

1. 다음 중 옳은 것은?

- ① 0 은 모든 자연수의 약수이다.
- ② 합성수의 약수는 4 개 이상이다.
- ③ 소수가 아닌 자연수는 모두 합성수이다.
- ④ 소수의 약수는 1 과 자기 자신뿐이다.
- ⑤ 소수는 홀수이다.

해설

소수는 1 보다 큰 자연수 중에서 1 과 자기 자신만을 약수로 가지는 수이다.

2. 다음 수를 소인수분해한 것 중에 옳지 않은 것은?

① $36 = 2^2 \times 3^2$

② $60 = 3 \times 4 \times 5$

③ $98 = 2 \times 7^2$

④ $105 = 3 \times 5 \times 7$

⑤ $120 = 2^3 \times 3 \times 5$

해설

② $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

3. 자연수 $A = 2^2 \times 3^n$ 의 약수의 개수가 24 일 때, n 의 값을 구하면?

① 2

② 5

③ 7

④ 8

⑤ 12

해설

$$(2 + 1)(n + 1) = 24$$

$$n + 1 = 8$$

$$\therefore n = 7$$

4. $90, 2^4 \times 3 \times 5^3$ 의 최대공약수는?

- ① $2 \times 3 \times 5$ ② $2^2 \times 3^2 \times 5$ ③ $2^2 \times 3 \times 5^2$
④ $2^3 \times 3 \times 5^2$ ⑤ $2^3 \times 3^2 \times 5^2$

해설

공통인 소인수를 모두 곱하는데 지수가 같으면 그대로, 다른 작은 쪽을 택하여 곱한다.

$90 = 2 \times 3^2 \times 5, 2^4 \times 3 \times 5^3$ 의 최대공약수: $2 \times 3 \times 5$

5. 두 자연수 $2^2 \times 3^2 \times 5$, $2 \times 3^3 \times 7$ 의 공약수의 개수는?

- ① 4 개 ② 5 개 ③ 6 개 ④ 7 개 ⑤ 8 개

해설

공약수는 최대공약수의 약수이므로

두 수의 최대공약수는 2×3^2

$\therefore$ 약수의 개수는 $(1+1) \times (2+1) = 6$ (개)

6. 200 보다 작은 자연수 중에서 15 와 20 의 공배수를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 60

▷ 정답 : 120

▷ 정답 : 180

해설

15 와 20 의 공배수는 15 와 20 의 최소공배수의 배수와 같다.
15 와 20 의 최소공배수는 60
(60 의 배수) = 60, 120, 180, 240, ...

7. 석우네 반 남학생 21 명과 여학생 28 명은 운동경기를 하기 위해 조를 짜기로 하였다. 가능한 많은 인원로 조를 편성하려고 한다. 이 때, 몇 조까지 만들어지는지 구하여라.

▶ 답: 조

▶ 정답 : 7조

해설

남학생 수와 여학생 수의 최대 공약수는 7 이다.
따라서 7 조까지 만들어진다.

8. 가로 길이 450 m, 세로 길이 240 m 인 직사각형 모양의 목장이 있다. 목장의 가장자리를 따라 일정한 간격으로 나무를 심는데, 네 모퉁이에는 반드시 나무를 심는다고 한다. 나무를 가능한 한 적게 심으려면 나무의 간격은 얼마이어야 되는가?

① 30 m ② 15 m ③ 10 m ④ 3 m ⑤ 2 m

해설

나무를 가능한 한 적게 심으려면 심는 간격이 넓어야 하므로 450과 240의 최대공약수인 30 m 이다.

9. 서로 맞물려 도는 두 톱니바퀴 A, B 가 있다. A 의 톱니바퀴의 수는 36 개, B 의 톱니의 수는 48 개일 때, 두 톱니바퀴가 같은 톱니에서 처음으로 다시 맞물리는 것은 A 가 몇 바퀴 돈 후인가?

- ① 4 바퀴 ② 5 바퀴 ③ 6 바퀴
④ 7 바퀴 ⑤ 8 바퀴

해설

$36 = 2^2 \times 3^2$, $48 = 2^4 \times 3$ 의
최소공배수는 $2^4 \times 3^2 = 144$ 이다.
 $\therefore$ A 가 돈 회수는 $\frac{144}{36} = 4$ (바퀴) 이다.

10. 가로 길이가 6 cm, 세로 길이가 8 cm, 높이가 12 cm 인 직육면체 모양의 벽돌을 빈틈없이 쌓아서 가장 작은 정육면체 모양을 만들려고 한다. 이때, 정육면체의 한 모서리 길이는?

- ① 24 cm ② 32 cm ③ 48 cm ④ 50 cm ⑤ 54 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이는 6, 8, 12 의 공배수이어야 하고, 가장 작은 정육면체를 만들려면 한 변의 길이는 6, 8, 12 의 최소공배수이어야 한다. 따라서 정육면체의 한 모서리의 길이는 24 cm 이다.

2)	6	8	12
2)	3	4	6
3)	3	2	3
	1	2	1

11. 세 자연수 3, 4, 5 중 어느 것으로 나누어도 나머지가 모두 2인 자연수 중에서 가장 작은 세 자리 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 122

해설

구하는 수는 (3, 4, 5의 공배수) + 2
3, 4, 5 의 최소공배수는 60이고 60의 배수는
60, 120, 180, ... 이다.
따라서 가장 작은 세 자리의 수는
 $120 + 2 = 122$ 이다.

12. 두 자연수의 곱이 540 이고 최소공배수가 60 일 때, 두 수의 최대공약수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

두 수 A, B 의 최대공약수를 G , 최소공배수를 L 이라 하면
 $A \times B = L \times G$ 이므로
 $540 = 60 \times G$ 이다.
 $\therefore G = 9$

13. 어떤 자연수를 10 으로 나누었더니, 몫이 7 이고 나머지가 8 이었다. 이 수를 15 로 나누었을 때의 몫을 a , 나머지를 b 라 할 때, $a - b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

어떤 자연수를 A 라 하면 $A = 10 \times 7 + 8 = 15 \times 5 + 3$ 이다.
따라서 $a = 5$, $b = 3$ 이므로 $a - b = 5 - 3 = 2$ 이다.

14. 다음 세 자리 수는 3의 배수이다. 안에 들어갈 알맞은 숫자를 모두 구하여라.

28

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : 5

▷ 정답 : 8

해설

각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 하므로

$$2 + \square + 8 = 10 + \square$$

$$\therefore \square = 2, 5, 8$$

15. 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?

- ㉠

$5^2 = 25$
- ㉡

$3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 = 3^2 \times 5^2 \times 7$
- ㉢

$2^4 = 4^3$
- ㉣

$\frac{1}{5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7} = \frac{1}{5^2 \times 7^3}$
- ㉤

$\frac{1}{5^3 \times 5^4} = \frac{1}{5^{12}}$

- ① ㉠, ㉡
- ② ㉠, ㉣
- ③ ㉠, ㉤
- ④ ㉡, ㉣
- ⑤ ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉢

$2^4 \neq 4^3$

㉤

$\frac{1}{5^3 \times 5^4} = \frac{1}{5^7}$

16. 다음 중 소수를 모두 골라라.

1 13 15 24 29 32 33 52 71 98

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

▷ 정답 : 29

▷ 정답 : 71

해설

주어진 수 중에서 소수는 13, 29, 71 이다.

17. 216 을 소인수분해하면 $2^a \times b^c$ 이다. 이때, $a + b + c$ 의 값은?

- ① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

해설

$216 = 2^3 \times 3^3$
따라서 $a = 3, b = 3, c = 3$
 $a + b + c = 9$

18. 252를 소인수분해한 후, 소인수의 합을 바르게 구한 것은?

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 15

해설

$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$, 소인수 : 2, 3, 7
 $2 + 3 + 7 = 12$

19. 48 에 자연수 x 를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 다음에서 x 가 될 수 있는 수를 모두 고르면(정답 2개)?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 9 ⑤ 12

해설

$48 = 2^4 \times 3$
곱해야 할 자연수가 x 이고, 어떤 자연수를 y 라 하면 $(2^4 \times 3) \times x = y^2$ 이다.
 $x = 3 \times 1^2, 3 \times 2^2, \dots$
 $= 3, 12, \dots$

20. 1 부터 200 까지의 자연수 중에서 약수의 개수가 3 개인 자연수는 모두 몇 개인가?

- ① 5 개 ② 6 개 ③ 7 개 ④ 8 개 ⑤ 9 개

해설

자연수 n 의 약수의 개수가 3 개이기 위해서는
1 과 n 이외에 약수가 한 개만 더 있어야하므로
자연수 n 은 소수의 완전제곱수이어야 한다.
따라서 1 부터 200 까지의 완전제곱수를 구하면
 $13^2 = 169 < 200$ 이고 $17^2 = 289 > 200$ 이므로
200 이하인 소수의 완전제곱수는
 $2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2$ 이다.

21. 두 수 $2^3 \times 3^4 \times 7^c$, $2^a \times 3^b \times 7^4$ 의 최대공약수가 $2^2 \times 3^2 \times 7^2$ 일 때, $a + b + c$ 의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

최대공약수가 $2^2 \times 3^2 \times 7^2$ 이고
 $2^3 \times 3^4 \times 7^c$ 에서 2 의 지수가 3 이므로
 $2^a \times 3^b \times 7^4$ 에서 2 의 지수가 2 이어야 한다.
같은 방식으로
 $2^3 \times 3^4 \times 7^c$ 에서 3 의 지수가 4 이므로
 $2^a \times 3^b \times 7^4$ 에서 3 의 지수가 2 이어야 한다.
또한,
 $2^a \times 3^b \times 7^4$ 에서 7 의 지수가 4 이므로
 $2^3 \times 3^4 \times 7^c$ 에서 7 의 지수가 2 이어야 한다.
따라서 $a = 2$, $b = 2$, $c = 2$ 이다.

22. 세 수 140, 28, 100 의 최소공배수는?

① $2 \times 5 \times 7$

② $2^2 \times 5^2$

③ $2 \times 5 \times 7^2$

④ $2^3 \times 5^2$

⑤ $2^2 \times 5^2 \times 7$

해설

$140 = 2^2 \times 5 \times 7$, $28 = 2^2 \times 7$, $100 = 2^2 \times 5^2$ 이므로, 최소공배수는 $2^2 \times 5^2 \times 7$ 이다.

23. 두 수 $3^a \times 5 \times 11^2$, $3^2 \times 7^b \times 11^c$ 의 최소공배수를 구하면 $3^4 \times 5 \times 7^3 \times 11^3$ 이다. $a + b - c$ 의 값으로 옳은 것은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$3^a = 3^4$ 이므로 $a = 4$,
 $7^b = 7^3$ 이므로 $b = 3$,
 $11^c = 11^3$ 이므로 $c = 3$ 이다.
따라서 $a + b - c = 4$ 이다.

24. 두 수 15 과 20 의 공배수 중 400 이하인 것의 개수는?

- ① 5 개 ② 6 개 ③ 7 개 ④ 8 개 ⑤ 9 개

해설

15 와 20 의 공배수는 최소공배수인 60 의 배수이므로, 400 이하의 60 의 배수는
60, 120, 180, 240, 300, 360 으로 총 6개이다.

25. 세 자연수의 비가 $2 : 4 : 7$ 이고, 최소공배수가 392 일 때, 세 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

▷ 정답 : 56

▷ 정답 : 98

해설

세 자연수를 $2 \times x$, $4 \times x$, $7 \times x$ 라 하면

$$\begin{array}{r} x) 2 \times x \quad 4 \times x \quad 7 \times x \\ 2) \quad 2 \quad \quad 4 \quad \quad 7 \\ \hline \quad 1 \quad \quad 2 \quad \quad 7 \end{array}$$

$$x \times 2 \times 2 \times 7 = 392$$

$$x = 14$$

따라서, 세 자연수는 28, 56, 98 이다.

26. 가로 길이가 200cm, 세로 길이가 120cm인 직사각형 모양의 욕실 바닥에 남은 부분이 없도록 가능한 한 큰 정사각형 모양의 타일을 붙이려고 한다. 이때, 타일의 한 변의 길이를 a , 필요한 타일의 개수를 b 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 55 ② 57 ③ 58 ④ 64 ⑤ 70

해설

200, 120의 최대공약수는 40이므로 타일 한 변의 길이는 $a = 40(\text{cm})$

$200 \div 40 = 5$, $120 \div 40 = 3$ 이므로 필요한 타일의 개수는 $b = 5 \times 3 = 15$ (개)

$\therefore a + b = 40 + 15 = 55$

27. $\frac{24}{n}$ 와 $\frac{40}{n}$ 을 자연수로 만드는 자연수 n 들을 모두 합하면?

① 8

② 12

③ 15

④ 20

⑤ 25

해설

n 은 24, 40 의 공약수이고, 공약수는 최대공약수의 약수이다.
24 와 40 의 최대공약수는 8 이고,
8 의 약수는 1, 2, 4, 8 이므로
따라서 합은 $1 + 2 + 4 + 8 = 15$ 이다.

28. 두 수 $\frac{35}{72}, \frac{91}{81}$ 의 어느 것에 곱하여도 항상 자연수가 되게 하는 분수가 있다. 이 중 가장 작은 분수를 주어진 두 수에 곱하여 만들어진 두 자연수의 합을 구한 것은?

① 145 ② 146 ③ 147 ④ 148 ⑤ 149

해설

$\frac{35}{72}, \frac{91}{81}$ 에 곱해야 하는 가장 작은 분수의 분모는 35와 91의 최대공약수인 7이고, 분자는 72와 81의 최소공배수인 648이다. 그러므로 $\frac{35}{72} \times \frac{648}{7} = 45$, $\frac{91}{81} \times \frac{648}{7} = 104$ 이다. 두 자연수의 합은 149이다.

29. 273^{100} 의 일의 자리의 숫자를 구하면?

- ① 1 ② 3 ③ 9 ④ 7 ⑤ 0

해설

273^{100} 의 일의 자리만 거듭제곱하여 규칙을 찾는다.

$3^1 = 3$,

$3^2 = 9$,

$3^3 = 27$,

$3^4 = 81$,

$3^5 = 243$,

...

3 을 거듭제곱할 때, 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1 의 네 개의 숫자가 반복된다.

273^{100} 의 지수인 100 를 4 로 나누면 25 이므로

273^{100} 의 일의 자리의 숫자는 반복되는 네 개의 숫자 중 마지막 숫자인 1 이다.

30. $7^x = 343$ 을 만족하는 x 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$7^3 = 343$ 이다. 따라서 $x = 3$ 이다.

31. $2^a \times 3^b \times 11^c$ 이 132 를 약수로 가질 때, 세 자연수 a, b, c 의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

132 를 소인수분해하면 $132 = 2^2 \times 3 \times 11$ 이다. 한편 $2^a \times 3^b \times 11^c$ 이 132 를 약수로 가지므로 a 는 2 보다 크거나 같고, b 는 1 보다 크거나 같다. 또한 c 도 1 보다 크거나 같다.
따라서 a, b, c 의 최솟값은 각각 2, 1, 1 이므로 구하는 합은 $2 + 1 + 1 = 4$ 이다.

32. $A = 3^5 \times \square$ 의 약수가 18 개일 때, □ 안에 들어갈 수 있는 최소의 자연수는?

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

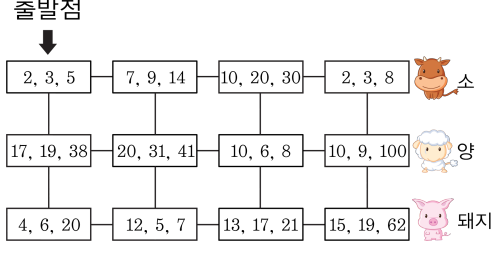
해설

$A = 3^5 \times \square$ 에서

약수의 개수가 18 개이면 □가 가장 작은 소인수 2 일 때

$\square = 2^2 = 4$

33. 모범이는 출발점에서 시작하여 만나는 네모 칸에 들어 있는 세 수가 각각 ‘서로소’ 이면 ‘오른쪽’ 으로 한 칸을 움직이고, 그렇지 않으면 ‘아래쪽’ 으로 한 칸을 움직여 지나간다고 한다. 모범이가 도착한 곳에서 만나는 동물을 말하여라. 이때, 한 번 지나간 길은 다시 지나지 않는다.



▶ 답 :

▷ 정답 : 돼지

해설

모범이가 지나가는 칸을 색칠하면 다음과 같다.

출발점
↓

2, 3, 5	7, 9, 14	10, 20, 30	2, 3, 8	소
17, 19, 38	20, 31, 41	10, 6, 8	10, 9, 100	양
4, 6, 20	12, 5, 7	13, 17, 21	15, 19, 62	돼지

따라서 모범이가 만나는 동물은 돼지이다.

34. 두 자연수 a, b 의 최대공약수는 24 이다. $a, b, 32$ 의 공약수를 모두 구하면?

① 1

② 1, 2

③ 1, 2, 4

④ 1, 2, 4, 8

⑤ 1, 2, 4, 8, 16

해설

a, b 의 공약수는 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 이다.

32 의 약수는 1, 2, 4, 8, 16, 32 이다.

따라서 두 수의 공약수는 1, 2, 4, 8 이다.

35. 학생들에게 검정 펜 50 자루, 빨강 펜 24 자루, 파랑 펜 100 자루를 똑같이 나누어줄 때, 검정 펜과 빨강 펜은 각각 6 개, 4 개가 부족하고, 파랑 펜은 2 개가 남는다. 이때, 최대 학생 수는 몇 명인지 구하여라.

▶ 답: 명

▶ 정답 : 14명

해설

김정 펜 50 자루를 나누면 6 개가 부족하다. : $(50 + 6)$ 개를 나누면 나누어 떨어진다.

빨강 펜 24 자루를 나누면 4 개가 부족하다. : $(24 + 4)$ 개를 나누면 나누어 떨어진다.

파랑 펜 100 자루를 나누면 2 개가 남는다. : $(100 - 2)$ 개를 나누면 나누어 떨어진다.

인기척 소, 죽, 귀가 크, 소는 50, 00, 00 이 칠데코야 소인 14 이디

이러한 수 중 가장 큰 수는 56, 28, 98 의 최대공약수인 14 이다.
따라서 최대 학생 수는 14 명이다.

36. 원주 위를 같은 방향으로 움직이는 세 점 A, B, C 가 3 분에 각각 45 바퀴, 30 바퀴, 60 바퀴를 돈다. 원주 위의 한 점 P 에서 세 점 A, B, C 가 동시에 출발하여 출발한 이후 1 시간 동안 점 P 를 동시에 통과하는 횟수를 구하여라.

▶ 답 : 회

▷ 정답 : 300 회

해설

A 가 3 분에 45 바퀴를 돌면 1 바퀴 도는 데는 $\frac{1}{15}$ 분, 즉 4 초가 걸리고, B 가 3 분에 30 바퀴를 돌면 1 바퀴 도는 데는 $\frac{1}{10}$ 분, 즉 6 초 걸리고, C 가 3 분에 60 바퀴를 돌면 1 바퀴 도는 데는 $\frac{1}{20}$ 분, 즉 3 초가 걸린다.
즉, 같은 지점에서 처음에 같이 출발했다가 다시 같이 출발하는 데는 4, 6, 3 의 최소공배수인 12 초가 걸린다.
따라서 점 P 를 1 시간 (3600 초) 동안 $3600 \div 12 = 300$ (회) 동시에 통과한다.

37. 300 을 가능한 한 작은 자연수 a 로 나누어 어떤 자연수 b 의 제곱이 되도록 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

어떤 자연수의 제곱이 되려면 소인수분해했을 때 모든 소인수의 지수가 짝수이어야 한다.

$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$ 이므로 a 는 3, 3×2^2 , 3×5^2 , $3 \times 2^2 \times 5^2$ 이 될 수 있고 가장 작은 a 는 3 이다.

나눈 후에는 $300 \div 3 = 100 = 10^2$ 이 된다.

$$\therefore a = 3, b = 10$$

$$\therefore a + b = 13$$

38. 75로 나누면 나누어 떨어지고, 1과 자기 자신을 포함한 양의 약수의 개수가 75개인 최소의 자연수 n 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 32400

해설

$N = a^m b^n c^l \dots$ 에서 양의 약수의 개수는 $(m+1)(n+1)(l+1) \dots$ 이고, 약수의 개수가 $75 = 3 \times 5 \times 5$ (개)이므로 m, n, l 의 값은 차례로 2, 4, 4이다. 최소의 자연수를 구해야 하므로, a, b, c 의 값을 작은 소수부터 차례로 대입하고, 지수는 큰 수부터 차례로 대입하면 $N = 2^4 \times 3^4 \times 5^2$ 이고, 이 수는 75의 배수이므로 32400이 답이 된다.

39. $\frac{x-9}{2} = \frac{y}{3}$ 를 만족하는 두 자연수 x, y 의 최소공배수가 45 일 때, x, y 의 최대공약수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\frac{x-9}{2} = \frac{y}{3} \rightarrow 3 \times (x-9) = 2 \times y,$$

x, y 의 최소공배수가 $45 = 3^2 \times 5$,

위 두 조건을 만족시키는 x, y 의 값은 $x = 15, y = 9$ 이다.

$\therefore (x, y \text{의 최대공약수}) = 3$

40. 100 이하의 자연수를 100으로 나누었을 때 기약분수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 40 개

해설

$100 = 2^2 \times 5^2$ 이므로 1에서 100까지의 자연수 중 2, 5의 배수를 제외한 수를 구하면된다. 2의 배수는 50개, 5의 배수는 20개, 10의 배수는 10개이므로
 $100 - (50 + 20 - 10) = 40$ (개)이다.