 이다. 이 때, $k + l + m$ 의 값을 구하면?

- ① 2046 ② 2047 ③ 2048 ④ 2049 ⑤ 2050

해설

$$a = (3 + 1)(3^2 + 1) \cdots (3^{1024} + 1)$$

양변에 $(3 - 1)$ 을 곱하면
$$(3 - 1)a = (3 - 1)(3 + 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1) \cdots (3^{1024} + 1)$$

$$2a = (3^2 - 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1) \cdots (3^{1024} + 1)$$

$$= (3^4 - 1)(3^4 + 1) \cdots (3^{1024} + 1)$$

$$= (3^8 - 1) \cdots (3^{1024} + 1)$$

$$\vdots$$

$$= (3^{2048} - 1)$$

양변을 2로 나누면
$$a = \frac{1}{2}(3^{2048} - 1)$$

$$\therefore k = 2, l = 2048, m = -1$$

$$\therefore k + l + m = 2049$$

30. $x^2 + x + 1 = 0$ 일 때, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$x^2 + x + 1 = 0$ 에서 양변을 x 로 나누면

$$x + \frac{1}{x} = -1$$

$$\therefore x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= -1 - 3 \cdot (-1) = 2$$

31. $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ 이고 $abc = 1$ 일 때, $(a^3 + b^3 + c^3)^2$ 의 값을 계산하면?

- ① 1 ② 4 ③ 9 ④ 16 ⑤ 25

해설

$$\begin{aligned} &a^3 + b^3 + c^3 \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\ &= (a + b + c) \times 0 + 3abc = 0 + 3 \cdot (1) = 3 \\ &\therefore (a^3 + b^3 + c^3)^2 = 9 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} &a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \quad a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = 0 \\ &\frac{1}{2} \{ (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \} = 0 \\ &\therefore a = b = c \rightarrow abc = a^3 = b^3 = c^3 = 1 \\ &(a^3 + b^3 + c^3)^2 = (1 + 1 + 1)^2 = 9 \end{aligned}$$

32. $a(a+1)=1$ 일 때, $\frac{a^4-a^2}{a^6-1}$ 의 값은?

① 1

② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{4}$

⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$$a(a+1)=1 \text{ 에서}$$

$$a^2=-a+1$$

$$a^4=(-a+1)^2=a^2-2a+1$$

$$=(-a+1)-2a+1=-3a+2$$

$$a^6=a^4 \times a^2=(-3a+2)(-a+1)$$

$$=3a^2-5a+2=3(-a+1)-5a+2$$

$$=-8a+5$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{a^4-a^2}{a^6-1} &= \frac{-3a+2-(-a+1)}{-8a+5-1} \\ &= \frac{-2a+1}{-8a+4} = \frac{-2a+1}{4(-2a+1)} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

33. 2가 아닌 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{ax^2+4x+b}{x-2}$ 의 값이 항상 일정하도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a-b$ 의 값은?

- ① 5
- ② 6
- ③ 7
- ④ 8
- ⑤ 9

해설

$\frac{ax^2+4x+b}{x-2} = k$ 라 하면
 $ax^2+4x+b = k(x-2)$
 $ax^2+(4-k)x+b+2k=0$
 x 에 대한 항등식이므로
 $a=0$
 $4-k=0$ 에서 $k=4$
 $b+2k=0$ 에서 $b=-8$
 $\therefore a-b=8$

해설

주어진 식이 모든 x 에 대해 일정한 값을 가지려면
분자인 ax^2+4x+b 가 분모인 ' $x-2$ ' 만을 인수로 가져야 한다.
즉, 분자가 $k(x-2)$ 가 되어야 한다.
 $\frac{ax^2+4x+b}{x-2} = \frac{4(x-2)}{x-2} = 4$
 $\therefore a=0, b=-8$ 에서 $a-b=8$

34. 이차식 $f(x)$ 를 각각 $x-3, x+1$ 로 나눈 나머지는 같고, $f(1) = 0$ 일 때,
 $\frac{f(4)}{f(-4)} = \frac{n}{m}$ (m, n 은 서로소)이다. 이 때, $m+n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

$f(1) = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$ 을 인수로 갖는다.

$\therefore f(x) = (x-1)(ax+b)$

$f(3) = f(-1)$ 이므로 $2(3a+b) = -2(-a+b)$

$\therefore a = -b$

$\frac{f(4)}{f(-4)} = \frac{3(4a+b)}{-5(-4a+b)} = \frac{-9b}{-25b} = \frac{9}{25}$

$\therefore m = 25, n = 9$

35. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 가 $b^3 - ac^2 + a^2b + ab^2 + a^3 - bc^2 = 0$ 인 관계를 만족할 때, 이 삼각형의 모양은?

- ① 정삼각형

② 직각삼각형

③ 이등변삼각형

④ 둔각삼각형

⑤ 직각이등변삼각형

해설

차수가 가장 낮은 c 에 대한 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해한다.

$-(a + b)c^2 + a^3 + a^2b + b^3 + ab^2 = 0$

$-(a + b)c^2 + a^2(a + b) + b^2(a + b) = 0$

$-(a + b)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$

$(a + b \neq 0)$

$c^2 - a^2 - b^2 = 0$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2$

$\therefore C = 90^\circ$ 인 직각삼각형

36. 인수분해 공식 $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ 을 이용하여 $\frac{9999^3 + 1}{9998 \times 9999 + 1}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10000

해설

9999 = a 라 하면

$$\begin{aligned}\frac{9999^3 + 1}{9998 \times 9999 + 1} &= \frac{a^3 + 1}{(a - 1)a + 1} \\ &= \frac{(a + 1)(a^2 - a + 1)}{a^2 - a + 1} \\ &= a + 1 = 10000\end{aligned}$$

37. $a(a+1)=1$ 일 때, $\frac{a^6-1}{a^4-a^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned}\frac{a^6-1}{a^4-a^2} &= \frac{(a^3+1)(a^3-1)}{a^2(a^2-1)} \\ &= \frac{(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)}{a^2(a+1)(a-1)} \\ &= \frac{(a^2-a+1)(a^2+a+1)}{a^2} \leftarrow a^2=1-a \text{ 대입} \\ &= \frac{2(1-a) \times 2}{1-a} = 4\end{aligned}$$

38. 두 다항식 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ 과 $3x^3 + (a-9)x^2 - ax - 6a$ 의 최대공약수가 이차식일 때, a 의 값은?

① 1

② -1

③ 2

④ -2

⑤ 3

해설

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x-3)(x+2)$$

$$3x^3 + (a-9)x^2 - ax - 6a \text{에}$$

$$x=3 \text{ 대입, } 81+9a-81-3a-6a=0$$

$$x=-2 \text{ 대입, } -24+4a-36+2a-6a \neq 0 \text{ 이므로}$$

$$x-1 \text{ 을 인수로 가져야 한다.}$$

$$x=1 \text{ 대입 } 3+a-9-a-6a=0, a=-1$$

39. 두 다항식 $x^2 + 3x + p$, $x^2 + px + q$ 의 최소공배수가 $x^3 - 13x + 12$ 일 때, $p + q$ 의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$x^3 - 13x + 12 = (x - 1)(x - 3)(x + 4)$ 두 다항식의 곱이 4차식이고 최소공배수가 3차식이므로 최대공약수는 1차식이다.

($\because AB = GL$)

i) G.C.M. = $x - 1$ 이면 $p = -4$, $q = 3$

이 때 두 식은 $(x - 1)(x + 4)$, $(x - 1)(x - 3)$ 이므로 조건에 맞는다.

ii) G.C.M. = $x - 3$ 이면 $p = -18$, $q = 45$

이 때 두 식은 $(x - 3)(x + 6)$, $(x - 3)(x - 15)$ 이므로 조건에 맞지 않는다.

iii) G.C.M. = $x + 4$ 일 때도 ii)와 같음

i), ii), iii)에서 $p + q = -1$

40. 두 다항식 $2x^2 + px + q$, $4x^2 + rx + s$ 의 최대공약수가 $2x + 1$ 이고 곱이 $8x^4 + 4x^3 - 62x^2 - 61x - 15$ 일 때, $p + q + r + s$ 의 합은?

- ① 1
- ② 3
- ③ 5
- ④ 7
- ⑤ 9

해설

두 다항식을 $A = aG$, $B = bG$ (a , b 는 서로소)라고 하면
 $AB = abG^2$ 이므로
 $8x^4 + 4x^3 - 62x^2 - 61x - 15 = ab(2x + 1)^2$
 $\therefore 8x^4 + 4x^3 - 62x^2 - 61x - 15$
 $= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 (8x^2 - 4x - 60)$
 $= (2x + 1)^2 (2x^2 - x - 15)$
 $= (2x + 1)^2 (x - 3)(2x + 5)$
 $\therefore 2x^2 + px + q = (2x + 1)(x - 3) = 2x^2 - 5x - 3,$
 $4x^2 + rx + s = (2x + 1)(2x + 5) = 4x^2 + 12x + 5$ 이므로
 $p = -5, q = -3, r = 12, s = 5$
 $\therefore p + q + r + s = 9$

41. $\frac{10^{85}}{10^{15} + 10^5} = k \times 10^n$ (단, $0 < k < 10$, n 은 자연수)로 나타낼 때, n 의 값을 구하면?

- ① 72 ② 71 ③ 70 ④ 69 ⑤ 68

해설

$$\frac{10^{85}}{10^{15} + 10^5} = N \text{이라고 하면}$$
$$\frac{10^{85}}{10^{15} + 10^{15}} < N < \frac{10^{85}}{10^{15}}$$
$$\frac{10 \times 10^{84}}{2 \times 10^{15}} < N < \frac{10 \times 10^{84}}{10^{15}}$$
$$5 \times 10^{69} < N < 10 \times 10^{69}$$

따라서 $N = k \times 10^{69} (5 < k < 10)$
 $\therefore n = 69$

42. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c}$ 일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?
- ① 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형
 - ② 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형
 - ③ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형
 - ④ $a = b$ 인 이등변삼각형
 - ⑤ $b = c$ 인 이등변삼각형

해설

$$\begin{aligned} \frac{a-b+c}{a+b+c} &= \frac{-a-b+c}{a-b-c} \text{에서} \\ (a-b+c)(a-b-c) &= (a+b+c)(-a-b+c) \\ (a-b+c)(a-b-c) + (a+b+c)(a+b-c) &= 0 \\ (\text{좌변}) \\ &= \{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\} + \{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\} \\ &= (a-b)^2 - c^2 + (a+b)^2 - c^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2 - c^2 + a^2 + 2ab + b^2 - c^2 \\ &= 2a^2 + 2b^2 - 2c^2 \\ \text{따라서, } 2a^2 + 2b^2 - 2c^2 &= 0 \text{ 이므로 } a^2 + b^2 = c^2 \\ \text{그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 } c \text{인 직각삼각형이다.} \end{aligned}$$

43. $a^3 + b^3 + c^3 = p(a + b + c)^3 + q(a + b + c)(ab + bc + ca) + rabc$ 가 a, b, c 에 대한 항등식이 되도록 상수 p, q, r 의 값을 정할 때, $p + q + r$ 을 구하면?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ -23 ⑤ 23

해설

$a^3 + b^3 + c^3 = p(a + b + c)^3 + q(a + b + c)(ab + bc + ca) + rabc$ 에서 a, b, c 에 대한 항등식이므로
 $a = 1, b = 0, c = 0 : 1 = p \cdots$ ①
 $a = 1, b = 1, c = 0 : 2 = 2p + 2q \cdots$ ②
 $a = 1, b = 1, c = 1 : 3 = 27p + 9q + r \cdots$ ③
①, ②, ③에서 $p = 1, q = 0, r = -24$
 $\therefore p + q + r = -23$

44. $(1-x-x^2)^{50} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{99}x^{99} + a_{100}x^{100}$ 라 할 때,
 $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{100} = A$, $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99} = B$ 에 대하여
 $A + 2B$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 100 ⑤ 1024

해설

- (i) 양변에 $x = 1$ 을 대입하면
 $1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{99} + a_{100} \cdots \textcircled{1}$
 양변에 $x = -1$ 을 대입하면
 $1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{99} + a_{100} \cdots \textcircled{2}$
 (ii) $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 하면 $2 = 2(a_0 + a_2 + \cdots + a_{100})$
 $\therefore a_0 + a_2 + \cdots + a_{100} = 1$
 $\therefore A = 1$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 하면
 $0 = 2(a_1 + a_3 + \cdots + a_{99})$
 $a_1 + a_3 + \cdots + a_{99} = 0 \quad \therefore B = 0$
 $\therefore A + 2B = 1$

45. 삼차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(-1) = f(1) = f(2) = 3$ 일 때 $f(-2)$ 의 값은?

① -5 ② -6 ③ -7 ④ -8 ⑤ -9

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x-1)(x-2) + 3 \\ \therefore f(-2) &= -9 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + ax^2 + bx + c \text{라 하면} \\ \text{i) } f(-1) &= 3 \text{에서 } a - b + c - 1 = 3 \\ \text{ii) } f(1) &= 3 \text{에서 } a + b + c + 1 = 3 \\ \text{iii) } f(2) &= 3 \text{에서 } 4a + 2b + c + 8 = 3 \\ \text{위의 세식을 연립하여 풀면,} \\ a &= -2, b = -1, c = 5 \\ \therefore f(x) &= x^3 - 2x^2 - x + 5 \\ \therefore f(-2) &= -8 - 8 + 2 + 5 = -9 \end{aligned}$$

46. $x-1$ 로 나누면 나머지가 1이고, $x+1$ 로 나누면 나머지가 -1 인 다항식 $f(x)$ 가 있다. $f(x)$ 를 x^2-1 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하자. $f(0)=0$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ☐

$Q(0)=0$ 이다.
- ☐

$f(x)$ 는 이차식이 될 수 없다.
- ☐

$f(x)$ 가 삼차식이면 $f(x)=x^3$ 이다

- ①

☐
- ②

☐
- ③

☒

☐

☐
- ④

☐

☐

☐
- ⑤

☐

☐

☐

☐

해설

$f(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$
 $f(1)=a+b=1, \quad f(-1)=-a+b=-1$
 $\therefore a=1, b=0$
 $\therefore f(x)=(x^2-1)Q(x)+x$
㉠ $f(0)=-Q(0)=0 \quad \therefore$ 참
㉡ $f(x)$ 가 이차식이기 위해서는 $Q(x)$ 가 0이 아닌 상수이어야 하는데 $Q(0)=0$ 이므로 그런 경우는 없다. $\therefore$ 참
㉢ $Q(0)=0$ 이므로 $Q(x)=ax \ (a \neq 0)$
 $\therefore f(x)=ax(x^2-1)+x \ (a \neq 0) \quad \therefore$ 거짓

47. 다항식 $f(x)$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 몫을 $Q_1(x)$, $Q_1(x)$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 몫을 $Q_2(x)$ 라 한다. 이와 같은 과정을 계속할 때, $Q_n(x)$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 몫을 $Q_{n+1}(x)$ 라 한다. $f(x)$ 를 $(x - \alpha)^n$ 으로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(x)$ 의 값은?

① 0

② α

③ $f(\alpha)$

$$\textcircled{4} \quad Q_n(\alpha)$$
$$\textcircled{5} \quad Q_{n+1}(\alpha)$$

해설

$f(x)$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 몫을 $Q_1(x)$, 나머지를 R_1 이라 하면

$f(x)$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 몫을 $Q_1(x)$, 나머지를 R_1 이라 하면

$$f(x) = (x - \alpha)Q_1(x) + R_1 \text{ 에서}$$

$Q_n(x)$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 나머지를 R_{n+1} 이라 하면

$$f(x) = (x - \alpha) \{ (x - \alpha) Q_2(x) + R_2 \} + R_1$$
$$\begin{aligned} f(x) &= (x - \alpha) \{ (x - \alpha) Q_2(x) + R_2 \} + R_1 \\ &= (x - \alpha)^2 O_2(x) + (x - \alpha) R_2 + R_1 \end{aligned}$$
$$= (x - \alpha)^2 \{ (x - \alpha) Q_3(x) + R_3 \} + ($$
$$= (x - \alpha)^3 Q_3(x) + (x - \alpha)^2 R_3 + (x - \alpha) S_3 + T_3$$
$$= (x-a) \cdot Q_3(x) + (x-a) \cdot K_3 + (x-a)K_2 + K_1$$
$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$$
$$= (x - \alpha)^n Q_n(x) + (x - \alpha)^{n-1} R_n + \dots + (x - \alpha)^0 R_0$$

따라서 $f(x)$ 를 $(x - \alpha)^n$ 으로 나눈 나머지는

따라서 $f(x)$
 $R(x)$ 라 하면

$$R(x) = (x - \alpha)^{n-1}R_1 + \cdots + (x - \alpha)R_{n-1} + R_n$$
$$\therefore R(\alpha) = R_1 = f(\alpha)$$
$$\therefore R(\alpha) = R_1 = f(\alpha)$$

48. $f(x)$ 는 다항식으로 $\{f(x)\}^3$ 을 x^2 으로 나누면 나머지는 $x+1$ 이라고 한다. $f(x)$ 를 x^2 으로 나눌 때, 나머지는?

- ① $x + \frac{1}{3}$ ② $x + \frac{1}{2}$ ③ $\frac{x}{3} + 1$ ④ $\frac{x}{2} + 1$ ⑤ $\frac{x}{5} + 1$

해설

$f(x)$ 를 x^2 으로 나눈 몫을 $Q(x)$
나머지를 $ax+b$ 라 하면
 $f(x) = x^2Q(x) + ax + b$
 $\{f(x)\}^3 = \{x^2Q(x) + ax + b\}^3$
이것을 $x^2P(x) + (ax+b)^3$ 이라 하면
 $\{f(x)\}^3$ 을 x^2 으로 나눈 나머지는
 $(ax+b)^3$ 을 x^2 으로 나눈 나머지와 같으므로
 $(ax+b)^3 = a^3x^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x + b^3$ 에서
 $3ab^2x + b^3 = x + 1$
 $\therefore 3ab^2 = 1, b^3 = 1$
 $\therefore a = \frac{1}{3}, b = 1$
 $\therefore ax + b = \frac{x}{3} + 1$

49. 다항식 $f(x)$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나눈 나머지가 $2x+1$ 이고, $(x-2)^3$ 으로 나눈 나머지가 x^2-x+6 이다. $f(x)$ 를 $(x+1)(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지는?

① $3x+1$

② $3x-2$

③ $3x+2$

④ x^2-2x+1

⑤ x^2-x+6

해설

$$f(x) = (x+1)^2 A(x) + 2x+1 \text{ 에서 } f(-1) = -1$$

$$f(x) = (x-2)^3 B(x) + x^2 - x + 6$$

$$= (x-2)^3 B(x) + (x-2)^2 + 3x+2$$

$$= (x-2)^2 ((x-2)B(x) + 1) + 3x+2$$

즉 $f(x)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지는 $3x+2$

구하는 나머지를 ax^2+bx+c 라 하면

$$f(x) = (x+1)(x-2)^2 Q(x) + ax^2 + bx + c$$

$$= (x+1)(x-2)^2 Q(x) + a(x-2)^2 + 3x+2$$

$$f(-1) = 9a - 1 = -1 \quad \therefore a = 0$$

$$ax^2 + bx + c = a(x-2)^2 + 3x+2$$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $3x+2$

50. 다음 식 $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$ 의 인수가 아닌 것은?

① $a+b$

② $b+c$

③ $c+a$

④ $b-a$

⑤ $-b-c$

해설

전개하여 a 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$$

$$= (b+c)a^2 + (b^2+2bc+c^2)a + bc(b+c)$$

$$= (b+c)\{a^2 + (b+c)a + bc\}$$

$$= (b+c)(a+b)(a+c)$$

∴ ④ $b-a$ 는 인수가 아니다