1. 복소수 $z=(2+i)a^2+(1+4i)a+2(2i-3)$이 순허수일 때, 실수 a의 값은?

① -2 ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$z=(2a^2+a-6)+(a^2+4a+4)i$

순허수이므로 $2a^2+a-6=0$

$\Rightarrow \quad (a+2)(2a-3)=0$

$\Leftrightarrow \ a=-2$ 또는 $a=\frac{3}{2}$

그런데 $a=2$이면,

$a^2+4a+4=0$이 되어 순허수가 성립되지 않는다.

$\therefore \quad a=\frac{3}{2}$

2. $\dfrac{2-i}{2+i}+\dfrac{2+i}{2-i}$ 를 간단히 하면? (단, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)

① $\dfrac{6}{5}$ ② 2 ③ $\dfrac{8}{5}$ ④ $\dfrac{8}{3}$ ⑤ 3

해설

$$\frac{2-i}{2+i}+\frac{2+i}{2-i}=\frac{(2-i)^2+(2+i)^2}{(2+i)(2-i)}$$

$$=\frac{3+3}{5}=\frac{6}{5}$$

3. $x = 1 + \sqrt{2}i,\ y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ -3

해설

$x + y = 2,\ xy = 3$

$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 4 - 6 = -2$

4. $\dfrac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}}$ 의 값은 ?

① $1-\sqrt{2}$ ② $-1-\sqrt{2}$ ③ $(1+\sqrt{2})i$

④ $-(1+\sqrt{2})i$ ⑤ $(1-\sqrt{2})i$

해설

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}} &= \frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{1}{i} \\
&= (\sqrt{2}+1) \times (-i) \\
&= -(1+\sqrt{2})i
\end{aligned}
$$

5. $\sqrt{-x^2(x^2-1)^2}$ 이 실수가 되는 서로 다른 실수 x들의 총합은?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

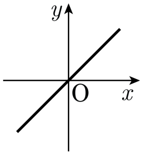
해설

$$\begin{aligned}\sqrt{-x^2(x^2-1)^2} &= \sqrt{x^2(x^2-1)^2}\,i \\ &= \sqrt{x^2}\sqrt{(x^2-1)^2}\,i \\ &= |x|\cdot|x^2-1|\,i \\ &= |x|\cdot|x+1||x-1|\,i\end{aligned}$$

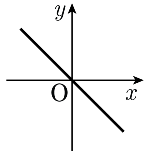
그러므로 $x=0,\ 1,\ -1$일 때 총합은 0이 된다.

6. $(3+2i)z$가 실수가 되도록 하는 복소수 $z=x+yi$를 점 $(x,\ y)$로 나타낼 때, 점 $(x,\ y)$는 어떤 도형 위를 움직이는가? (단, $x,\ y$는 실수)

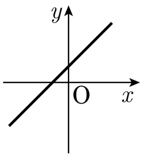
①



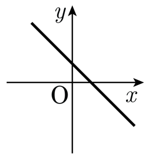
②



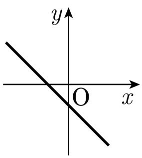
③



④



⑤



해설

$$\begin{aligned}(3+2i)(x+yi) &= 3x+3yi+2xi-2y \\ &= (3x-2y)+(2x+3y)i\end{aligned}$$

주어진 식이 실수가 되려면 허수부가 0이어야 하므로 $2x+3y=0$

$\therefore\ y=-\dfrac{2}{3}x$

따라서 기울기가 음수이고 y절편이 0인 그래프는 ②이다.

7. 복소수 $z = x+yi$를 좌표평면 위에 점 $p(x,\ y)$에 대응시킬 때, $(3-4i)z$가 실수가 되게 하는 점 p의 자취가 나타내는 도형은?

① 기울기가 양인 직선
② 기울기가 음인 직선
③ 위로 볼록한 포물선
④ 아래로 볼록한 포물선
⑤ 원

해설

$$\begin{aligned}(3-4i)\,z &= (3-4i)(x+yi) \\ &= (3x+4y)+(-4x+3y)\,i\end{aligned}$$

실수가 되려면 허수부 $-4x+3y=0$이다.

$\therefore y = \dfrac{4}{3}x$ ($\Rightarrow$기울기가 양인 직선)

8. 복소수 $z=(1+i)x^2+(5+2i)x+3(2-i)$에서 z가 순허수일 때, 실수 x의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$z=(x^2+5x+6)+(x^2+2x-3)i$

$\quad=(x+2)(x+3)+(x-1)(x+3)i$

순허수가 되려면 실수부$=0$, 허수부$\neq 0$

$\therefore\ x=-2$

9. 복소수 $(1+i)x^2+2(2+i)x+3-3i$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, 실수 x의 값은?
(단, $i^2=-1$)

① -1 ② 1 ③ -3 ④ 3 ⑤ 7

해설

$(x^2+4x+3)+(x^2+2x-3)i$가 순허수이어야 하므로
$x^2+4x+3=0,\ x^2+2x-3\neq 0$
$(x+3)(x+1)=0,\ x=-1,\ x=-3$
$(x+3)(x-1)\neq 0,\ x\neq 1,\ x\neq -3$
$\therefore\ x=-1$

10. $\alpha = 2+i$, $\beta = 1-2i$ 일 때, $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\alpha\beta} + \left(\frac{1}{\beta}\right)^2$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $\frac{4}{8} - \frac{3}{8}i$　　② $\frac{4}{8} \pm \frac{3}{8}i$　　③ $\frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$

④ $\frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$　　⑤ $\frac{4}{8} + \frac{3}{8}i$

해설

$\alpha = 2+i,\ \beta = 1-2i = -i(2+i) = -i\alpha$ 이므로 $\beta^2 = -\alpha^2$

$$\therefore\ \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} = 0$$

$$\begin{aligned}\therefore\ (\text{준식}) &= \frac{1}{\alpha\beta}\\ &= \frac{1}{(2+i)(1-2i)}\\ &= \frac{1}{4-3i}\\ &= \frac{4+3i}{25}\\ &= \frac{4}{25} + \frac{3}{25}i\end{aligned}$$

11. 복소수 z의 켤레복소수가 $\bar{z}$일 때, 등식 $(1-i)\bar{z}+2iz=3-i$를 만족시키는 z를 구하면?

① $3-2i$　② $-3+i$　③ $3+i$
④ $-3-2i$　⑤ $3-i$

해설

복소수 $z=x+yi(x,\ y$ 는 실수$)$라 놓으면
$\bar{z}=x-yi$
따라서, 주어진 식은
$(1-i)(x-yi)+2i(x+yi)=3-i$
$x-yi-xi-y+2xi-2y=3-i$
$(x-3y)+(x-y)i=3-i$
복소수의 상등에 의하여 $x-3y=3$, $x-y=-1$
$\therefore\ x=-3,\ y=-2$
$\therefore\ z=-3-2i$

12. x 에 대한 방정식 $(a-2)(x-a)=0$ 의 풀이 과정에서 다음 중 옳은 것은?

① $a=0$ 일 때, $x=2$

② $a \neq 2$ 일 때, $x=a$

③ $a=2$ 일 때, 불능

④ $a=0$ 일 때, 부정

⑤ 해는 없다.

해설

$(a-2)(x-a)=0$

$\Rightarrow \quad a=2$ 또는 $x=a$

i) $a=2$ 일 때 : 부정

ii) $a \neq 2$ 일 때 : $x=a$

13. x에 대한 일차방정식 $5x + a = 2x + 12$의 해가 자연수일 때, 자연수 a 의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개
④ 4개 ⑤ 무수히 많다

해설

$5x - 2x = 12 - a, 3x = 12 - a$

$\therefore x = \dfrac{12 - a}{3}$

자연수 $a = 1, 2, 3, \cdots$ 을 대입했을 때,

$x = \dfrac{12 - a}{3}$ 가 자연수가 되는 경우는

$12 - a$ 가 3 의 배수이면서 $a < 12$ 일 때이다.

i) $a = 3$ 일 때, $x = \dfrac{12 - 3}{3} = 3$

ii) $a = 6$ 일 때, $x = \dfrac{12 - 6}{3} = 2$

iii) $a = 9$ 일 때, $x = \dfrac{12 - 9}{3} = 1$

따라서 자연수 a의 개수는 3개이다.

14. $|x-2|+|x-3|=1$을 만족하는 실수 x의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개

④ 3개 ⑤ 4개이상

해설

$|x-2|+|x-3|=1$에서

i) $x<2$일 때,

$-(x-2)-(x-3)=1$

$\therefore\ x=2$ (성립하지 않음)

ii) $2\le x<3$일 때,

$(x-2)-(x-3)=1$

$\therefore\ 0\cdot x=0$ (모든 실수)

iii) $x\ge 3$일 때,

$(x-2)+(x-3)=1$

$\therefore\ x=3$

15. 방정식 $|x-3|+|x-4|=2$ 의 해의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

i) $x<3$ 일 때,

$-(x-3)-(x-4)=3,\ -2x=-5$

$\therefore\ x=\frac{5}{2}$

ii) $3\le x<4$ 일 때

$(x-3)-(x-4)=2,\ 0\cdot x=1$

$\therefore$ 해가 없다.

iii) $x\ge 4$ 일 때

$x-3+x-4=2,\ 2x=9$

$\therefore\ x=\frac{9}{2}$

따라서 $x=\frac{5}{2},\ \frac{9}{2}$ 이고 그 합은 7

16. 연산 $*$를 $a*b=ab+2(a+b)$라 정의할 때, 다음 방정식의 두 근을 α, β라 한다. 이때, $|\alpha-\beta|$의 값은?

$$(3x*x)-(3*x)+\{(-1)*2\}=0$$

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

연산 $*$ 의 정의에 따라서
$3x*x=3x\cdot x+2(3x+x)=3x^2+8x$, $3*x=3\cdot x+2(3+x)=5x+6$,
$-1*2=(-1)\cdot 2+2(-1+2)=-2+2=0$
주어진 식은 $3x^2+8x-(5x+6)+0=0$
$3x^2+3x-6=0$ 에서 $3(x+2)(x-1)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ $\therefore$ $|\alpha-\beta|=3$

17. 이차방정식 $|x^2-5|=4x$의 모든 근의 합은?

① 5　② 0　③ 6　④ 10　⑤ 12

해설

i) $x^2-5 \ge 0 \Rightarrow x \le -\sqrt{5}$ 또는 $x \ge \sqrt{5}$ $\cdots$ ㉠

$x^2-4x-5=0$

$(x+1)(x-5)=0$

$x=-1$ 또는 5

$\Rightarrow \quad x=5$ ($\because$ ㉠)

ii) $x^2-5<0 \Rightarrow -\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$ $\cdots$ ㉡

$x^2+4x-5=0$

$(x-1)(x+5)=0$

$x=1$ 또는 -5

$\Rightarrow \quad x=1$ ($\because$ ㉡)

$\therefore$ 근의 합 : 6

18. 방정식 $x^2 - 2|x| - 3 = 0$의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

ⅰ) $x \geq 0$일 때

$x^2 - 2x - 3 = 0$, $(x+1)(x-3) = 0$

$x = -1$ 또는 $x = 3$

그런데 $x \geq 0$이므로 $x = 3$

ⅱ) $x < 0$일 때

$x^2 + 2x - 3 = 0$, $(x-1)(x+3) = 0$

$x = 1$ 또는 $x = -3$

그런데 $x < 0$이므로 $x = -3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x = 3$ 또는 $x = -3$

따라서 근의 합은 0이다.

19. 방정식 $x^2+|x|=|x-1|+5$를 만족하는 두 근의 곱은?

① $-2\sqrt{6}$ ② $-\sqrt{6}$ ③ 0

④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

해설

ⅰ) $x<0$일 때

$x^2-x=-(x-1)+5,\ x^2=6$

$\therefore x=\pm\sqrt{6}$

그런데 $x<0$이므로 $x=-\sqrt{6}$

ⅱ) $0\le x<1$일 때

$x^2+x=-(x-1)+5$

$x^2+2x-6=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{7}$

그런데 $0\le x<1$이므로 해가 없다.

ⅲ) $x\ge 1$일 때,

$x^2+x=x-1+5,\ x^2=4$

$\therefore x=\pm 2$

그런데 $x\ge 1$이므로 $x=2$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 주어진 방정식의 해는

$x=2$ 또는 $x=-\sqrt{6}$이므로

두 근의 곱은 $-2\sqrt{6}$

20. $1 < x < 3$ 인 x에 대하여 방정식 $x^2 - [x]x - 2 = 0$의 해를 구하여라.
(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

① 2 ② $1 + \sqrt{2}$ ③ $1 + \sqrt{3}$

④ $\sqrt{5} - 1$ ⑤ $2\sqrt{2} - 1$

해설

(i) $1 < x < 2$일 때, $[x] = 1$
준식은 $x^2 - x - 2 = 0$, $(x-2)(x+1) = 0$
$\therefore\ x = -1$ 또는 $x = 2$
그런데 $1 < x < 2$이므로 만족하는 해가 없다.
(ii) $2 \leq x < 3$일 때, $[x] = 2$
준식은 $x^2 - 2x - 2 = 0$이고 근의 공식에 의하여 $x = 1 \pm \sqrt{3}$
그런데 $2 \leq x < 3$이므로 만족하는 해는
$x = 1 + \sqrt{3}$

21. x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $-1+\sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=2$

▷ 정답 : $b=-1$

해설

$x^2+ax+b=0$에 $x=-1+\sqrt{2}$를 대입하여 정리하면

$3-2\sqrt{2}+a(-1+\sqrt{2})+b=0$

$-a+b+3+(a-2)\sqrt{2}=0$

$-a+b+3=0$과 $a-2=0$에서 $a=2,\ b=-1$

22. x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+i$일 때, 실수 a, b의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-2$

▷ 정답 : $b=2$

해설

$x^2+ax+b=0$에 $x=1\pm i$를 대입하여 정리하면
$1+2i-1+a(1+i)+b=0$과
$a+b+(a+2)i=0$이다.
위 식을 정리하면 $a+b=0$과 $a+2=0$에서
$a=-2, b=2$이다.

해설

계수가 실수이므로 한 근이 복소수 근이면 켤레복소수 근을 갖는다.
따라서 두 근은 $1+i,\ 1-i$
근과 계수의 관계에서
$-a=(1+i)+(1-i)=2 \qquad \therefore a=-2$
$b=(1+i)(1-i)=2 \qquad \therefore b=2$

23. 이차방정식 $x^2 - x + m = 0$의 한 근이 2일 때, 다른 한 근을 구하여라. (단, m은 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 - x + m = 0$의 한 근이 2이므로
$x = 2$를 대입하면
$2^2 - 2 + m = 0 \quad \therefore m = -2$
따라서 주어진 방정식은 $x^2 - x - 2 = 0$이다.
이 방정식을 풀면
$(x - 2)(x + 1) = 0$에서 $x = 2$ 또는 $x = -1$
이므로 다른 한 근은 -1이다.

24. 이차방정식 $x^2 - ax + 12 = 0$의 두 근이 3, b일 때, ab의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

$x = 3$이 $x^2 - ax + 12 = 0$의 근이므로

$9 - 3a + 12 = 0 \quad \therefore \ a = 7$

이 때 $x^2 - 7x + 12 = 0$에서 $(x-3)(x-4) = 0$

그러므로 $x = 3$ 또는 $x = 4$

$\therefore \ b = 4 \quad \therefore \ ab = 28$

25. 이차방정식 $x^2 + mx + m - 1 = 0$의 한 근이 1일 때, 다른 한 근을 구하여라.

▶ **답:**

▷ **정답:** -1

해설

1이 $x^2 + mx + m - 1 = 0$의 근이므로

$x = 1$을 대입하면 $1 + m + m - 1 = 0 \quad \therefore m = 0$

주어진 방정식은 $x^2 - 1 = 0 \quad \therefore \; x = \pm 1$

따라서 다른 한 근은 $x = -1$

26. $x^2+ax+b=0,\ x^2+2bx+3a=0$를 동시에 만족하는 x는 -1밖에 없을 때, 상수 ab의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 12

해설

$x=-1$은 두 이차방정식 $x^2+ax=b=0,$
$x^2+2bx+3a=0$의 공통근이므로
$1-a+b=0,\ 1-2b+3a=0$
두 식을 연립하여 풀면
$a=-3,\ b=-4$
$\therefore ab=12$

27. 다음 설명 중 <u>틀린</u> 것을 고르면?

① $x^2+5x+1=0$은 서로 다른 두 실근 을 가진다.

② $x^2+5=0$는 두 허근을 가진다.

③ $m=0$ 또는 4일 때, $x^2-mx+m=0$은 중근을 가진다.

④ $k \geqq 1$일 때 $x^2-2x+2-k=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다

⑤ $x^2-6x+a=0$ 은 $a=9$일 때만 중근을 가진다.

해설

① $25-4\cdot1\cdot1=21>0$

② $0^2-4\cdot1\cdot1=-4<0$

③ $(-m)^2-4\cdot1\cdot m=m(m-4)=0$

⑤ $9-1\cdot a=9-a=0,\ a=9$

$\Rightarrow$ ④ $(-1)^2-1\cdot(2-k)=k-1>0\ \therefore\ k>1$

28. x에 대한 이차방정식 $x^2k - \left(x - \frac{1}{4}\right)k + \frac{1}{4} = 0$이 허근을 가질 때, 실수 k의 값의 범위는?

① $k < 0$ ② $k > 0$ ③ $0 < k < \frac{1}{4}$

④ $k \leq 0$ ⑤ $k \geq 0$

해설

$x^2k - \left(x - \frac{1}{4}\right)k + \frac{1}{4} = 0$이

허근을 가져야 하므로

x에 대한 내림차순으로 정리하면

$kx^2 - kx + \frac{1}{4}(k+1) = 0$

$D = (-k)^2 - 4k \cdot \frac{1}{4}(k+1) < 0$

$= k^2 - k^2 - k = -k < 0 \quad \therefore k > 0$

$\therefore k > 0$

29. x에 대한 이차방정식 $ax^2+2(a-1)x-(a+1)=0$은 어떤 근을 갖는지 판별하시오. (단, a는 실수)

① 중근 ② 한 실근과 한 허근

③ 서로 다른 두 실근 ④ 서로 같은 두 실근

⑤ 서로 다른 두 허근

해설

$$ax^2+2(a-1)x-(a+1)=0$$

$$\frac{D}{4}=(a-1)^2+a(a+1)$$

$$=a^2-2a+1+a^2+a$$

$$=2a^2-a+1=2\left(a^2-\frac{1}{2}a\right)+1$$

$$=2\left(a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{16}\right)+1-\frac{1}{8}$$

$$=2\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0$$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

30. 이차방정식 $2x^2-4x-3k=0$이 허근을 갖고, 동시에 $x^2+5x-2k=0$이 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하면?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$2x^2-4x-3k=0$이 허근을 가질 조건은

$$\frac{D}{4}=4+6k<0$$

$$\therefore\ k<-\frac{2}{3}\quad\cdots\cdots㉠$$

$x^2+5x-2k=0$이 실근을 가질 조건은

$$D=25+8k\geq 0$$

$$\therefore\ k\geq -\frac{25}{8}\quad\cdots\cdots㉡$$

㉠, ㉡에서 $-\frac{25}{8}\leq k<-\frac{2}{3}$

따라서, 정수 $k=-3,\ -2,\ -1$

$\therefore$ 정수 k의 개수는 3개

31. x에 대한 이차방정식 $x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$

항상 중근을 가질 조건 : 판별식 $D=0$

$D=(2m+a+b)^2-4(m^2+ab)=0$

$4m^2+a^2+b^2+4ma+2ab+4mb-4m^2-4ab=0$

m에 관해 식을 정리하면

$(4a+4b)m+(a^2-2ab+b^2)=0$

$4a+4b=0, \quad a^2-2ab+b^2=0$

$\therefore a+b=0$

32. x에 관한 이차방정식 $x^2+2(m+a-2)x+m^2+a^2-3b=0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 상수 a, b에 대하여 $a+3b$의 값은?

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

해설

중근을 가지려면 판별식이 0이다.

$D' = (m+a-2)^2-(m^2+a^2-3b)=0$

$\Rightarrow \quad 2m(a-2)+4-4a+3b=0$

m에 관계없이 성립하려면,

$a=2 \quad \Rightarrow \quad b=\dfrac{4}{3}$

$a+3b=6$

33. $|x|(2+3i)+2|y|(1-2i)=6-5i$를 만족하는 실수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$를 꼭짓점으로 하는 다각형의 넓이는?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

$(2|x|+2|y|)+(3|x|-4|y|)i=6-5i$

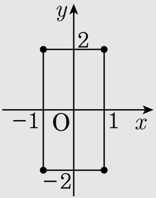
복소수의 상등에 의하여

$|x|+|y|=3,\ 3|x|-4|y|=-5$

두 식을 연립하면

$|x|=1,\quad |y|=2$

$(x,\ y)\ \rightarrow\ (1,\ 2),\ (1,-2),\ (-1,\ 2),\ (-1,\ -2)$



$\therefore$ 직사각형의 넓이 $=2\times 4=8$

34. 자연수 n에 대하여 $1+\frac{1}{i}+\left(\frac{1}{i}\right)^3+\left(\frac{1}{i}\right)^5+\cdots+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$의 값을 모두 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $1-i$

▷ 정답 : 1

해설

$\frac{1}{i}=-i,\ \left(\frac{1}{i}\right)^3=i$

i) $n=2k$일 때,

$$1+\frac{1}{i}+\left(\frac{1}{i}\right)^3+\left(\frac{1}{i}\right)^5+\cdots+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$$
$$=1-i+i-i+\cdots+i=1$$

ii) $n=2k-1$일 때

$$1+\frac{1}{i}+\left(\frac{1}{i}\right)^3+\left(\frac{1}{i}\right)^5+\cdots+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$$
$$=1-i+i-i+\cdots-i$$
$$=1-i$$

35. 정수 n에 대해 $z = i^n + i^{-n}, i = \sqrt{-1}$을 만족하는 z의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개

④ 4개 ⑤ 4개보다 많다.

해설

정수 n 에 대하여 $i^n = i$ 또는 -1 또는 $-i$ 또는 1,

$i^n = i$ 이면 $i^{-n} = -i$, $i^n = -1$ 이면

$i^{-n} = -1$, $i^n = -i$ 이면

$i^{-n} = i$, $i^n = 1$ 이면

$i^{-n} = 1$

$\therefore\ i^n + i^{-n} = 0, -2, 0, 2$

$\therefore\ z$는 3개다.

36. 복소수 $z=a+bi$, $w=b+ai$ (a, b는 $ab\neq 0$ 인 실수, $i=\sqrt{-1}$)에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? (단, $\overline{z}$, $\overline{w}$ 는 각각 z, w 의 켤레복소수이다.)

① $i\overline{z}=w$

② $\dfrac{\overline{w}}{\overline{z}}=\dfrac{z}{w}$

③ $z\cdot\overline{w}=\overline{z}\cdot w$

④ $z\cdot\overline{z}=w\cdot\overline{w}$

⑤ $i(\overline{z}+\overline{w})=z\ +\ w$

해설

① : $i\overline{z}=i(a-bi)=b+ai=w$

② :①에서 $\overline{z}=-iw$ ······ ㉠

같은 방법으로 $\overline{w}=-iz$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 대입하면 $\dfrac{\overline{w}}{\overline{z}}=\dfrac{-iz}{-iw}=\dfrac{z}{w}$

③ :㉠, ㉡을 대입하면

(좌변) $=z\cdot(-iz)=-iz^2$,

(우변) $=(-iw)\cdot w=-iw^2$

∴ 좌변≠우변

④ : ②에서 $z\cdot\overline{z}=w\cdot\overline{w}$

⑤ : $i(\overline{z}+\overline{w})=i\overline{z}+i\overline{w}=w+z=z+w$

37. $z^2 = \sqrt{5}+i$ 를 만족하는 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z}$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

$z = x+yi$ $(x,\ y$ 는 실수$)$ 로 놓으면 $(x+yi)^2 = \sqrt{5}+i$

$x^2-y^2+2xyi = \sqrt{5}+i$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x^2-y^2 = \sqrt{5},\ 2xy=1$

$z\bar{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2+y^2$ 이므로

$$(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2+4x^2y^2 = (\sqrt{5})^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6$$

$x^2+y^2>0$ 이므로 $x^2+y^2 = \sqrt{6}$

$\therefore\ z\bar{z} = \sqrt{6}$

해설

$z^2 = \sqrt{5}+i$, $\overline{z^2} = \sqrt{5}-i$

$z^2\overline{z^2} = (\sqrt{5}+i)(\sqrt{5}-i) = 6$

$z\bar{z} = \pm\sqrt{6}$

$z\bar{z} \geq 0$ 이므로 $z\bar{z} = \sqrt{6}$

38. 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w 라 할 때, $z=\dfrac{3w+1}{w+1}$ 이라 하면, $z\overline{z}$ 의 값은?
(단, $\overline{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① 7　　② 6　　③ 5　　④ 4　　⑤ 3

해설

$x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w 라 하면, 다른 근은 $\overline{w}$ 이다.

$w+\overline{w}=-1,\ w\overline{w}=1$

$$z\overline{z}=\frac{3w+1}{w+1}\cdot\frac{3\overline{w}+1}{\overline{w}+1}$$
$$=\frac{9w\overline{w}+3(w+\overline{w})+1}{w\overline{w}+(w+\overline{w})+1}$$
$$=7$$

39. 다음 중 $(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$를 만족하는 복소수 z의 개수는? (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수)

① 없다. ② 1 개 ③ 2 개

④ 3 개 ⑤ 무수히 많다.

해설

$z=a+bi$로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$ (단, a, b는 실수)이므로 주어진 식에 대입하면

$(2+3i)(a+bi)+(2-3i)(a-bi)=2$

$(2a-3b)+(3a+2b)i+(2a-3b)-(3a+2b)i=2$

$2(2a-3b)=2$

$\therefore\ 2a-3b=1$

따라서 $2a-3b=1$을 만족하는 a, b는 무수히 많고, $z=a+bi$이므로 문제의 조건을 만족하는 z가 무수히 많음을 알 수 있다.

40. $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

ㄱ $\alpha^2+\alpha+1=0$

ㄴ $1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{15}=1$

ㄷ $z=\dfrac{\alpha+3}{2\alpha+1}$ 일 때, $z\bar{z}=\dfrac{7}{3}$

① ㄱ　② ㄱ , ㄴ　③ ㄱ , ㄷ

④ ㄴ , ㄷ　⑤ ㄱ , ㄴ , ㄷ

해설

ㄱ :$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $2\alpha+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\alpha^2+\alpha+1=0$

ㄴ :$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$, $\alpha^3=1$

$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{15}$

$=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3(1+\alpha+\alpha^2)+\cdots+\alpha^{15}=\alpha^{15}$

$=(\alpha^3)^5=1$ $(\because\ \alpha^2+\alpha+1=0\ )$

ㄷ :$\bar{\alpha}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $\alpha+\bar{\alpha}=-1, \alpha\bar{\alpha}=1$

$z=\dfrac{\alpha+3}{2\alpha+1}$, $\bar{z}=\dfrac{\bar{\alpha}+3}{2\bar{\alpha}+1}$

$z\bar{z}=\dfrac{\alpha\bar{\alpha}+3(\alpha+\bar{\alpha})+9}{4\alpha\bar{\alpha}+2(\alpha+\bar{\alpha})+1}=\dfrac{1-3+9}{4-2+1}=\dfrac{7}{3}$

해설

ㄷ 이 성립함을 다음과 같이 직접 계산할 수 있다.

$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$\Rightarrow 2\alpha+1=\sqrt{3}i, \alpha+3=\dfrac{5+\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore \dfrac{\alpha+3}{2\alpha+1}=\dfrac{5+\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i}$

$=-\dfrac{5i-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

$z\cdot\bar{z}=\dfrac{\sqrt{3}-5i}{2\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{3}+5i}{2\sqrt{3}}=\dfrac{7}{3}$

41. $a_1,\ a_2,\ \cdots a_{10}$ 은 1 또는 -1 의 값을 갖고 $a_1a_2\ \cdots\cdots\ a_{10}=1$ 일 때, $\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\cdots\cdots\sqrt{a_{10}}$ 의 값이 될 수 있는 수를 다음 <보기> 에서 모두 고르면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

보기

ㄱ 1 　 ㄴ -1 　 ㄷ i 　 ㄹ $-i$

① ㄱ 　 ② ㄱ, ㄴ 　 ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ 　 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

해설

$a_1a_2\ \cdots\cdots\ a_{10}=1$ 이면 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{10}$ 중에서 -1 이 되는 수는 짝수(0 포함) 개 있다.

i) -1 이 $4k+2(k=0,\ 1,\ 2)$ 개 있을 때

$$\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\ \cdots\cdots\ \sqrt{a_{10}}$$
$$=\sqrt{a_1a_2\cdots a_{10}}\ i^{4k+2}=\sqrt{1}\cdot i^2=-1$$

ii) -1 이 $4k(k=0,\ 1,\ 2)$ 개 있을 때

$$\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\ \cdots\cdots\ \sqrt{a_{10}}$$
$$=\sqrt{a_1a_2\cdots a_{10}}\ i^{4k}$$
$$=1$$

i), ii) 에서 ㄱ, ㄴ 만이 옳다.

42. 이차방정식 $x^2-2ix-k=0$의 근에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

ㄱ $k>1$이면 두 근은 실근이다.

ㄴ $k=1$이면 두 근은 같다.

ㄷ 두 근의 곱은 실수이다.

ㄹ $0<k<1$이면 두 근은 순허수이다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄴ, ㄹ ③ ㄱ, ㄴ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

해설

근의 공식을 이용하여 $x^2-2ix-k=0$ 의 근을 구하면 $x=i\pm\sqrt{-1+k}$

ㄱ $k>1$이어도 x는 허수이다.<거짓>

ㄴ $k=1$이면 $x=i$로 두 근은 같다.<참>

ㄷ 두 근의 곱 $-k$는 허수일 수도 있다.<거짓>

ㄹ $0<k<1$이면 $-1<-1+k<0$ 이므로 $\sqrt{-1+k}=ai$ 의 형태가 되어 x는 순허수이다.<참>

43. $x^2+3ax+b=0$과 $x^2-ax+c=0$은 공통근 1을 갖는다. 이 때, $2a^2+b-c$가 최소가 되는 a의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

조건에서

$1+3a+b=0 \quad \cdots ㉠$

$1-a+c=0 \quad \cdots ㉡$

㉠ $-$ ㉡ : $4a+b-c=0$

$\therefore\ b-c=-4a$

$\therefore\ 2a^2+b-c=2a^2-4a=2(a-1)^2-2$

따라서 $a=1$일 때, 최소이다.

44. $a^2-3a+1=0$일 때, $a^2-2a+\dfrac{3}{a^2+1}$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$a^2-3a+1=0$에서

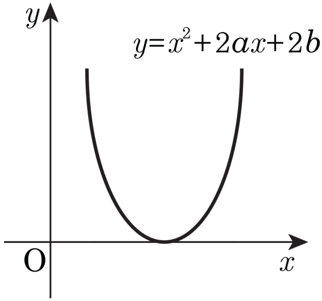
$$a^2-2a+\frac{3}{a^2+1}=a-1+\frac{3}{3a}=a+\frac{1}{a}-1$$

한편, $a^2-3a+1=0$의 양변을 a로 나누면

$$a-3+\frac{1}{a}=0 \quad \therefore\ a+\frac{1}{a}=3$$

$\therefore$(준식)$=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)-1=2$

45. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + 2b$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 방정식 $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$ 의 근에 대한 설명으로 옳은 것은?



① 서로 다른 양의 실근을 갖는다.

② 서로 다른 음의 실근을 갖는다.

③ 중근을 갖는다.

④ 서로 다른 부호의 실근을 갖는다.

⑤ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

해설

㉠ 그래프에서 중근이므로 $a^2 - 2b = 0$

㉡ $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$

판별식 $\dfrac{D}{4} = a^2 - b^2 - 2 \leftarrow a^2 = 2b$

$= 2b - b^2 - 2$

$= -(b^2 - 2b + 2)$

$= -(b-1)^2 - 1 < 0$

$\therefore$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

46. a, b, c가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $(a+b)x^2+2cx+a-b$는 x의 완전제곱식이다. 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형
② $a=b$인 이등변삼각형
③ $b=c$인 이등변삼각형
④ a가 빗변인 직각삼각형
⑤ c가 빗변인 직각삼각형

해설

$a,\ b,\ c$가 삼각형의 세 변의 길이이므로
$a>0,\ b>0,\ c>0$
따라서, $a+b>0$이므로 준식은 이차식이다.
준식이 완전제곱식이 되려면
판별식 $D=0$

$$\frac{D}{4}=c^2-(a+b)(a-b)=0$$

정리하면, $c^2-a^2+b^2=0$
$\therefore\ a^2=b^2+c^2$
따라서, a가 빗변인 직각삼각형

47. 이차식 $x^2 - xy - 6y^2 + ay - 1$이 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 양수 a의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 10 ⑤ 12

해설

$x^2 - xy - 6y^2 + ay - 1 = 0$에서 근의 공식을 이용하면

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4(-6y^2 + ay - 1)}}{2}$$

$$= \frac{y \pm \sqrt{25y^2 - 4ay + 4}}{2}$$

일차식의 곱으로 인수분해가 되려면 $\sqrt{}$ 안에 있는

$25y^2 - 4ay + 4$가 완전제곱식이 되어야 한다.

즉, $25y^2 - 4ay + 4 = (5y \pm 2)^2$

$\therefore -4a = \pm 20,$

$a = \pm 5$

$\therefore$ 양수 a는 5

48. 방정식 $(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$를 만족시키는 복소수 z는? (단, $\bar{z}$ 는 z의 켤레복소수)

① 존재하지 않는다.
② 한 개 있다.
③ 두 개뿐이다.
④ 무수히 많이 있다.
⑤ 세 개뿐이다.

해설

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 놓으면,

$(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$ 에서

$(2+3i)(a+bi)+(2-3i)(a-bi)=2$

$2(2a-3b)=2$

$\therefore$ $2a-3b=1$ 을 만족하는 실수 a, b 의 쌍은 무수히 많다.

49. $x = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$ 일 때 $x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x}}}}$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2

④ $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $\frac{-5+\sqrt{3}i}{4}$

해설

$x = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$ 에서 $2x+1 = \sqrt{3}i$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2+x+1=0 \therefore\ x+\frac{1}{x}=-1$

$$\begin{aligned}\therefore\ (\text{준식}) &= x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x-1}} \\ &= x + \frac{x-1}{x^2-x+1} \\ &= x + \frac{x-1}{-2x} \\ &= \frac{-2x^2+x-1}{-2x} \\ &= \frac{-2(-x-1)+x-1}{-2x} \\ &= \frac{3x+1}{-2x} \\ &= -\frac{3}{2} - \frac{1}{2x} \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{1}{1-\sqrt{3}i} \\ &= \frac{-5+\sqrt{3}i}{4}\end{aligned}$$

50. x에 대한 이차방정식 $2x^2-2(1-a-b)x+\{1+(a+b)^2\}=0$의 근이 실수일 때, $a^3+b^3-3ab+4$의 값을 구하면? (단, a, b는 실수)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

실근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=(1-a-b)^2-2\{1+(a+b)^2\}$$

$$=1-2(a+b)+(a+b)^2-2-2(a+b)^2\geq 0$$

$\therefore\ (a+b)^2+2(a+b)+1\leq 0$

즉, $(a+b+1)^2\leq 0$이고 $a,\ b$는 실수이므로

$a+b+1=0$

$\therefore\ a+b=-1$

$\therefore\ a^3+b^3-3ab+4$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)-3ab+4$

$=(-1)^3-3ab(-1)-3ab+4$

$=3$