1. 분수함수 $y = \dfrac{x+b}{ax+1}$ 의 그래프의 점근선 중 하나가 $x = -1$ 이고 점 $(1,\ 2)$ 를 지난다고 한다. 이 분수함수의 정의역이 $\{x \mid -3 \le x < -1$ 또는 $-1 < x \le 1\}$ 일 때, 치역을 구하면? (단, a, b 는 상수)

① $\{y \mid y < 0$ 또는 $y > 2\}$　　② $\{y \mid y \le 0$ 또는 $y \ge 2\}$

③ $\{y \mid 0 \le y \le 2\}$　　④ $\{y \mid y < 1$ 또는 $1 < y \le 2\}$

⑤ $\{y \mid y < 1$ 또는 $y \ge 2\}$

해설

분수함수 $y = \dfrac{x+b}{ax+1}$ 의 그래프의

점근선 중 하나가 $x = -1$ 이므로

$x = -\dfrac{1}{a} = -1$

$\therefore\ a = 1$

따라서, 주어진 분수함수는 $y = \dfrac{x+b}{x+1}$

이고

이 함수의 그래프가 점 $(1,\ 2)$ 를 지나

므로

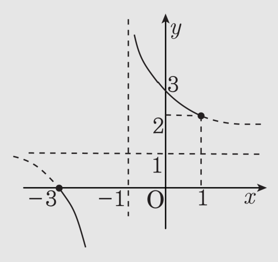
$2 = \dfrac{1+b}{1+1}$　$\therefore b = 3$

$\therefore\ y = \dfrac{x+3}{x+1}$

따라서 $-3 \le x < -1$ 또는 $-1 < x \le 1$ 에서

$y = \dfrac{x+3}{x+1} = \dfrac{2}{x+1} + 1$ 의 그래프는

다음 그림과 같으므로 구하는 치역은



$\{y \mid y \le 0$ 또는 $y \ge 2\}$

2. 다음 그래프 중 평행이동에 의하여 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은?

① $y = \frac{x+1}{x-1}$ ② $y = \frac{x}{x-1}$ ③ $y = \frac{x-2}{x-1}$
④ $y = \frac{-x}{x-1}$ ⑤ $y = \frac{x+3}{x+1}$

해설

$y = \frac{1}{x}$ 과 겹쳐지는 함수는 $y = \frac{1}{x-a} + b$ 의 꼴로 된 것이다.

$\therefore$ ② $y = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$

3. 평행이동 $f:(x,\ y) \to (x+m,\ y+n)$ 에 의하여 분수함수 $y=\frac{x+1}{x}$ 의 그래프가 분수함수 $y=\frac{-x+3}{x-2}$ 의 그래프로 옮겨질 때, $m-n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

분수함수 $y=\frac{x+1}{x}=\frac{1}{x}+1$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 m 만큼,y 축의 방향으로
n 만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=\frac{1}{x-m}+1+n$이 식이
$y=\frac{-x+3}{x-2}=\frac{-(x-2)+1}{x-2}=\frac{1}{x-2}-1$ 과 같으므로
$m=2,\ 1+n=-1$ 에서 $n=-2$
$\therefore\ m-n=4$

4. 점 $(0, 1)$을 지나고 점근선이 $x = -2$, $y = 2$인 함수 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$의 그래프는 다음 중 어느 것을 평행이동한 것인가?

① $y = -\frac{1}{x}$ ② $y = -\frac{2}{x}$ ③ $y = -\frac{3}{x}$
④ $y = \frac{1}{x}$ ⑤ $y = \frac{2}{x}$

해설

$y = \frac{ax+b}{cx+d}$의 점근선이 $x = -2$, $y = 2$이므로

$y = \frac{k}{(x+2)} + 2$로 놓을 수 있고

이것이 점$(0, 1)$를 지나므로

$1 = \frac{k}{2} + 2$

$\therefore\ k = -2$

따라서 $y = \frac{-2}{x+2} + 2$이므로

이 그래프는 $y = -\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로

-2만큼 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한

그래프이다.

5. $y = \dfrac{2}{x-1} - 2$의 그래프에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

① $y = \dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축으로 -1, y축으로 -2만큼 평행이동한 그래프이다.

② 치역은 $\mathrm{R} - \{-2\}$ 이다.

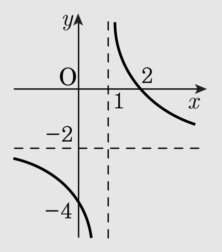
③ 제 2사분면을 지나지 않는다.

④ 점근선은 $x = 1$, $y = -2$ 이다.

⑤ 정의역은 $\mathrm{R} - \{1\}$ 이다.

해설

$y = \dfrac{2}{x-1} - 2$의 그래프는 $y = \dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 -2만큼 평행이동시킨 그래프로 다음 그림과 같다.

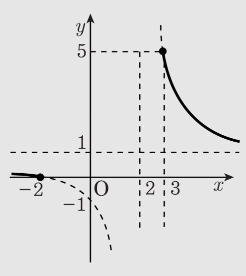


따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

6. $x^2 - x - 6 \geq 0$ 일 때, 함수 $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다.
이때, $M + m$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설



$x^2 - x - 6 \geq 0$ 에서
$(x+2)(x-3) \geq 0$
$\therefore\ x \leq -2$ 또는 $x \geq 3$
$y = \dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{(x-2)+4}{x-2}$
$= \dfrac{4}{x-2} + 1$
즉, $x \leq -2$ 또는 $x \geq 3$ 에서
$y = \dfrac{x+2}{x-2}$ 의 그래프는 다음 그림과
같으므로 $x = -2$ 일 때, 최솟값 0,
$x = 3$ 일 때, 최댓값 5
따라서, 최댓값과 최솟값의 합은 5 이다.

7. 다음과 같은 두 집합 A, B에 대하여 $A \cap B = \varnothing$일때, 상수 a의 값의 범위를 구하면?

$$A = \left\{(x,\ y) \mid y = \frac{|x-1|}{x}\right\}$$
$$B = \left\{(x, y) \mid y = ax\right\}$$

① $a < 0$　　② $a > 0$　　③ $0 < a < 1$

④ $0 \le a \le 1$　　⑤ $a < 0, a > 1$

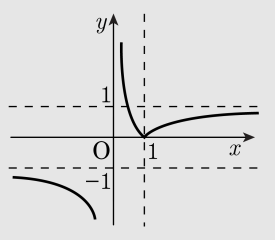
해설

$y = \dfrac{|x-1|}{x}$에서

$x \ge 1$일 때,

$y = \dfrac{x-1}{x} = -\dfrac{1}{x} + 1$

$x < 1$일 때, $y = \dfrac{1-x}{x} = \dfrac{1}{x} - 1$



$A \cap B = \varnothing$이려면 위의 곡선과 원점을 지나는 직선 $y = ax$가 만나지 않아야 하므로 ,
윗쪽 그림에서 직선은 제 2, 4사분면에만 존재해야 한다.
따라서 구하는 a의 값의 범위는 $a < 0$

8. 분수함수 $f(x)=\dfrac{x+3}{2x-1}$ 에 대하여 합성함수 $y=(f\circ f\circ f)(x)$ 의 그래프는 점 $(a,\ b)$ 에 대하여 대칭이다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

분수함수 $f(x)=\dfrac{x+3}{2x-1}$ 에서

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{\dfrac{x+3}{2x-1}+3}{2\cdot\dfrac{x+3}{2x-1}-1}$$

$$=\frac{x+3+3(2x-1)}{2(x+3)-(2x-1)}=x$$ 이므로

$y=(f\circ f\circ f)(x)=f((f\circ f)(x))=f(x)$

따라서, $y=f(x)$ 의 점근선은

$x=\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{1}{2}$ 이고, 그 그래프는 점근선의

교점 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ 에 대하여 대칭이므로

$a=\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ a+b=1$

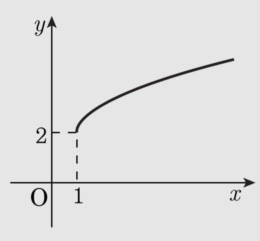
9. 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}+c(a>0)$ 의 정의역이 $\{\ x \mid x \geq 1\ \}$이고, 치역이 $\{\ y \mid y \geq 2\ \}$일 때, $\dfrac{2a^2+c^2-2b}{2a}$ 의 최솟값을 구하면?

① $-\sqrt{2}$　　② 1　　③ $2\sqrt{2}$

④ $2\sqrt{2}+1$　　⑤ $2\sqrt{2}+2$

해설

정의역과 치역의 조건에 의하여 주어진 무리함수의 그래프는 다음과 같다. 즉 $y = \sqrt{a(x-1)}+2$의 형태임을 알 수 있다.



$y = \sqrt{ax+b}+c$와 비교해보면 $b=-a, c=2$이다.

$\therefore \dfrac{2a^2+c^2-2b}{2a} = \dfrac{2a^2+4+2a}{2a} = a+\dfrac{2}{a}+1$

$a>0$이므로 $a+\dfrac{2}{a} \geq 2\sqrt{2}$

따라서 $a+\dfrac{2}{a}+1 \geq 2\sqrt{2}+1$이므로

최솟값은 $2\sqrt{2}+1$ 이다.

10. 무리함수 $y = \sqrt{a-x} - 1$ 의 그래프가 원점을 지나고 정의역이 $\{x \mid x \le \alpha\}$, 치역이 $\{y \mid y \ge \beta\}$ 일 때, $a + \alpha + \beta$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

주어진 무리함수의 그래프가
점 $(0,\ 0)$ 을 지나므로
$0 = \sqrt{a-1}$
$\therefore a = 1$
즉, 주어진 무리함수는 $y = \sqrt{1-x} - 1$ 이고
$1 - x \ge 0$ 에서 $x \le 1$ 이므로
정의역은 $\{x \mid x \le 1\}$
$\therefore \alpha = 1$
또, $y = \sqrt{1-x} - 1$ 에서
$y + 1 = \sqrt{1-x} - 1$ 이므로 $y + 1 \ge 0$
치역은 $\{y \mid y \ge -1\}$
$\therefore \beta = -1$
$\therefore a + \alpha + \beta = 1$

11. 함수 $y = \sqrt{-2x+a}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 함수 $y = \sqrt{-2x+4}-3$의 그래프와 겹쳐졌다. 이 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = -3$

해설

함수 $y = \sqrt{-2x+a}$의 그래프를
x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 b만큼
평행이동한 함수의 그래프의 식은
$y = \sqrt{-2(x-1)+a}+b = \sqrt{-2x+2+a}+b$
이 식이 $y = \sqrt{-2x+4}-3$과 같으므로
$2+a=4,\ b=-3$
$\therefore\ a=2,\ b=-3$

12. 다음 중 함수 $y = a\sqrt{bx}$ 의 그래프가 그려지는 사분면을 옳게 나타낸 것을 고르면? (단, $ab \neq 0$)

① $ab >\ 0$ 이면 제 3사분면

② $ab <\ 0$ 이면 제 4사분면

③ $a < 0, b > 0$ 이면 제 4사분면

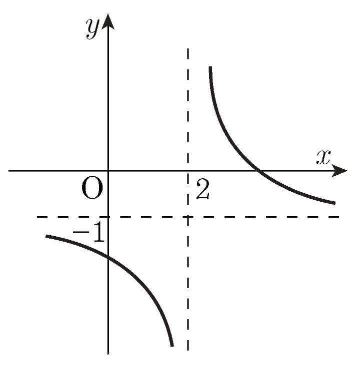
④ $a > 0, b < 0$ 이면 제 1사분면

⑤ $a < 0, b < 0$ 이면 제 2사분면

해설

㉠ $ab > 0 \Leftrightarrow (a > b$ 이고 $b > 0)$ 또는 $(a < 0$ 이고 $b < 0)$ 이므로 제 1사분면 또는 제 3사분면에 그래프가 그려진다.
㉡ $ab < 0 \Leftrightarrow (a > 0$ 이고 $b < 0)$ 또는 $(a < 0$ 이고 $b > 0\ )$이므로 제 2사분면 또는 제 4사분면에 그래프가 그려진다.
㉢ $a < 0, b > 0$ 이면
제 4사분면에 그래프가 그려진다.
㉣ $a > 0, b < 0$ 이면
제 2사분면에 그래프가 그려진다.
㉤ $a < 0, b < 0$ 이면
제 3사분면에 그래프가 그려진다.

13. 분수함수 $y = \dfrac{b}{x+a} + c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 무리함수 $y = \sqrt{cx+a} + b$의 그래프가 지나는 사분면을 모두 구하면?



① 제1사분면　　② 제2사분면　　③ 제3사분면
④ 제4사분면　　⑤ 제1, 2사분면

해설

$y = \dfrac{b}{x+a} + c$의 점근선은 $x = -a,\ y = c$

그림에서 $-a > 0,\ c < 0$이고, $b > 0$

$\therefore\ a < 0,\ b > 0,\ c < 0 \cdots$ ㉠

한편 $y = \sqrt{cx+a} + b = \sqrt{c\left(x + \dfrac{a}{c}\right)} + b$이므로

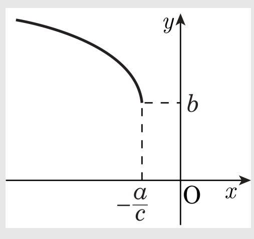
$c\left(x + \dfrac{a}{c}\right) \geq 0$

이때 $c < 0$이므로 $x \leq -\dfrac{a}{c}$

㉠에서 $-\dfrac{a}{c} < 0$이므로 $x < 0$

또 $y = \sqrt{cx+a} + b \geq b$

따라서 그래프는 다음 그림과 같이



제2사분면만을 지난다.

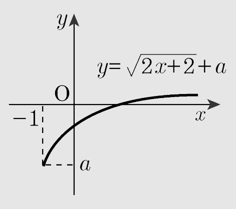
14. 함수 $y = \sqrt{2x+2}+a$ 의 그래프가 제 1 , 3 , 4 사분면을 지나도록 하는 정수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = \sqrt{2x+2}+a = \sqrt{2(x+1)}+a$
주어진 함수는 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.
따라서 이 함수의 그래프가 제 1 , 3 , 4 사분면을 지나려면 $x = 0$ 일 때, $y < 0$ 이어야 한다.



$\sqrt{2}+a<0$ 이므로 $a<-\sqrt{2}$
따라서 정수 a 의 최댓값은 -2 이다.

15. 다음 함수 중 그 그래프가 제 1, 3, 4 사분면을 지나는 것은?

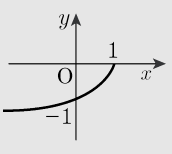
① $y=-\sqrt{1-x}$　　② $y=\sqrt{2x+4}-3$

③ $y=-\sqrt{2x+3}+3$　　④ $y=\sqrt{1-4x}+5$

⑤ $y=-\sqrt{6-2x}-1$

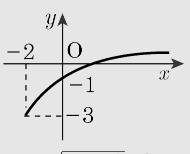
해설

① 제 3, 4 사분면을 지난다.



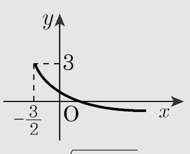
$y=-\sqrt{1-x}$

② 제 1, 3, 4 사분면을 지난다.



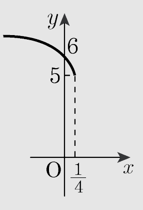
$y=\sqrt{2x+4}-3$

③ 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.



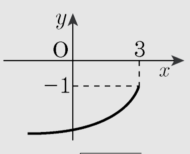
$y=-\sqrt{2x+3}+3$

④ 제 1, 2 사분면을 지난다.



$y=\sqrt{1-4x}+5$

⑤ 제 3, 4 사분면을 지난다.



$y=-\sqrt{6-2x}-1$

따라서 그래프가 제 1, 3, 4 사분면을 지나는 것은 ②이다.

16. 함수 $y=1-\sqrt{2-x}$의 그래프에 대한 설명 중 옳은 것은?

① 정의역은 $\{x \mid x \geq 2\}$이다.

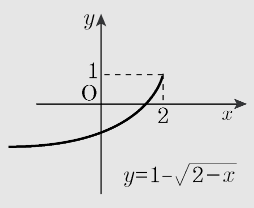
② 치역은 $\{y \mid y \geq 1\}$이다.

③ 그래프는 점 $(-2,\ -1)$ 을 지난다.

④ 그래프는 $y=-\sqrt{x}$ 의 그래프를 평행이동한 것이다.

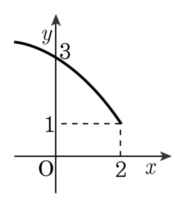
⑤ 그래프는 제 1, 2, 3사분면을 지난다.

해설



① 정의역은 $\{x \mid x \leq 2\}$이다.
② 치역은 $\{y \mid y \leq 1\}$이다.
④ 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$ 의 그래프를 평행이동한 것이다.
⑤ 그래프는 제 1, 3, 4사분면을 지난다.

17. 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때 $a+b+c$의 값은?



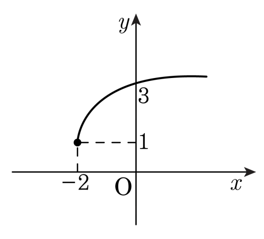
① -1　　② 0　　③ 1

④ 2　　⑤ 3

해설

주어진 그림은 $y = \sqrt{ax}$의 그래프를
x축 방향으로 2, y축 방향으로 1만큼 평행이동한
것이므로 $y-1 = \sqrt{a(x-2)}$
즉 $y = \sqrt{a(x-2)}+1$
그런데 이 그래프가 점 $(0,3)$을 지나므로
$3 = \sqrt{-2a}+1$
$\sqrt{-2a} = 2,\ -2a = 4$
$\therefore a = -2$
$\therefore y = \sqrt{-2x+4}+1$
$\therefore a+b+c = (-2)+4+1 = 3$

18. 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

주어진 그래프는 $y=\sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축으로 -2 만큼, y 축으로 1만큼 평행이동한 것과 같으므로 $y=\sqrt{a(x+2)}+1$

또, 점 $(0,\ 3)$ 을 지나므로

$3=\sqrt{2a}+1,\ \ \sqrt{2a}=2$

$\therefore\ a=2$

따라서 $y=\sqrt{2(x+2)}+1=\sqrt{2x+4}+1$ 이고,

이것이 $y=\sqrt{ax+b}+c$ 와 일치하므로

$a=2,\ b=4,\ c=1$

$\therefore\ a+b+c=7$

19. $a \le x \le 1$ 일 때, $y = \sqrt{3-2x}+1$ 의 최솟값이 m, 최댓값이 6 이다. 이때, $m-a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

함수 $y = \sqrt{3-2x}+1 = \sqrt{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)}+1$ 는

$y = \sqrt{-2x}$ 를 x 축의 양의 방향으로 $\frac{3}{2}$ 만큼,

y축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로
이 함수는 감소함수이다.
따라서, $x = a$에서 최댓값을 가지므로
$6 = \sqrt{3-2a}+1 \Leftrightarrow \sqrt{3-2a} = 5$
$\therefore a = -11$
또한, $x = 1$에서 최솟값을 가지므로
$m = \sqrt{3-2\times1}+1 = 2$
$\therefore m-a = 13$

20. $-4 \le x \le 1$ 에서 함수 $y = 1 - \sqrt{a - 3x}$ 의 최댓값이 0 일 때, 최솟값은? (단, a 는 상수이다.)

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 0　　⑤ 1

해설

$y = 1 - \sqrt{a - 3x} = 1 - \sqrt{-3\left(x - \frac{a}{3}\right)}$

주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{a}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가한다.

$x = 1$ 일 때 최댓값을 가지므로

$0 = 1 - \sqrt{a - 3}$ $\quad \therefore\ a = 4$

$x = -4$ 일 때 최솟값을 가지므로

$y = 1 - \sqrt{4 - 3 \cdot (-4)} = -3$

따라서 최솟값은 -3 이다.

21. $-\frac{1}{3} \le x \le \frac{8}{3}$ 에서 함수 $y = \sqrt{3x+a}+2$ 의 최댓값이 b , 최솟값이 2 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = \sqrt{3x+a}+2 = \sqrt{3\left(x+\frac{a}{3}\right)}+2$

주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{a}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가한다.

i) $x = -\frac{1}{3}$ 일 때 최솟값을 가지므로

$$2 = \sqrt{3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)+a}+2 \quad \therefore\ a = 1$$

ii) $x = \frac{8}{3}$ 일 때 최댓값을 가지므로

$$b = \sqrt{3 \cdot \frac{8}{3}+1}+2 = 5$$

i), ii) 에서 $a+b = 1+5 = 6$

22. $8 \le x \le a$ 에서 함수 $y = -\sqrt{x+1} + 3$ 의 최댓값이 b , 최솟값이 -1 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$y = -\sqrt{x+1} + 3$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.
$x = a$ 일 때 최솟값을 가지므로
$-1 = -\sqrt{a+1} + 3 \quad \therefore\ a = 15$
$x = 8$ 일 때 최댓값을 가지므로
$b = -\sqrt{8+1} + 3 = 0$
$\therefore\ a + b = 15 + 0 = 15$

23. x에 대한 방정식 $\sqrt{2x} = m(x+1)$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 상수 m의 값의 범위는 $\alpha < m < \beta$ 이다. 이때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ 2

해설

방정식 $\sqrt{2x} = m(x+1)$ 의 해는
두 그래프 $y = \sqrt{2x}$와 $y = m(x+1)$ 의 교점의 x 좌표이다.
이때, 직선 $y = m(x+1)$ 은 m 의 값에 관계없이
점 $(-1,\ 0)$ 을 지난다.
$y = \sqrt{2x}$ 의 그래프와 직선 $y = m(x+1)$ 이
서로 다른 두 점에서 만나려면 $m > 0$ 이고,
m 은 두 그래프가 접할 때의 기울기보다 작아야 한다.
$\sqrt{2x} = m(x+1)$ 의 양변을 제곱하면
$2x = m^2(x+1)^2$
$m^2x^2 + 2(m^2-1)x + m^2 = 0$
이 방정식의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4} = (m^2-1)^2 - m^4 = 0$
$-2m^2 + 1 = 0,\ m^2 = \frac{1}{2}$
$\therefore m = \frac{1}{\sqrt{2}} (\because m > 0)$
따라서, m의 값의 범위는 $0 < m < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로
$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{2}$

24. 무리함수 $y = \sqrt{kx}$ 의 그래프가 두 점 $(2,\ 2)$, $(3,\ 6)$ 을 잇는 선분과 만나도록 하는 정수 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 11 개

해설

함수 $y = \sqrt{kx}$ 의 그래프가 점 $(2,\ 2)$ 를 지날 때
$2 = \sqrt{2k}$, $\quad 2k = 4$
$\therefore k = 2$
또, 함수 $y = \sqrt{kx}$ 의 그래프가 점 $(3,\ 6)$ 을 지날 때
$6 = \sqrt{3k}$, $\quad 3k = 36$
$\therefore k = 12$
따라서 구하는 실수 k 의 값의 범위는
$2 \le k \le 12$ 이므로
정수 k 는 $2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 12$ 의 11 개다.

25. $x > 2$에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $f(x) = \sqrt{x-2}+2$, $g(x) = \dfrac{1}{x-2}+2$일 때 $(f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$(f \cdot g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$
$(g \cdot f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$
$\therefore (f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3) = 6$

26. 무리함수 $y = \sqrt{x-a}+1$에 대하여 $f^{-1}(2)=3$일 때, 상수 a의 값을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$f(3)=2$

$\therefore 2=\sqrt{3-a}+1$

$\therefore a=2$

27. 정의역이 $\{x \mid x > 1\}$인 두 함수 $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{3(x-1)}$에 대하여 $(f \circ g)^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)$의 값은?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$(f \circ g)^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right) = a$라 하면

$(f \circ g)(a) = \dfrac{1}{4}$이고

$$\begin{aligned} f(g(a)) &= f(\sqrt{3(a-1)}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3(a-1)}+1} \end{aligned}$$
이므로

$$\frac{1}{\sqrt{3(a-1)}+1} = \frac{1}{4}$$

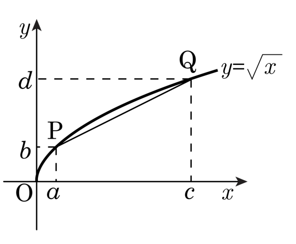
$\sqrt{3(a-1)} + 1 = 4$,

$\sqrt{3(a-1)} = 3$

$3(a-1) = 9$, $a - 1 = 3$, $a = 4$

$\therefore (f \circ g)^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right) = 4$

28. 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ b), \mathrm{Q}(c,\ d)$ 에 대하여 $\dfrac{b+d}{2} = 1$ 일 때, 직선 PQ 의 기울기를 구하면? (단, $0 < a < c$)



① $\dfrac{1}{5}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{3}$
④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

두 점 $\mathrm{P}(a,\ b),\ \mathrm{Q}(c,\ d)$ 는
함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프 위의 점이므로
$b = \sqrt{a},\ d = \sqrt{c}$
$\therefore\ a = b^2,\ c = d^2$
따라서 직선 PQ 의 기울기는
$\dfrac{d-b}{c-a} = \dfrac{d-b}{d^2-b^2} = \dfrac{d-b}{(d-b)(d+b)} = \dfrac{1}{d+b}$ 이고
$\dfrac{b+d}{2} = 1$ 에서 $b+d = 2$ 이므로
($\therefore$ 직선 PQ 의 기울기)$= \dfrac{1}{2}$

29. 함수 $y=\dfrac{2x+5}{x+1}$의 그래프가 직선 $y=ax+b$에 대하여 대칭일 때, $a-b$의 값은? (단, $a<0$)

① -4　　② -3　　③ -2　　④ -1　　⑤ 0

해설

$y=\dfrac{2x+5}{x+1}=\dfrac{2(x+1)+3}{x+1}=\dfrac{3}{x+1}+2$

이므로

주어진 함수의 그래프는 점$(-1,\ 2)$를 지나고

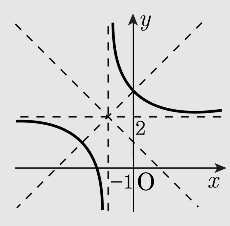
기울기가 ±1인 직선에 대하여 대칭이다.

이 때, 구하는 직선의 기울기가 음수이므로

직선의 방정식은 $y-2=-(x+1)$

$\therefore\ y=-x+1$

따라서 $a=-1,\ b=1$이므로 $a-b=-2$

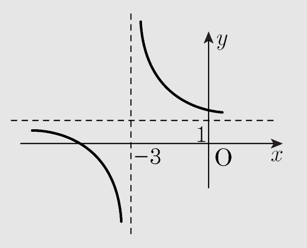


30. 다음 중 함수 $y = \dfrac{x+6}{x+3}$의 그래프는 제a사분면을 지나지 않고, 점 $(0,\ b)$를 지난다고 할 때, $a-b$의 값은?

① -6　　② -4　　③ 0　　④ 2　　⑤ 4

해설

$y = \dfrac{x+3+3}{x+3} = 1 + \dfrac{3}{x+3}$

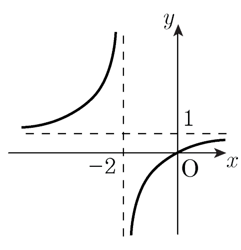


따라서 제4사분면을 지나지 않는다. $\therefore\ a = 4$

$x = 0$일 때 $y = \dfrac{6}{3} = 2,\ \therefore\ b = 2$

$\therefore\ a - b = 4 - 2 = 2$

31. 함수 $y = \dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 다음과 같을 때, $a+b+c$의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = 1 + \dfrac{k}{x+2}$, $(k \neq 0)$가 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0 = 1 + \dfrac{k}{0+2}$, $\quad k = -2$

따라서 $y = 1 + \dfrac{-2}{x+2} = \dfrac{x}{x+2}$

$\therefore \quad a = 1,\ b = 0,\ c = 2$

$\therefore \quad a + b + c = 3$

32. $0 \le x \le 2$일 때, 함수 $y = \dfrac{2x-4}{x-4}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. Mm의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$y = \dfrac{2x-4}{x-4} = \dfrac{4}{x-4} + 2$

$x = 0$일 때 최대이므로, $M = \dfrac{4}{0-4} + 2 = 1$

$x = 2$일 때 최소이므로, $m = \dfrac{4}{2-4} + 2 = 0$

$\therefore \ Mm = 1 \times 0 = 0$

33. 함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 역함수가 $f^{-1}(x)=\dfrac{2x-4}{-x+3}$ 일 때, 함수 $y=|x+a|+b+c$ 의 최솟값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

f^{-1} 의 역함수가 f 이므로 $f(x)=(f^{-1})^{-1}(x)$

$y=f^{-1}(x)=\dfrac{2x-4}{-x+3}$ 를

x에 대하여 풀면, $x=\dfrac{3y+4}{y+2}$

x와 y를 바꾸면, $y=f(x)=\dfrac{3x+4}{x+2}$

$f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 이므로 $a=3,\ b=4,\ c=2$

함수 $y=|x+3|+6$은 $x=-3$일 때, 최솟값 6을 갖는다.