1. 다음 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립할 때, xy의 값을 구하여라.

$$(2k+3)x+(3k-1)y+5k-9=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

k에 대하여 내림차순으로 정리하면

$(2x+3y+5)k+(3x-y-9)=0$

이것은 k에 대한 항등식이므로

$2x+3y+5=0$

$3x-y-9=0$

연립방정식을 풀면 $x=2,\ y=-3$

$\therefore\ xy=2\times(-3)=-6$

2. $(x+y)a-(x-y)b-(y-z)c-4z=0$이 $x,\ y,\ z$의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 곱 abc를 구하면?

① 4　② 8　③ 16　④ 32　⑤ 64

해설

x, y, z에 대해 정리하면

$(a-b)x+(a+b-c)y+(c-4)z=0$

$x,\ y,\ z$에 대한 항등식이므로

$a=b,\ a+b-c=0,\ c=4$

$\therefore\ a=b=2,\ c=4$

$\therefore\ abc=16$

3. 다항식 $x^3 + ax + b$가 다항식 $x^2 - x + 1$로 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

나누어 떨어지려면 나머지가 0이어야 하므로
$x^2 = x - 1$을 대입하면
$ax + (b - 1) = 0$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로,
$a = 0,\ b - 1 = 0$
$\therefore\ a = 0,\ b = 1$
$\therefore a + b = 1$

해설

$x^3 + ax + b$
$= (x^2 - x + 1)Q(x)$
$= (x^2 - x + 1)(x + b)$
$\therefore\ b = 1,\ a = 0$

4. 다항식 $8x^3-1$을 $4x^2+2x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때 $Q(x)$의 상수항의 계수는?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$8x^3-1=(2x)^3-1^3=(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)$

$\therefore Q(x)=2x-1$

$\therefore$상수항은 -1

5. $x^2 + y^2 + 2xy - x - y$을 인수분해 하면?

① $(x-y)(x+y+1)$

② $(x+y)(x-y-1)$

③ $(x-y)(x-y-1)$

④ $(x+y)(x+y-1)$

⑤ $(x+y)(x+y+1)$

해설

$x^2 + y^2 + 2xy - x - y$

$= (x+y)^2 - (x+y) = (x+y)(x+y-1)$

6. 다음 중 다항식 $x^4 - 5x^2 + 4$를 인수분해 할 때, 나타나는 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $x-1$ ② $x-2$ ③ $x-3$ ④ $x+1$ ⑤ $x+2$

해설

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^2 + 4 &= (x^2-1)(x^2-4) \\ &= (x+1)(x-1)(x+2)(x-2) \end{aligned}$$

7. $x^4+3x^2+4=(x^2+x+2)(x^2+ax+b)$ 일 때, 상수 a, b 의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\begin{aligned}(\text{좌 변}) &= (x^2+2)^2-x^2\\ &= (x^2+x+2)(x^2-x+2)\end{aligned}$$

$\therefore\ a=-1,\ b=2$

$\therefore ab=-1\times 2=-2$

8. x^3-4x^2+x+6을 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x+c)$이다. $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$이라 놓으면,
$x = -1$일 때, $-1 - 4 - 1 + 6 = 0$
따라서, $f(x)$는 $(x+1)$로 나누어 떨어진다.
즉, $f(x)$는 $(x+1)$의 인수를 갖는다.
즉, $f(x) = (x+1)Q(x)$꼴
$Q(x)$는 조립제법으로 구한다.

-1	1	-4	1	6
		-1	5	-6
	1	-5	6	0

$f(x) = (x^2 - 5x + 6)(x+1)$
$\therefore\ f(x) = (x-3)(x-2)(x+1)$
$\therefore\ a^2 + b^2 + c^2 = (-3)^2 + (-2)^2 + 1^2 = 14$

9. 두 다항식 x^3-3x^2+2x, $x^4-4x^3+4x^2$ 의 최대공약수와 최소공배수를 각각 $f(x), g(x)$ 라 할 때, $f(3)+g(3)$ 의 값을 구하면?

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

$x^3-3x^2+2x = x(x-2)(x-1)$
$x^4-4x^3+4x^2 = x^2(x-2)^2$
$\therefore f(x) = x(x-2), g(x) = x^2(x-1)(x-2)^2$
$\therefore f(3)+g(3) = 3+18 = 21$

10. 두 다항식 $x^2-4x+3a+b$와 x^2+bx-6의 최대공약수가 $x-2$일 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 8

해설

$f(x)=x^2-4x+3a+b,$
$g(x)=x^2+bx-6$이라 하면
$f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x-2$로 나누어떨어지므로
$f(2)=g(2)=0$에서
$f(2)=4-8+3a+b=0,\ g(2)=4+2b-6=0$
$\therefore\ a=1,\ b=1 \therefore\ a+b=2$

11. 두 다항식 $A,\ B$ 에 대하여 $A+B=-x^3-2x^2+4x+5$, $2A-B=4x^3-x^2-x+1$ 일 때, 두 다항식 A, B 를 구하면?

① $A=x^3+x^2+x+2,\ B=-2x^3-3x^2+3x+3$

② $A=x^3-x^2+x+2,\ B=-2x^3-x^2+3x+3$

③ $A=x^3-x^2+x-2,\ B=-2x^3-x^2+3x+7$

④ $A=x^3-x^2-x+2,\ B=-2x^3-x^2+5x+3$

⑤ $A=3x^3-3x^2+3x+6,\ B=-4x^3+x^2+x-1$

해설

$A+B=-x^3-2x^2+4x+5\cdots$㉠

$2A-B=4x^3-x^2-x+1\cdots$㉡

(㉠ + ㉡) $\div 3$: $A=x^3-x^2+x+2$

(2㉠ − ㉡) $\div 3$: $B=-2x^3-x^2+3x+3$

12. 다음은 연산법칙을 이용하여 $(x+3)(x+2)$를 계산한 식이다.

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2 \\ &= (x^2+3x)+(2x+6) \\ &= x^2+(3x+2x)+6 \\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

위의 연산과정에서 사용한 연산법칙을 바르게 고른 것은?

① 교환법칙, 결합법칙

② 교환법칙, 분배법칙

③ 분배법칙, 결합법칙

④ 결합법칙, 분배법칙, 교환법칙

⑤ 연산법칙을 사용하지 않았다.

해설

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2 && \text{(분배)} \\ &= (x^2+3x)+(2x+6) && \text{(분배)} \\ &= x^2+(3x+2x)+6 && \text{(결합)} \\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

13. 다음 $\square$ 안에 알맞은 수를 차례대로 써 넣어라.

$$(x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div (\square x^2 + \square x + \square) = x + 2$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -1

해설

$\square x^2 + \square x + \square = A$라 하면

$(x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div A = x + 2$

$\therefore\ A = (x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div (x + 2)$

$\therefore\ A = x^2 + 2x - 1$이므로

$\square$안에 알맞은 수는 차례대로 1, 2, -1이다.

14. x 에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+2 를 x^2-x+1 로 나눈 나머지가 $x+3$ 이 되도록 $a,\ b$ 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=-6$

해설

검산식을 사용

$x^3+ax^2+bx+2=(x^2-x+1)\cdot A+(x+3)$

$A=(x+p)$

$x^3+ax^2+bx+2-(x+3)=(x^2-x+1)(x+p)$

$x^3+ax^2+(b-1)x-1=(x^2-x+1)(x-1)\ \ \therefore p=-1$

우변을 정리하면

$\therefore\ \ a=-2,\ b=3$

$\therefore ab=-6$

15. 다항식 $f(x)$ 를 $x+\frac{1}{3}$ 으로 나누었을 때, 몫과 나머지를 $Q(x)$, R 라고 한다. 이 때, $f(x)$ 를 $3x+1$ 으로 나눈 몫과 나머지를 구하면?

① $Q(x)$, R　② $3Q(x)$, $3R$　③ $3Q(x)$, R
④ $\frac{1}{3}Q(x)$, R　⑤ $\frac{1}{3}Q(x)$, $\frac{1}{3}R$

해설

$$f(x)=Q(x)\left(x+\frac{1}{3}\right)+R=\frac{1}{3}Q(x)(3x+1)+R$$

16. $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^3-b^3)$ 의 전개식으로 옳은 것은?

① a^3+b^3 ② a^6+b^6 ③ a^6-b^6

④ a^9+b^9 ⑤ a^9-b^9

해설

(준 식)$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)=a^6-b^6$

17. $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$ 일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ 1 ⑤ 4

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 에 대입하면

$ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$

$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

$\frac{1}{4}=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

따라서 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{1}{4}$

18. 등식 $(x+1)(x-1)(x^3-x^2+x-1)=x^5-x^4+ax-b$가 항상 성립하도록 a, b값을 정할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

양변에 $x=1$을 대입하면, $0=a-b\cdots$ ㉠
양변에 $x=-1$을 대입하면, $0=-2-a-b\cdots$ ㉡
㉠, ㉡ 에서 $a=b=-1$
$\therefore\ a+b=-2$

19. $\dfrac{2x+3a}{4x+1}$가 x에 관계없이 일정한 값을 가질 때, $12a$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12a = 2$

해설

$\dfrac{2x+3a}{4x+1} = k$ (일정값 $= k$)라 놓으면 $2x+3a = k(4x+1)$에서

$(2-4k)x+3a-k=0$

이 식은 x에 대한 항등식이므로,

$2-4k=0,\ 3a-k=0$

$k=\dfrac{1}{2}$이므로 $3a=k$에서 $a=\dfrac{1}{6}$

$\therefore\ 12a=2$

20. 다항식 $f(x)$를 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지가 각각 1, 2일 때, $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눈 나머지를 구하면?

① $x-1$ ② $x+1$ ③ $-x+1$

④ x ⑤ $-x$

해설

$f(x)=(x-1)Q_1(x)+1 \quad \Rightarrow \quad f(1)=1$

$f(x)=(x-2)Q_2(x)+2 \quad \Rightarrow \quad f(2)=2$

$f(x)=(x-1)(x-2)Q_3(x)+ax+b$라 하면,

$f(1)=a+b=1, \quad f(2)=2a+b=2$이다.

$\therefore \; a=1, \quad b=0$이므로 나머지는 x

21. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 x^2-3x+2 로 나누었을 때의 나머지가 $x+4$ 이고, x^2-4x+3 으로 나누었을 때의 나머지가 $2x+3$ 일 때, $f(x)$ 를 $x^3-6x^2+11x-6$ 으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$ 라 하자. 이때 $R(10)$ 의 값은?

① 86 ② 88 ③ 90 ④ 92 ⑤ 94

해설

$$f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + x + 4$$
$$\cdots f(1) = 5, f(2) = 6 \cdots ㉠$$
$$f(x) = (x-1)(x-3)P(x) + 2x + 3$$
$$\cdots f(1) = 5, f(3) = 9 \cdots ㉡$$
$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)Z(x) + R(x)$$
$$R(x) = ax^2 + bx + c \cdots ㉢$$

㉠, ㉡를 ㉢에 각각 대입하면,

$a+b+c=5,\ 4a+2b+c=6,\ 9a+3b+c=9$

세식을 연립하여 풀면, $a=1,\ b=-2,\ c=6$

$R(x) = x^2-2x+6$

$\therefore R(10) = 86$

22. x에 대한 다항식 $2x^3-5x^2+ax+b$가 다항식 x^2-x+2로 나누어떨어지도록 상수 a, b의 값을 정하면?

① $a=7,\ b=-6$ ② $a=6,\ b=-5$ ③ $a=5,\ b=-3$

④ $a=4,\ b=-5$ ⑤ $a=3,\ b=7$

해설

직접 나누면

몫이 $2x-3$, 나머지가 $(a-7)x+b+6$이므로

$2x^3-5x^2+ax+b$

$=(x^2-x+2)(2x-3)+(a-7)x+b+6$

x^2-x+2로 나누어떨어지기 위해서는 나머지가 0이어야 하므로

$(a-7)x+b+6=0$

$\therefore\ a=7,\ b=-6$

23. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+1를 $x+1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

$$
\begin{array}{c|cccc}
k & 1 & a & b & 1 \\
 & & c & d & 1 \\
\hline
 & 1 & 3 & -1 & \boxed{2}
\end{array}
$$

① $a=3$　② $b=2$　③ $c=-1$

④ $d=-3$　⑤ $k=-1$

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+1를 $x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{c|cccc}
-1 & 1 & a & b & 1 \\
 & & -1 & -a+1 & -b+a-1 \\
\hline
 & 1 & a-1 & b-a+1 & \boxed{-b+a}
\end{array}
$$

이때 $k=-1$, $c=-1$, $d=-a+1$, $b-a+1=-1$, $-b+a=2$ 이므로

$k=-1$, $c=-1$, $a=4$, $b=2$, $d=-3$

따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

24. $3x^3 - 5x + 2 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 이 x 에 대한 항등식일 때, $a+b+c+d$ 의 값은?

① -16　② 16　③ 20　④ 23　⑤ 25

해설

$a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d = (x-1)\left\{a(x-1)^2 + b(x-1) + c\right\} + d$

$= (x-1)\,(x-1)[a(x-1)+b] + c\} + d$ 이므로

조립제법을 쓰면

1	3	0	-5	2	
		3	3	-2	
1	3	3	-2	$\boxed{0}$	← d
		3	6		
1	3	6	$\boxed{4}$	← c	
		3			
	3	$\boxed{9}$	← b		
	↑				
	a				

$a + b + c + d = 3 + 9 + 4 + 0 = 16$

해설

이 문제의 경우 계수의 합을 구하는 것이므로 양변에 $x = 2$ 를 대입해서 한꺼번에 구하는 값을 얻을 수 있다.

25. x 에 대한 항등식$x^3-1=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ 를 만족하는 상수 a,b,c,d 의 곱 $abcd$ 의 값은?

① -2 ② 0 ③ 5 ④ 10 ⑤ 18

해설

$a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$

$=(x+1)[(x+1)\{a(x+1)+b\}+c]+d$ 임을 이용하여 조립제법을 사용하면

$$\begin{array}{r|rrrrll}
-1 & 1 & 0 & 0 & -1 & & \\
 & & -1 & 1 & -1 & & \\ \hline
-1 & 1 & -1 & 1 & \boxed{-2} & \leftarrow & d \\
 & & -1 & 2 & & & \\ \hline
-1 & 1 & -2 & \boxed{3} & \leftarrow & c & \\
 & & -1 & & & & \\ \hline
 & 1 & \boxed{-3} & \leftarrow b & & & \\
 & \uparrow & & & & & \\
 & a & & & & &
\end{array}$$

$\therefore\ abcd=1\times(-3)\times 3\times(-2)=18$

26. $x = 1001$ 일 때, $\dfrac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4+1)(x^2-1)}{(x^4+1)(x+1)}\\ &= x - 1\\ &= 1001 - 1\\ &= 1000\end{aligned}$$

27. 이차항의 계수가 1인 두 이차 다항식의 최소공배수가 x^3+6x^2-x-30이고, 최대공약수가 $x-2$일 때, 두 다항식의 합을 바르게 구한 것은?

① $2x^2+4x-16$　② $2x^2+3x-8$　③ x^2-5x-1

④ $2x^2+x+4$　⑤ x^2+2x+5

해설

두 이차 다항식을 $A=a(x-2)$, $B=b(x-2)$ (a, b는 서로소)라고 하면

$L=x^3+6x^2-x-30=abG=ab(x-2)$ 이고,

L을 인수분해하면

$$L=(x-2)(x^2+8x+15)=\underbrace{(x-2)}_{G}\underbrace{(x+3)(x+5)}_{ab}$$

따라서, 두 다항식은

$(x-2)(x+3)=x^2+x-6$

$(x-2)(x+5)=x^2+3x-10$ 이므로

두 다항식의 합은

$(x^2+x-6)+(x^2+3x-10)=2x^2+4x-16$

28. 세 실수 a, b, c가 다음 세 조건을 만족한다.

$$a+b+c=1,\ ab+bc+ca=1,\ abc=1$$

이 때, $(a+b)(b+c)(c+a)$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$a+b+c=1$에서

$a+b=1-c,\ b+c=1-a,\ c+a=1-b$

$(a+b)(b+c)(c+a)$

$=(1-c)(1-a)(1-b)$

$=1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc$

$=1-1+1-1=0$

29. $a=(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)\cdots(3^{1024}+1)$이라고 할 때 곱셈 공식을 이용하여 a의 값을 지수의 형태로 나타내면 $\frac{1}{k}(3^l+m)$이다. 이 때, $k+l+m$의 값을 구하면?

① 2046 ② 2047 ③ 2048 ④ 2049 ⑤ 2050

해설

$a=(3+1)\left(3^2+1\right)\cdots\left(3^{1024}+1\right)$

양변에 $(3-1)$을 곱하면

$$(3-1)a=(3-1)(3+1)\left(3^2+1\right)\left(3^4+1\right)\cdots\left(3^{1024}+1\right)$$

$$\begin{aligned}2a&=\left(3^2-1\right)\left(3^2+1\right)\left(3^4+1\right)\cdots\left(3^{1024}+1\right)\\&=\left(3^4-1\right)\left(3^4+1\right)\cdots\left(3^{1024}+1\right)\\&=\left(3^8-1\right)\cdots\left(3^{1024}+1\right)\\&\ \ \vdots\\&=\left(3^{2048}-1\right)\end{aligned}$$

양변을 2로 나누면

$$a=\frac{1}{2}\left(3^{2048}-1\right)$$

$\therefore\ k=2,\ l=2048,\ m=-1$

$\therefore\ k+l+m=2049$

30. $x^2+x+1=0$일 때, $x^3+\dfrac{1}{x^3}$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^2+x+1=0$에서 양변을 x로 나누면

$$x+\frac{1}{x}=-1$$

$$\therefore\ x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=-1-3\cdot(-1)=2$$

31. $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ 이고 $abc=1$ 일 때, $(a^3+b^3+c^3)^2$ 의 값을 계산하면?

① 1 ② 4 ③ 9 ④ 16 ⑤ 25

해설

$a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$=(a+b+c)\times 0+3abc=0+3\cdot(1)=3$
$\therefore (a^3+b^3+c^3)^2=9$

해설

$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca\ a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)=0$
$\frac{1}{2}\left(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$
$\therefore a=b=c\rightarrow abc=a^3=b^3=c^3=1$
$(a^3+b^3+c^3)^2=(1+1+1)^2=9$

32. $a(a+1)=1$ 일 때, $\dfrac{a^4-a^2}{a^6-1}$ 의 값은?

① 1 ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{1}{5}$

해설

$a(a+1)=1$ 에서

$a^2=-a+1$

$$\begin{aligned} a^4 &= (-a+1)^2 = a^2-2a+1 \\ &= (-a+1)-2a+1 = -3a+2 \\ a^6 &= a^4\times a^2 = (-3a+2)(-a+1) \\ &= 3a^2-5a+2 = 3(-a+1)-5a+2 \\ &= -8a+5 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{a^4-a^2}{a^6-1} = \frac{-3a+2-(-a+1)}{-8a+5-1} = \frac{-2a+1}{-8a+4} = \frac{-2a+1}{4(-2a+1)} = \frac{1}{4}$$

33. 2가 아닌 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}$의 값이 항상 일정하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a-b$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}=k$라 하면

$ax^2+4x+b=k(x-2)$

$ax^2+(4-k)x+b+2k=0$

x에 대한 항등식이므로

$a=0$

$4-k=0$에서 $k=4$

$b+2k=0$에서 $b=-8$

$\therefore\ a-b=8$

해설

주어진 식이 모든 x에 대해 일정한 값을 가지려면
분자인 ax^2+4x+b가 분모인 '$x-2$' 만을 인수로 가져야 한다.
즉, 분자가 $k(x-2)$가 되어야 한다.

$\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}=\dfrac{4(x-2)}{x-2}=4$

$\therefore a=0,\ b=-8$에서 $a-b=8$

34. 이차식 $f(x)$를 각각 $x-3, x+1$로 나눈 나머지는 같고, $f(1)=0$일 때, $\dfrac{f(4)}{f(-4)}=\dfrac{n}{m}$ (m, n은 서로소)이다. 이 때, $m+n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

$f(1)=0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$을 인수로 갖는다.

$\therefore\ f(x)=(x-1)(ax+b)$

$f(3)=f(-1)$ 이므로 $2(3a+b)=-2(-a+b)$

$\therefore\ a=-b$

$$\frac{f(4)}{f(-4)}=\frac{3(4a+b)}{-5(-4a+b)}=\frac{-9b}{-25b}=\frac{9}{25}$$

$\therefore\ m=25,\ n=9$

35. 삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$가 $b^3 - ac^2 + a^2b + ab^2 + a^3 - bc^2 = 0$ 인 관계를 만족할 때, 이 삼각형의 모양은?

① 정삼각형 ② 직각삼각형

③ 이등변삼각형 ④ 둔각삼각형

⑤ 직각이등변삼각형

해설

차수가 가장 낮은 c에 대한 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해 한다.

$-(a+b)c^2 + a^3 + a^2b + b^3 + ab^2 = 0$

$-(a+b)c^2 + a^2(a+b) + b^2(a+b) = 0$

$-(a+b)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$

$(a+b \neq 0)$

$c^2 - a^2 - b^2 = 0$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2$

$\therefore\ C = 90^\circ$인 직각삼각형

36. 인수분해 공식 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$을 이용하여 $\dfrac{9999^3+1}{9998\times 9999+1}$을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10000

해설

$9999 = a$라 하면

$$\frac{9999^3+1}{9998\times 9999+1} = \frac{a^3+1}{(a-1)a+1}$$
$$= \frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$$
$$= a+1 = 10000$$

37. $a(a+1)=1$ 일 때, $\dfrac{a^6-1}{a^4-a^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\frac{a^6-1}{a^4-a^2}=\frac{(a^3+1)(a^3-1)}{a^2(a^2-1)}$$

$$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)}{a^2(a+1)(a-1)}$$

$$=\frac{(a^2-a+1)(a^2+a+1)}{a^2} \leftarrow a^2=1-a \text{대입}$$

$$=\frac{2(1-a)\times 2}{1-a}=4$$

38. 두 다항식 x^3-2x^2-5x+6과 $3x^3+(a-9)x^2-ax-6a$의 최대공약수가 이차식일 때, a의 값은?

① 1　② -1　③ 2　④ -2　⑤ 3

해설

$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x-3)(x+2)$

$3x^3+(a-9)x^2-ax-6a$에

$x=3$ 대입, $81+9a-81-3a-6a=0$

$x=-2$ 대입, $-24+4a-36+2a-6a\neq 0$이므로

$x-1$을 인수로 가져야 한다.

$x=1$ 대입 $3+a-9-a-6a=0$, $a=-1$

39. 두 다항식 x^2+3x+p, x^2+px+q의 최소공배수가 $x^3-13x+12$일 때, $p+q$의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$x^3-13x+12=(x-1)(x-3)(x+4)$ 두 다항식의 곱이 4차식이고 최소공배수가 3차식이므로 최대공약수는 1차식이다.
$(\because\ AB=GL)$

i) G.C.M. $=x-1$이면 $p=-4,\ q=3$
이 때 두 식은 $(x-1)(x+4)$, $(x-1)(x-3)$이므로 조건에 맞는다.

ii) G.C.M. $=x-3$이면 $p=-18,\ q=45$
이 때 두 식은 $(x-3)(x+6)$, $(x-3)(x-15)$이므로 조건에 맞지 않는다.

iii) G.C.M. $=x+4$일 때도 ii)와 같음

i), ii), iii)에서 $p+q=-1$

40. 두 다항식 $2x^2+px+q$, $4x^2+rx+s$의 최대공약수가 $2x+1$이고 곱이 $8x^4+4x^3-62x^2-61x-15$일 때, $p+q+r+s$의 합은?

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

해설

두 다항식을 $A=aG$, $B=bG$ (a, b는 서로소)라고 하면

$AB=abG^2$이므로

$8x^4+4x^3-62x^2-61x-15=ab(2x+1)^2$

$\therefore\ 8x^4+4x^2-62x^2-61x-15$

$=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2(8x^2-4x-60)$

$=(2x+1)^2(2x^2-x-15)$

$=(2x+1)^2(x-3)(2x+5)$

즉, $2x^2+px+q=(2x+1)(x-3)=2x^2-5x-3$,

$4x^2+rx+s=(2x+1)(2x+5)=4x^2+12x+5$이므로

$p=-5,\ q=-3,\ r=12,\ s=5$

$\therefore\ p+q+r+s=9$

41. $\dfrac{10^{85}}{10^{15}+10^{5}}=k\times10^{n}$ (단, $0<k<10$, n은 자연수)로 나타낼 때, n의 값을 구하면?

① 72　② 71　③ 70　④ 69　⑤ 68

해설

$\dfrac{10^{85}}{10^{15}+10^{5}}=N$이라고 하면

$\dfrac{10^{85}}{10^{15}+10^{15}}<N<\dfrac{10^{85}}{10^{15}}$

$\dfrac{10\times10^{84}}{2\times10^{15}}<N<\dfrac{10\times10^{84}}{10^{15}}$

$5\times10^{69}<N<10\times10^{69}$

따라서 $N=k\times10^{69}(5<k<10)$

$\therefore\ n=69$

42. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c}$ 일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 빗변의 길이가 a인 직각삼각형

② 빗변의 길이가 b인 직각삼각형

③ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

④ $a=b$인 이등변삼각형

⑤ $b=c$인 이등변삼각형

해설

$\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c}$ 에서

$(a-b+c)(a-b-c) = (a+b+c)(-a-b+c)$

$(a-b+c)(a-b-c) + (a+b+c)(a+b-c) = 0$

(좌변)

$= \{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\} + \{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}$

$= (a-b)^2 - c^2 + (a+b)^2 - c^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 - c^2 + a^2 + 2ab + b^2 - c^2$

$= 2a^2 + 2b^2 - 2c^2$

따라서, $2a^2 + 2b^2 - 2c^2 = 0$이므로 $a^2 + b^2 = c^2$

그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

43. $a^3+b^3+c^3=p(a+b+c)^3+q(a+b+c)(ab+bc+ca)+rabc$가 a, b, c에 대한 항등식이 되도록 상수 p, q, r의 값을 정할 때, $p+q+r$을 구하면?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ -23　　⑤ 23

해설

$a^3+b^3+c^3=p(a+b+c)^3+q(ab+bc+ca)+rabc$에서
a, b, c에 대한 항등식이므로
$a=1, b=0, c=0 : 1=p\cdots$ ①
$a=1, b=1, c=0 : 2=2p+2q\ \cdots$ ②
$a=1, b=1, c=1 : 3=27p+9q+r\cdots$ ③
①, ②, ③에서 $p=1,\ q=0,\ r=-24$
$\therefore\ p+q+r=-23$

44. $(1-x-x^2)^{50}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{99}x^{99}+a_{100}x^{100}$라 할 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100}=A$, $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}=B$에 대하여 $A+2B$의 값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 100 ⑤ 1024

해설

(i) 양변에 $x=1$을 대입하면

$1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{99}+a_{100}\cdots$㉠

양변에 $x=-1$을 대입하면

$1=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{99}+a_{100}\cdots$㉡

(ii) ㉠+㉡ 하면 $2=2(a_0+a_2+\cdots+a_{100})$

$\therefore\ a_0+a_2+\cdots+a_{100}=1$

$\therefore\ A=1$

㉠ − ㉡하면

$0=2(a_1+a_3+\cdots+a_{99})$

$a_1+a_3+\cdots+a_{99}=0\quad\therefore\ B=0$

$\therefore\ A+2B=1$

45. 삼차항의 계수가 1 인 삼차다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(-1) = f(1) = f(2) = 3$ 일 때 $f(-2)$ 의 값은?

① -5 ② -6 ③ -7 ④ -8 ⑤ -9

해설

$f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)+3$

$\therefore\ f(-2) = -9$

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 하면

i) $f(-1) = 3$ 에서 $a - b + c - 1 = 3$

ii) $f(1) = 3$ 에서 $a + b + c + 1 = 3$

iii) $f(2) = 3$ 에서 $4a + 2b + c + 8 = 3$

위의 세식을 연립하여 풀면,

$a = -2, b = -1, c = 5$

$\therefore\ f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$

$\therefore f(-2) = -8 - 8 + 2 + 5 = -9$

46. $x-1$로 나누면 나머지가 1이고, $x+1$로 나누면 나머지가 -1인 다항식 $f(x)$가 있다. $f(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하자. $f(0)=0$일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

ㄱ $Q(0)=0$이다.

ㄴ $f(x)$는 이차식이 될 수 없다.

ㄷ $f(x)$가 삼차식이면 $f(x)=x^3$이다

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

$f(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$

$f(1)=a+b=1, \quad f(-1)=-a+b=-1$

$\therefore \ a=1, \ b=0$

$\therefore \ f(x)=(x^2-1)Q(x)+x$

ㄱ $f(0)=-Q(0)=0$ $\quad \therefore$참

ㄴ $f(x)$가 이차식이기 위해서는 $Q(x)$가 0이 아닌 상수이어야 하는데 $Q(0)=0$이므로 그런 경우는 없다. $\therefore$참

ㄷ $Q(0)=0$이므로 $Q(x)=ax \ (a\neq 0)$

$\therefore \ f(x)=ax(x^2-1)+x \ (a\neq 0)$ $\quad \therefore$거짓

47. 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_1(x)$, $Q_1(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라 한다. 이와 같은 과정을 계속할 때, $Q_n(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_{n+1}(x)$라 한다. $f(x)$를 $(x-\alpha)^n$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(\alpha)$의 값은?

① 0 ② α ③ $f(\alpha)$

④ $Q_n(\alpha)$ ⑤ $Q_{n+1}(\alpha)$

해설

$f(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_1(x)$,
나머지를 R_1이라 하면
$f(x)=(x-\alpha)Q_1(x)+R_1$에서
$Q_n(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 나머지를 R_{n+1}이라 하면

$$
\begin{aligned}
f(x)&=(x-\alpha)\{(x-\alpha)Q_2(x)+R_2\}+R_1\\
&=(x-\alpha)^2Q_2(x)+(x-\alpha)R_2+R_1\\
&=(x-\alpha)^2\{(x-\alpha)Q_3(x)+R_3\}+(x-\alpha)R_2+R_1\\
&=(x-\alpha)^3Q_3(x)+(x-\alpha)^2R_3+(x-\alpha)R_2+R_1\\
&\qquad\vdots\\
&=(x-\alpha)^nQ_n(x)+(x-\alpha)^{n-1}R_n+\\
&\qquad\cdots\cdots+(x-\alpha)R_2+R_1
\end{aligned}
$$

따라서 $f(x)$를 $(x-\alpha)^n$으로 나눈 나머지를
$R(x)$라 하면
$R(x)=(x-\alpha)^{n-1}R_n+\cdots+(x-\alpha)R_2+R_1$
$\therefore\ R(\alpha)=R_1=f(\alpha)$

48. $f(x)$는 다항식으로 $\{f(x)\}^3$을 x^2으로 나누면 나머지는 $x+1$이라고 한다. $f(x)$를 x^2으로 나눌 때, 나머지는?

① $x+\frac{1}{3}$ ② $x+\frac{1}{2}$ ③ $\frac{x}{3}+1$ ④ $\frac{x}{2}+1$ ⑤ $\frac{x}{5}+1$

해설

$f(x)$를 x^2으로 나눈 몫을 $Q(x)$

나머지를 $ax+b$라 하면

$f(x)=x^2Q(x)+ax+b$

$\{f(x)\}^3=\{x^2Q(x)+ax+b\}^3$

이것을 $x^2P(x)+(ax+b)^3$이라 하면

$\{f(x)\}^3$을 x^2으로 나눈 나머지는

$(ax+b)^3$을 x^2으로 나눈 나머지와 같으므로

$(ax+b)^3=a^3x^3+3a^2bx^2+3ab^2x+b^3$에서

$3ab^2x+b^3=x+1$

$\therefore\ 3ab^2=1,\ b^3=1$

$\therefore\ a=\frac{1}{3},\ b=1$

$\therefore\ ax+b=\frac{x}{3}+1$

49. 다항식 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나눈 나머지가 $2x+1$이고, $(x-2)^3$으로 나눈 나머지가 x^2-x+6이다. $f(x)$를 $(x+1)(x-2)^2$으로 나눈 나머지는?

① $3x+1$　② $3x-2$　③ $3x+2$

④ x^2-2x+1　⑤ x^2-x+6

해설

$f(x)=(x+1)^2A(x)+2x+1$에서 $f(-1)=-1$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)^3B(x)+x^2-x+6 \\ &= (x-2)^3B(x)+(x-2)^2+3x+2 \\ &= (x-2)^2\{(x-2)B(x)+1\}+3x+2 \end{aligned}$$

즉 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 나머지는 $3x+2$

구하는 나머지를 ax^2+bx+c라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x-2)^2Q(x)+ax^2+bx+c \\ &= (x+1)(x-2)^2Q(x)+a(x-2)^2+3x+2 \end{aligned}$$

$f(-1)=9a-1=-1$　$\therefore a=0$

$ax^2+bx+c=a(x-2)^2+3x+2$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $3x+2$

50. 다음 식 $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$의 인수가 아닌 것은?

① $a+b$　② $b+c$　③ $c+a$

④ $b-a$　⑤ $-b-c$

해설

전개하여 a에 대한 내림차순으로 정리하면

$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc(b+c)$

$=(b+c)\left\{a^2+(b+c)a+bc\right\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

$\therefore$ ④ $b-a$는 인수가 아니다