1. $(4x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x + 1) \div (x^2 - x + 1)$ 을 계산 하였을 때, 몫과 나머지의 합을 구하면?

① $4x^2 - 6x + 1$ ② $4x^2 - 7x + 3$ ③ $4x^2 - 4x + 5$
④ $4x^2 - 8x + 2$ ⑤ $4x^2 - 6x + 7$

해설

직접 나누어서 구한다.
몫 : $4x^2 - x - 2$, 나머지 : $-5x + 3$
$\therefore$ 몫과 나머지의 합은 $4x^2 - 6x + 1$

2. 다항식 $f(x)$를 $2x^2+3x+2$로 나누었더니 몫이 $3x-4$이고, 나머지가 $2x+5$이었다. 이 때, $f(1)$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

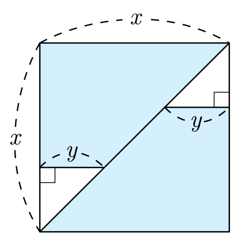
해설

$f(x)=(2x^2+3x+2)(3x-4)+(2x+5)$
$=6x^3+9x^2+6x-8x^2-12x-8+2x+5$
$=6x^3+x^2-4x-3$
$\therefore\ f(1)=6+1-4-3=0$

해설

$f(x)=(2x^2+3x+2)(3x-4)+(2x+5)$
$f(1)=(2+3+2)(3-4)+(2+5)=-7+7=0$

3. 다음 그림은 한변의 길이가 x인 정사각형을 대각선을 따라 자른 후 직각이등변삼각형 2개를 떼어낸 도형이다. 이때, 색칠한 부분의 넓이를 x, y에 관한 식으로 나타내어라.



① $xy-y^2$ ② x^2-y^2 ③ x^2-y

④ $\dfrac{xy-y^2}{2}$ ⑤ $\dfrac{x-y}{2}$

해설

$x^2-2\times\dfrac{1}{2}\times y\times y=x^2-y^2$

4. 다음 곱셈공식을 전개한 것 중 바른 것은?

① $(x-y-1)^2 = x^2+y^2+1-2xy-2x-2y$

② $(a+b)^2(a-b)^2 = a^4-2a^2b^2+b^4$

③ $(-x+3)^3 = x^3-9x^2+27x-27$

④ $(a-b)(a^2+ab-b^2) = a^3-b^3$

⑤ $(p-1)(p^2+1)(p^4+1) = p^{16}-1$

해설

① $(x-y-1)^2 = x^2+y^2+1-2xy-2x+2y$

③ $(-x+3)^3 = -x^3+9x^2-27x+27$

④ $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$

⑤ $(p-1)(p+1)(p^2+1)(p^4+1) = p^8-1$

5. $(2x^3-3x^2+3x+4)(3x^4+2x^3-2x^2-7x+8)$ 을 전개한 식에서 x^3의 계수는?

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

해설

$2x^3\times 8-3x^2\times(-7x)+3x\times(-2x^2)+4\times 2x^3=39x^3$

6. $\dfrac{x+1}{3}=y-2$를 만족하는 모든 실수 $x,\ y$에 대하여, 항상 $ax+by=7$이 성립할 때, $a,\ b$의 값을 구하여라. ($a,\ b$는 상수)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-1$

▷ 정답 : $b=3$

해설

$\dfrac{x+1}{3}=y-2,\ x+1=3(y-2)$

$x-3y=-7$

$-x+3y=7 \Leftrightarrow ax+by=7$

$\therefore\ a=-1,\ b=3$

7. $(x+y)a-(x-y)b-(y-z)c-4z=0$이 $x,\ y,\ z$의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 곱 abc를 구하면?

① 4　② 8　③ 16　④ 32　⑤ 64

해설

x, y, z에 대해 정리하면
$(a-b)x+(a+b-c)y+(c-4)z=0$
$x,\ y,\ z$에 대한 항등식이므로
$a=b,\ a+b-c=0,\ c=4$
$\therefore\ a=b=2,\ c=4$
$\therefore\ abc=16$

8. 다항식 x^3+ax+b가 다항식 x^2-x+1로 나누어 떨어지도록 상수 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

나누어 떨어지려면 나머지가 0이어야 하므로
$x^2=x-1$을 대입하면
$ax+(b-1)=0$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로,
$a=0,\ b-1=0$
$\therefore\ a=0,\ b=1$
$\therefore a+b=1$

해설

x^3+ax+b
$=(x^2-x+1)Q(x)$
$=(x^2-x+1)(x+b)$
$\therefore\ b=1,\ a=0$

9. $f(x) = x^2 - ax + 1$이 $x - 1$로 나누어 떨어질 때 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$f(1) = 1^2 - a \cdot 1 + 1 = 0$

$\therefore\ a = 2$

10. 다항식 $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 12$가 $x - 2$로 나누어 떨어지고 또, $x - 3$으로도 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -5

해설

$f(x)$ 가 $x - 2$ 로 나누어 떨어지려면

$f(2) = 24 + 4a + 2b + 12 = 0$

$\therefore\ 4a + 2b + 36 = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또, $f(x)$ 가 $x - 3$ 으로 나누어 떨어지려면

$f(3) = 81 + 9a + 3b + 12 = 0$

$\therefore\ 9a + 3b + 93 = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -13,\ b = 8$

11. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해하였더니, $(x+ay)(x-by+c)$가 되었다. 이 때, $a,\ b,\ c$를 순서대로 쓴 것은?

① $-1,\ 0,\ 1$ ② $-1,\ 1,\ 2$ ③ $-2,\ -1,\ 1$
④ $-1,\ -1,\ -2$ ⑤ $-1,\ 2$

해설

$$\begin{aligned} x^2-2x-y^2+2y &= (x+y)(x-y)-2(x-y) \\ &= (x-y)(x+y-2) \end{aligned}$$

$\therefore\ a=-1,\ b=-1,\ c=-2$

12. $(x^2+x)(x^2+x+1)-6$을 인수분해하면?

① $(x-1)(x+2)(x^2+x+3)$　② $(x-1)(x+2)(x^2+x-3)$
③ $(x-2)(x+1)(x^2+x+3)$　④ $(x-1)(x+2)(x^2-x+3)$
⑤ $(x+1)(x-2)(x^2-x+3)$

해설

$x^2+x=X$라 하자.

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= X(X+1)-6\\ &= X^2+X-6\\ &= (X+3)(X-2)\\ &= (x^2+x+3)(x^2+x-2)\\ &= (x-1)(x+2)(x^2+x+3)\end{aligned}$$

13. $x^3-6x^2+11x-6$을 인수분해 하면?

① $(x+1)(x-2)(x+3)$
② $(x-1)(x+2)(x+3)$
③ $(x-1)(x-2)(x-3)$
④ $(x+1)(x+2)(x-3)$
⑤ $(x-1)(x-2)(x+3)$

해설

인수정리를 이용하면
$f(1)=0,\ f(2)=0,\ f(3)=0$이므로
(준식)$=(x-1)(x-2)(x-3)$

14. 자연수 $N = p^n q^m r^l$ 로 소인수분해될 때, 양의 약수의 개수는 $(n+1)(m+1)(l+1)$ 이다. 이 때, $38^3 + 3 \cdot 38^2 + 3 \cdot 38 + 1$ 의 양의 약수의 개수는?

① 9 개　　② 12 개　　③ 16 개　　④ 24 개　　⑤ 32 개

해설

$38 = x$ 라 하면,

$$\begin{aligned} 38^3 + 3 \cdot 38^2 + 3 \cdot 38 + 1 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ &= (x+1)^3 \\ &= 39^3 \\ &= 13^3 \cdot 3^3 \end{aligned}$$

$\therefore \quad (3+1)(3+1) = 16$

15. 두 다항식 x^3-3x^2+2x, $x^4-4x^3+4x^2$ 의 최대공약수와 최소공배수를 각각 $f(x), g(x)$ 라 할 때, $f(3)+g(3)$ 의 값을 구하면?

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

$x^3-3x^2+2x=x(x-2)(x-1)$
$x^4-4x^3+4x^2=x^2(x-2)^2$
$\therefore f(x)=x(x-2), g(x)=x^2(x-1)(x-2)^2$
$\therefore f(3)+g(3)=3+18=21$

16. 두 다항식 A, B에 대하여 연산 $\triangle$, $\blacktriangledown$를 $A \triangle B = 2A + B$, $A \blacktriangledown B = A - 3B$로 정의한다.
$A = 2 + 3x^2 - x^3$, $B = x^2 + 3x + 1$일 때 $A \blacktriangledown (B \triangle A)$를 구하면?

① $2x^3 - 18x - 10$
② $2x^3 - 12x^2 - 18x - 10$
③ $2x^3 + 12x^2 + 18x + 10$
④ $2x^3 + 12x^2 + 18x - 10$
⑤ $2x^3 - 12x^2 + 18x + 10$

해설

$A \blacktriangledown (B \triangle A) = A \blacktriangledown (2B + A)$
$= A - 3(2B + A) = -2A - 6B$
위와 같이 식을 간단히 정리한 후 A, B에 대입하여 정리한다.

17. 두 다항식 $A = a + 2b$, $B = 2a + 3b$일 때, $2A + B$를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 <u>않은</u> 것을 골라라.

$$\begin{aligned} 2A + B &= 2(a + 2b) + (2a + 3b) \\ &= (2a + 4b) + (2a + 3b) && \text{㉠ 분배법칙} \\ &= 2a + (4b + 2a) + 3b && \text{㉡ 결합법칙} \\ &= 2a + (2a + 4b) + 3b && \text{㉢ 교환법칙} \\ &= (2a + 2a) + (4b + 3b) && \text{㉣ 교환법칙} \\ &= (2 + 2)a + (4 + 3)b && \text{㉤ 분배법칙} \\ &= 4a + 7b \end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

㉣ $2a + (2a + 4b) + 3b = (2a + 2a) + (4b + 3b)$: 결합법칙

18. 다항식 $A = 2x^3 - 7x^2 - 4$ 를 다항식 B 로 나눌 때, 몫이 $2x - 1$, 나머지가 $-7x - 2$ 이다. 다항식 $B = ax^2 + bx + c$ 일 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 14 ⑤ 17

해설

$A = 2x^3 - 7x^2 - 4 = B(2x - 1) - 7x - 2$ 이다.

$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = B(2x - 1)$

좌변을 $2x - 1$ 로 나누면

$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = (2x - 1)(x^2 - 3x + 2)$

$\therefore\ B = x^2 - 3x + 2$

19. $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$를 전개할 때, 각 항의 계수의 총합을 a, 상수항을 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 8　　② 15　　③ 24　　④ 36　　⑤ 47

해설

$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$
$= (x^2+x-2)(x^2+x-12)(x^2+x=X(\text{치환}))$
$= (X-2)(X-12)$
$= X^2-14X+24$
$= (x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$
$= x^4+2x^3-13x^2-14x+24$
$\therefore\ a=1+2-13-14+24=0,\ b=24$
$\therefore\ a+b=0+24=24$

해설

㉠ 각 항 계수의 총합 구하기
$x=1$ 대입, $a=0$
㉡ 상수항 구하기
$x=0$ 대입, $b=24$

20. $(10^5+2)^3$ 의 각 자리의 숫자의 합을 구하여라.

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 26 ⑤ 28

해설

준식을 전개하면

$10^{15}+2^3+3\times2\times10^5(10^5+2)$

$=10^{15}+2^3+6\times10^{10}+12\times10^5$

$=10^{15}+10^{10}\times6+10^5\times12+8$

$\therefore\ 1+6+1+2+8=18$

21. 다음 중에서 겉넓이가 22, 모든 모서리의 길이의 합이 24 인 직육면체의 대각선의 길이는?

① $\sqrt{11}$　　② $\sqrt{12}$

③ $\sqrt{13}$　　④ $\sqrt{14}$

⑤ 유일하지 않다.

해설

겉넓이 : $2xy + 2xz + 2yz = 22$

모서리 : $4x + 4y + 4z = 24$

대각선 : $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$　　$\therefore\ d = \sqrt{14}$

$= (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$

$= 6^2 - 22 = 14$

22. x에 관계없이 $\frac{x-a}{2x-b}$가 항상 일정한 값을 가질 때, 상수 a, b에 대하여 $\frac{b}{a}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\frac{x-a}{2x-b}=k$라 놓으면,

$(2k-1)x+(a-bk)=0$

$\therefore\ 2k-1=0,\ a=bk$이므로

$k=\frac{1}{2},\ a=\frac{1}{2}b$이다.

$\therefore\ \frac{b}{a}=2$

23. $\dfrac{2x+3a}{4x+1}$ 가 x에 관계없이 일정한 값을 가질 때, $12a$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12a = 2$

해설

$\dfrac{2x+3a}{4x+1} = k$ (일정값 $= k$)라 놓으면 $2x+3a = k(4x+1)$에서
$(2-4k)x + 3a - k = 0$
이 식은 x에 대한 항등식이므로,
$2-4k = 0,\ 3a - k = 0$
$k = \dfrac{1}{2}$ 이므로 $3a = k$에서 $a = \dfrac{1}{6}$
$\therefore\ 12a = 2$

24. $x^3 - x^2 + 2 = (x+1)^3 + a(x+1)^2 + b(x+1) + c$ 가 항등식일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

조립제법에 의한 방법으로 풀면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ & & -1 & 2 & -2 \\ \hline -1 & 1 & -2 & 2 & \boxed{0} \\ & & -1 & 3 & \\ \hline -1 & 1 & -3 & \boxed{5} & \\ & & -1 & & \\ \hline & 1 & \boxed{-4} & & \end{array}$$

$\therefore\ a = -4,\ b = 5,\ c = 0$

$\therefore\ a + b + c = 1$

해설

주어진 식의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$2 = 1 + a + b + c$

$\therefore\ a + b + c = 1$

25. $(x^3 - x^2 - 2x + 1)^5 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_{15}(x-1)^{15}$ 일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{14}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

양변에 $x = 0$을 대입하면

$1 = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_{15} \cdots$ ㉠

양변에 $x = 2$를 대입하면

$1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{15} \quad \cdots$ ㉡

㉠ + ㉡을 하면

$2 = 2(a_0 + a_2 + \cdots + a_{14})$ 이다.

$\therefore\ a_0 + a_2 + \cdots a_{14} = 1$

26. 다항식 $f(x)$를 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지가 각각 1, 2일 때, $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눈 나머지를 구하면?

① $x-1$　② $x+1$　③ $-x+1$
④ x　⑤ $-x$

해설

$f(x)=(x-1)Q_1(x)+1 \quad \Rightarrow \quad f(1)=1$
$f(x)=(x-2)Q_2(x)+2 \quad \Rightarrow \quad f(2)=2$
$f(x)=(x-1)(x-2)Q_3(x)+ax+b$라 하면,
$f(1)=a+b=1,\quad f(2)=2a+b=2$이다.
$\therefore\ a=1,\quad b=0$이므로 나머지는 x

27. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눌 때의 나머지는 3이고, $x-2$로 나눌 때의 나머지는 1이다. 이 다항식을 $(x-1)(x-2)$로 나눌 때의 나머지를 $ax+b$라고 할 때, $a+b$를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$
$f(1)=a+b=3,\ f(2)=2a+b=1$
$a=-2,\ b=5$
$\therefore\ a+b=3$

28. x에 대한 다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

$$\begin{array}{c|cccc} k & 1 & a & -1 & b \\ & & c & d & a \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \boxed{5} \end{array}$$

① $a=3$　② $b=2$　③ $c=1$

④ $d=4$　⑤ $k=-1$

해설

다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a & -1 & b \\ & & 1 & a+1 & a \\ \hline & 1 & a+1 & a & \boxed{b+a} \end{array}$$

$k=1,\ a=3,\ b=2,\ c=1,\ d=4$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

29. $2x^3+9x^2+11x+7=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ 가 x에 대한 항등식일 때, $a,\ b,\ c, d$를 차례로 구하면?

① 3, -1, 3, 2
② 2, 3, -1, 3
③ -3, 1, -3, -2
④ -2, -3, 1, -3
⑤ 1, -3, 4, -2

해설

조립제법을 이용하면

-1	2	9	11	7		
		-2	-7	-4		
-1	2	7	4	3	←	d
		-2	-5			
-1	2	5	-1 ←	c		
		-2				
	2	3	← b			
	↑					
	a					

$a=2,\ b=3,\ c=-1,\ d=3$

30. 삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형
② 이등변삼각형
③ 정삼각형
④ 직각이등변삼각형
⑤ 둔각삼각형

해설

$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$에서

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)=0$

$\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)=0$

$\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$

$a,\ b,\ c$는 실수이므로

$a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$

$\therefore\ a=b=c$

따라서, 주어진 삼각형은 정삼각형이다.

31. $a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=5$, $a^3+b^3+c^3=2$일 때, abc의 값은?

① $-\frac{5}{3}$ ② 0 ③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 1

해설

$a^2+b^2+c^2$
$=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$이므로
$5=1-2(ab+bc+ca)$
$\therefore\ ab+bc+ca=-2$
$a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$이므로
$2-3abc=1\cdot(5+2)$
$\therefore\ abc=-\frac{5}{3}$

32. $x = 1001$ 일 때, $\dfrac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4 + 1)(x^2 - 1)}{(x^4 + 1)(x + 1)} \\ &= x - 1 \\ &= 1001 - 1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

33. x^2+ax-9와 x^2+bx+c의 합은 $2x^2-4x-6$, 최소공배수는 x^3-x^2-9x+9이다. $a-b+c$의 값을 구하여라. (단, $a,\ b,\ c$는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$A = x^2 + ax - 9 = Gp$
$B = x^2 + bx + c = Gq$라 하면
$A + B = (p+q)G = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x+1)(x-3)$
$L = pqG = x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^2(x-1) - 9(x-1)$
$= (x-1)(x^2-9) = (x-1)(x+3)(x-3)$
따라서, $G = x-3,\ p = x+3,\ q = x-1$이다.
$\therefore\ A = (x+3)(x-3) = x^2 - 9$
$\quad B = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$
$\therefore\ a = 0,\ b = -4,\ c = 3$
$\therefore\ a - b + c = 7$

34. 두 다항식 $x^3 + 2x^2 - x - 2$와 $x^2 + ax + b$의 최대공약수는 $x + 1$이고, 최소공배수는 $x^4 - 5x^2 + 4$이다. 이 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① -2 ② 2 ③ 3 ④ 1 ⑤ -1

해설

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x+1)(x+2)(x-1)$

$x^2 + ax + b = (x+1)(x+k)$

$x^4 - 5x^2 + 4 = (x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

$\therefore\ (x+1)(x-1)(x+2)(x-2) = (x+1)(x+2)(x-1)(x+k)$

$\therefore\ k = -2$

$x^2 + ax + b = (x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$

$\therefore\ a = -1, b = -2$

$\therefore\ ab = 2$

35. 다항식 $f(x) = x^4 + ax^2 + x + 2$를 $g(x) = x^3 + bx + 2$로 나눈 나머지가 $R(x)$라 한다. $g(x)$와 $R(x)$의 최대공약수가 $x + 2$일 때, ab의 값은?

① 9　　② 10　　③ 12　　④ 15　　⑤ 16

해설

$f(x) = g(x) \cdot Q(x) + R(x)$ 에서
$g(x)$ 와 $R(x)$ 의 최대공약수 $x + 2$ 는
$f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최대공약수와 같다.
($\because$ 유클리드 호제법)
$f(-2) = 16 + 4a = 0, a = -4$
$g(-2) = -8 - 2b + 2 = 0, b = -3$
$\therefore \ ab = 12$

36. $x^2+x+1=0$일 때, $x^3+\dfrac{1}{x^3}$의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$x^2+x+1=0$에서 양변을 x로 나누면

$x+\dfrac{1}{x}=-1$

$\therefore x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\dfrac{1}{x}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=-1-3\cdot(-1)=2$

37. $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ 이고 $abc=1$ 일 때, $(a^3+b^3+c^3)^2$ 의 값을 계산하면?

① 1　② 4　③ 9　④ 16　⑤ 25

해설

$a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$=(a+b+c)\times 0+3abc=0+3\cdot(1)=3$
$\therefore (a^3+b^3+c^3)^2=9$

해설

$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)=0$
$\frac{1}{2}\left(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$
$\therefore a=b=c \to abc=a^3=b^3=c^3=1$
$(a^3+b^3+c^3)^2=(1+1+1)^2=9$

38. $x+y=2$, $x^3+y^3=14$일 때, x^5+y^5의 값을 구하면?

① 12 ② 32 ③ 52 ④ 82 ⑤ 102

해설

$x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)\cdots(*)$
$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$\therefore\ 14=8-6xy$
$\therefore\ xy=-1\cdots\cdots$①
$x^3+y^3=14\cdots\cdots$②
$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4-2(-1)=6\cdots\cdots$③
①, ②, ③을 $(*)$에 대입하면
$x^5+y^5=6\times14-2=82$

39. 다항식 $f(x)$를 $ax+b(a \neq 0)$로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 한다. $xf(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나눈 나머지를 구하면?

① $\frac{bR}{a}$ ② $\frac{b}{Ra}$ ③ $-\frac{b}{a}R$ ④ $\frac{aR}{b}$ ⑤ $-\frac{aR}{b}$

해설

$f(x)=(ax+b)Q(x)+R$

$\quad = a\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R$

$\therefore\ x \cdot f(x)$

$= ax\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+Rx$

$= ax\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R\left(x+\frac{b}{a}\right)-\frac{b}{a}R$

$= \left(x+\frac{b}{a}\right)\{axQ(x)+R\}-\frac{b}{a}R$

따라서, 구하는 몫은 $axQ(x)+R$

나머지는 $-\frac{bR}{a}$

해설

$f(x)=(ax+b)Q(x)+R$에서

나머지 정리에 의해 $f(-\frac{b}{a})=R$

$x \cdot f(x)=\left(x+\frac{b}{a}\right)Q'(x)+R'$이라 하면

나머지 정리에 의해 $-\frac{b}{a}f(-\frac{b}{a})=R'$

$f(-\frac{b}{a})=R$를 대입하면 $R'=-\frac{b}{a}R$

40. $a^2-b^2+c^2-d^2+2(ac+bd)$를 바르게 인수분해 한 것은?

① $(a+b-c-d)(a-b+c+d)$

② $(a+b+c+d)(a-b+c-d)$

③ $(a+b+c-d)(a-b+c+d)$

④ $(a-b+c-d)(a-b+c+d)$

⑤ $(a+b+c+d)(a-b-c+d)$

해설

$a^2-b^2+c^2-d^2+2(ac+bd)$
$=(a^2+2ac+c^2)-(b^2-2bd+d^2)$
$=(a+c)^2-(b-d)^2$
$=(a+b+c-d)(a-b+c+d)$

41. 다음 중 다항식 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ 의 인수가 아닌 것은?

① $a-b$　　② $b-c$　　③ $c-a$

④ $a+b+c$　　⑤ $a-b+c$

해설

주어진 식을 a에 관하여 정리하면

(준식)$= a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)$

$= (b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$

$= (b-c)\{b^2(c-a)+b(c^2-ca)-a(c^2-a^2)\}$

$= (b-c)(c-a)(b^2+bc-ac-a^2)$

$= (b-c)(c-a)\{c(b-a)+(b^2-a^2)\}$

$= (b-c)(c-a)(b-a)(a+b+c)$

42. 0이 아닌 세 수가 있다. 이들의 합은 0, 역수의 합은 $\frac{3}{2}$, 제곱의 합은 1 일 때, 이들 세 수의 세제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

세 수를 x, y, z라 하면 주어진 조건으로부터

$x+y+z=0 \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2} \cdots\cdots$ ㉡

$x^2+y^2+z^2=1 \cdots\cdots$ ㉢

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ 이므로

㉠, ㉢에서 $0^2=1+2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xy+yz+zx=-\frac{1}{2} \cdots\cdots$ ㉣

㉡에서 $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{3}{2}$ 이므로

$3xyz=2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xyz=-\frac{1}{3}$

또, $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

㉠에서 $x+y+z=0$ 이므로

$x^3+y^3+z^3=3xyz=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$

43. 두 다항식 $A,\ B$에 대하여 $\{A,\ B\} = A^2 + B^2 - AB$라 할 때, $\{x^2 + 1,\ 2x^2 - 3\} - 7$을 실수 범위에서 인수분해한다. 이 때, 인수가 아닌 것은?

① $x - \sqrt{2}$　　② $x - 1$　　③ x

④ $x + 1$　　⑤ $x + \sqrt{2}$

해설

$$
\begin{aligned}
&\{x^2 + 1,\ 2x^2 - 3\} - 7 \\
&= (x^2 + 1)^2 + (2x^2 - 3)^2 - (x^2 + 1)(2x^2 - 3) - 7 \\
&= x^4 + 2x^2 + 1 + 4x^4 - 12x^2 + 9 - 2x^4 + x^2 + 3 - 7 \\
&= 3x^4 - 9x^2 + 6 \\
&= 3(x^4 - 3x^2 + 2) \\
&= 3(x^2 - 1)(x^2 - 2) \\
&= 3(x - 1)(x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})
\end{aligned}
$$

44. 두 다항식 x^3+px^2+qx+1과 x^3+qx^2+px+1의 최대공약수가 x에 대한 일차식일 때, 상수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$A=x^3+px^2+qx+1$, $B=x^3+qx^2+px+1$이라고 하면

$$\begin{aligned} A-B &= (x^3+px^2+qx+1)-(x^3+qx^2+px+1) \\ &= (p-q)x^2-(p-q)x \\ &= (p-q)x(x-1) \end{aligned}$$

이 때, $A-B$는 두 다항식 A, B의 최대공약수를 인수로 갖는다.
그런데, $p=q$이면 $A=B$가 되어 최대공약수가 x에 대한 삼차식이 되므로 최대공약수가 x에 대한 일차식이라는 조건에 모순이다.
또한, 두 다항식 A, B의 상수항이 모두 1이므로 x를 인수로 가질 수 없다.
따라서, $x-1$이 두 다항식 A, B의 최대공약수이고, 최대공약수는 A, B의 인수이므로 $x=1$을 두 다항식에 각각 대입하면 그 값이 0이어야 한다.

$1+p+q+1=0$, $1+q+p+1=0$

$\therefore\ p+q=-2$

45. 두 다항식 $x^2 + px + q$ 와 $x^2 + qx + p$ 의 최대공약수가 $x - a$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $p = q$ ② $p + q = 1$ ③ $p = q + 1$

④ $pq = 1$ ⑤ $p + q = -1$

해설

나머지 정리에 의해 $x = a$ 를 대입하면 $a^2 + pa + q = 0$, $\alpha^2 + qa + p = 0$ 이다.
두식을 빼면, $(p-q)a-(p-q) = 0$, $(p-q)(a-1) = 0 \Leftrightarrow p = q$ 또는 $a = 1$
$p = q$ 이면 최대공약수가 $x^2 + px + q$ 가 되므로, 조건에 맞지 않는다
$\therefore \quad a = 1$ 에서 $p + q = -1$

46. 다항식 $x^{2005}+x^5+x^3+1$을 삼차식 x^3+x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지는?

① x^2-3　② x^2+x-2　③ $-x^2-1$

④ $-x^2+x$　⑤ $x-1$

해설

$x^{2005}+x^5+x^3+1=(x^3+x^2+x+1)Q(x)+ax^2+bx+c=$
$(x+1)(x^2+1)Q(x)+ax^2+bx+c$ 양변에 $x=-1$을 대입하면
$a-b+c=-2\cdots$㉠
$(x^2)^{1002}\times x+(x^2)^2\times x+x^2\times x+1$
$=(x+1)(x^2+1)Qx+ax^2+bx+c$에서
양변에 $x^2=-1$을 대입하면
$x+x-x+1=-a+bx+c$
$x+1=bx+c-a$
$\therefore\ b=1,\ c-a=1\cdots$㉡
㉠, ㉡에서 $a=-1,\ b=1,\ c=0$
$\therefore$구하는 나머지는 $-x^2+x$

해설

$x^{2005}+x^5+x^3+1$
$=(x^3+x^2+x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$
$=(x+1)(x^2+1)Q(x)+ax^2+bx+c$
양변에 $x^2=-1$을 대입하면 좌변이 $x+1$
즉, 좌변의 식을 x^2+1로 나눈 나머지가 $x+1$
따라서 $ax^2+bx+c=a(x^2+1)+x+1$
$x^{2005}+x^5+x^3+1$
$=(x+1)(x^2+1)Q(x)+a(x^2+1)+x+1$
$=(x^2+1)\{(x+1)Q(x)+a\}+x+1$
양변에 $x=-1$을 대입하면 $-2=2a$
$\therefore\ a=-1$
$\therefore$구하는 나머지는 $-x^2+x$

47. 다음과 같은 삼차다항식 $P(x)$, $Q(x)$가 있다.
$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1999$, $Q(x) = -x^3 + cx^2 + dx - 1999$
두 삼차다항식을 $x^2 - 1$로 나누면 나머지가 서로 같다고 한다. 이때, $P(1999) - Q(1999)$의 값은?

① -3998　② -1999　③ 0
④ 1999　⑤ 3998

해설

$H(x) = P(x) - Q(x)$로 놓으면
$H(x)$는 $x^2 - 1$로 나누어떨어지므로
$H(x) = 2x^3 + (a-c)x^2 + (b-d)x + 3998$
$\qquad = (x^2 - 1)(2x - 3998)$으로 놓을 수 있다.
($\because$ x^3의 계수가 2이고 상수항이 3998이므로 $x^2 - 1$로 나눈 몫은 $2x - 3998$이다.)
$\therefore P(1999) - Q(1999)$
$= H(1999)$
$= (1999^2 - 1)(3998 - 3998)$
$= 0$

48. 다항식 x^6을 $x+\frac{1}{2}$로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 할 때, $Q(x)$를 $x+\frac{1}{2}$로 나눌 때의 나머지는?

① $\frac{1}{64}$ ② $-\frac{1}{32}$ ③ $\frac{3}{32}$ ④ $-\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{1}{16}$

해설

나머지정리에 의하여 $R=\left(-\frac{1}{2}\right)^6$

$a=-\frac{1}{2}$로 놓으면

$R=a^6$

$x^6=(x-a)Q(x)+a^6$에서

$Q(x)=\frac{x^6-a^6}{x-a}$

$=x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^4x+a^5$

$Q(x)$를 $x-a$로 나눈 나머지는 $Q(a)$의 값과 같으므로 $Q(a)=6a^5$

따라서 $Q\left(-\frac{1}{2}\right)=6\left(-\frac{1}{2}\right)^5=-\frac{3}{16}$

49. 다항식 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나눈 나머지가 $2x+1$이고, $(x-2)^3$으로 나눈 나머지가 x^2-x+6이다. $f(x)$를 $(x+1)(x-2)^2$으로 나눈 나머지는?

① $3x+1$　　② $3x-2$　　③ $3x+2$

④ x^2-2x+1　　⑤ x^2-x+6

해설

$f(x)=(x+1)^2A(x)+2x+1$에서 $f(-1)=-1$

$f(x)=(x-2)^3B(x)+x^2-x+6$

$\quad =(x-2)^3B(x)+(x-2)^2+3x+2$

$\quad =(x-2)^2\{(x-2)B(x)+1\}+3x+2$

즉 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 나머지는 $3x+2$

구하는 나머지를 ax^2+bx+c라 하면

$f(x)=(x+1)(x-2)^2Q(x)+ax^2+bx+c$

$\quad =(x+1)(x-2)^2Q(x)+a(x-2)^2+3x+2$

$f(-1)=9a-1=-1 \quad \therefore a=0$

$ax^2+bx+c=a(x-2)^2+3x+2$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $3x+2$

50. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $\frac{a-b+c}{a+b+c}=\frac{-a-b+c}{a-b-c}$ 일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

㉠ 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형
㉡ 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형
㉢ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형
㉣ $a=b$ 인 이등변삼각형
㉤ $b=c$ 인 이등변삼각형

① 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형

② 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형

③ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형

④ $a=b$ 인 이등변삼각형

⑤ $b=c$ 인 이등변삼각형

해설

$\frac{a-b+c}{a+b+c}=\frac{-a-b+c}{a-b-c}$ 에서

$(a-b+c)(a-b-c)=(a+b+c)(-a-b+c)$

$(a-b+c)(a-b-c)+(a+b+c)(a+b-c)=0$

$\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\}+\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}=0$

$(a-b)^2-c^2+(a+b)^2-c^2=0$

$a^2-2ab+b^2-c^2+a^2+2ab+b^2-c^2$

$=2a^2+2b^2-2c^2$

$=2(a^2+b^2-c^2)=0$

$\therefore a^2+b^2-c^2=0$

그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형이다.