

1.  $\frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$  가  $x \neq 1$  인 모든 실수  $x$ 에 대해 항상 성립 하도록  $a, b, c$ 를 구할 때,  $a+b+c$ 의 값은?

① 2

② -2

③ 1

④ -1

⑤ 0

### 해설

우변의 분모를 통분하면

$$\frac{a(x^2+x+1) + (bx+c)(x-1)}{x^3-1}$$

$$= \frac{(a+b)x^2 + (a-b+c)x + (a-c)}{x^3-1}$$

$$\therefore \frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{(a+b)x^2 + (a-b+c)x + (a-c)}{x^3-1}$$

분자의 계수를 비교하면

$$a+b=0, a-b+c=2, a-c=1$$

세 식을 연립하여 풀면  $a=1, b=-1, c=0$

$$\therefore a+b+c=0$$

2. 임의의  $x$  에 대하여  $x^3 - 1 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$  를 만족하는 상수  $a, b, c, d$  의 합  $a+b+c+d$  의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

양변에  $x=0$  을 대입 하면

$$-1 = a + b + c + d$$

$$\therefore a + b + c + d = -1$$

해설

$$x^3 - 1 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$$

$$= (x+1)\{a(x+1)^2 + b(x+1) + c\} + d$$

$$= (x+1)[(x+1)\{a(x+1) + b\} + c] + d \text{ 이므로}$$

$x^3 - 1$  을  $x+1$  로 연속으로 나눌 때

차례대로 나오는 나머지가  $d, c, b$  가 되고 마지막 몫이  $a$  이다.

|    |   |    |   |    |     |
|----|---|----|---|----|-----|
| -1 | 1 | 0  | 0 | -1 |     |
|    |   | -1 | 1 | -1 |     |
| -1 | 1 | -1 | 1 | -2 | ← d |
|    |   | -1 | 2 |    |     |
| -1 | 1 | -2 | 3 |    | ← c |
|    |   | -1 |   |    |     |
|    | 1 | -3 |   |    | ← b |
|    | ↑ |    |   |    |     |
|    | a |    |   |    |     |

3. 다음 등식이  $k$ 의 값에 관계없이 항상 성립할 때,  $xy$ 의 값을 구하여라.

$$(2k + 3)x + (3k - 1)y + 5k - 9 = 0$$

▶ 답:

▷ 정답:  $-6$

해설

$k$ 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$(2x + 3y + 5)k + (3x - y - 9) = 0$$

이것은  $k$ 에 대한 항등식이므로

$$2x + 3y + 5 = 0$$

$$3x - y - 9 = 0$$

연립방정식을 풀면  $x = 2, y = -3$

$$\therefore xy = 2 \times (-3) = -6$$

4. 다항식  $x^3 + ax - 8$ 을  $x^2 + 4x + b$ 로 나눌 때, 나머지가  $3x + 4$ 가 되도록 상수  $a + b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 :  $-7$

해설

$x^3 + ax - 8$ 을  $x^2 + 4x + b$ 로 직접나눈 나머지는

$$(a - b + 16)x + 4b - 8$$

$$(a - b + 16)x + 4b - 8 = 3x + 4 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

⑦이  $x$ 에 대한 항등식이므로,

$$a - b + 16 = 3, 4b - 8 = 4$$

$$\therefore a = -10, b = 3$$

$$\therefore a + b = -7$$

해설

$x^3 + ax - 8 = (x^2 + 4x + b)(x + p) + 3x + 4$ 의 양변의 계수를 비교하여  $a = -10, b = 3, p = -4$ 를 구해도 된다.

5.  $x$ 에 대한 다항식  $(4x^2 - 3x + 1)^5$ 을 전개하였을 때, 모든 계수들(상수항 포함)의 합은?

① 0

② 16

③ 32

④ 64

⑤ 1024

### 해설

$(4x^2 - 3x + 1)^5$ 을 전개하여  $x$ 에 대한 내림차순으로 정리하면  
 $(4x^2 - 3x + 1)^5 = a_0x^{10} + a_1x^9 + a_2x^8 + \cdots + a_9x + a_{10}$ 과 같이 된다.

여기서 모든 계수들의 합

$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$ 을 구하려면

$x = 1$ 을 대입하면 된다.

즉,  $(4 - 3 + 1)^5 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$

모든 계수들의 합은  $2^5 = 32$

6. 다항식  $f(x)$ 를  $(x+3)(x-6)$ 으로 나누었을 때의 나머지가  $x-2$ 이었다.  
 $f(x)$ 를  $(x+3)$ 으로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① -5

② -4

③ -3

④ -2

⑤ -1

해설

$$f(x) = (x+3)(x-6)Q(x) + x-2 \text{ 이므로}$$

$$f(-3) = -5$$

7. 등식  $3x^2 + 2x + 1 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$  이  $x$  에 관한 항등식일 때, 상수  $b$  의 값은?

① 3

② -4

③ 2

④ 8

⑤ 6

해설

$$3x^2 + 2x + 1 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$$

$$= (x-1) \{a(x-1) + b\} + c$$

|   |   |   |   |     |
|---|---|---|---|-----|
| 1 | 3 | 2 | 1 |     |
|   |   | 3 | 5 |     |
| 1 | 3 | 5 | 6 | ← c |
|   |   | 3 |   |     |
|   | 3 | 8 |   | ← c |
|   | ↑ |   |   |     |
|   | a |   |   |     |

해설

$x = 1$  을 대입하면  $c = 6$

$$3x^2 + 2x + 1 = a(x-1)^2 + b(x-1) + 6$$

$$\rightarrow 3x^2 + 2x - 5 = a(x-1)^2 + b(x-1)$$

$$\rightarrow (x-1)(3x+5) = a(x-1)^2 + b(x-1)$$

$\rightarrow$  양변을  $x-1$  로 나누면

$$3x+5 = a(x-1) + b = ax - a + b$$

$$\therefore a = 3, b = 8$$

※ 준식의 우변을 모두 전개해서 계수비교하여 구할 수도 있다.

8. 임의의 실수  $x$ 에 대하여 등식  $(x-2)(x+2)^2 = (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$ 이 성립할 때,  $a(b+c)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -30

해설

$$(x-2)(x+2)^2 = (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$$

양변에  $x = 2, -2, 1$ 을 각각 대입하면

$$0 = 1 + a + b + c, \quad 0 = -27 + 9a - 3b + c, \quad -9 = c$$

세 식을 연립하여 풀면  $a = 5, b = 3, c = -9$

$$\therefore a(b+c) = 5 \times (3-9) = -30$$

해설

좌변을 전개한 후 조립제법으로 풀어도 좋다.

$$(x-2)(x+2)^2$$

$$= x^3 + 2x^2 - 4x - 8$$

$$= (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$$

$$= (x-1)[(x-1)\{(x-1) + a\} + b] + c$$

|   |   |   |    |    |     |
|---|---|---|----|----|-----|
| 1 | 1 | 2 | -4 | -8 |     |
|   |   | 1 | 3  | -1 |     |
| 1 | 1 | 3 | -1 | -9 | ← c |
|   |   | 1 | 4  |    |     |
| 1 | 1 | 4 | 3  |    | ← b |
|   |   | 1 |    |    |     |
|   | 1 | 5 |    |    | ← a |

$$\therefore a(b+c) = 5(3-9) = -30$$

9.  $x-y=1$ 을 만족하는 임의의 실수  $x, y$ 에 대하여  $ax^2+bxy+cy^2-1=0$ 이 항상 성립할 때,  $a+b+c$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$y = x - 1$ 을 준식에 대입하여  $x$ 에 대한 내림차순으로 정리하면  
 $(a+b+c)x^2 - (b+2c)x + c - 1 = 0$

$x$ 에 대한 항등식이므로

$$a+b+c=0, b+2c=0, c-1=0$$

$$\therefore a=1, b=-2, c=1$$

$$\therefore a+b+c=0$$

10. 다항식  $f(x)$ 를  $x-2$ ,  $x-3$ 으로 나눌 때의 나머지가 각각 3, 7이라고 할 때,  $f(x)$ 를  $(x-2)(x-3)$ 으로 나눌 때의 나머지는?

①  $2x + 3$

②  $3x - 4$

③  $4x - 5$

④  $5x + 6$

⑤  $6x - 7$

해설

$$f(x) = (x-2)Q_1(x) + 3, f(2) = 3$$

$$f(x) = (x-3)Q_2(x) + 7, f(3) = 7$$

$$f(x) = (x-2)(x-3)Q_3(x) + ax + b$$

$$f(2) = 2a + b = 3, f(3) = 3a + b = 7 \text{ 이다.}$$

$$\text{연립하면 } a = 4, b = -5$$

$$\therefore \text{나머지는 } 4x - 5$$

11.  $f(x)$ 를  $x-1$ 로 나눌 때 나머지가 3이다. 또, 이때의 몫을  $x+3$ 으로 나눈 나머지가 2이면  $f(x)$ 를  $x^2+2x-3$ 으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답:  $2x+1$

해설

$$\begin{aligned}f(x) &= (x-1)Q(x) + 3 \\&= (x-1)\{(x+3)Q'(x) + 2\} + 3 \\&= (x-1)(x+3)Q'(x) + 2(x-1) + 3 \\&= (x^2+2x-3)Q'(x) + 2x+1\end{aligned}$$

따라서, 구하는 나머지는  $2x+1$

12. 다항식  $f(x) = x^2 + ax + b$ 에 대하여  $f(x) - 2$ 는  $x - 1$ 로 나누어 떨어지고  $f(x) + 2$ 는  $x + 1$ 로 나누어 떨어진다. 이 때,  $a - 2b$ 의 값은 ?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$f(x) - 2$ 는  $x - 1$ 로 떨어지므로

$$f(1) - 2 = 0 \quad \therefore 1 + a + b - 2 = 0$$

$$\therefore a + b = 1 \cdots \textcircled{1}$$

$f(x) + 2$ 는  $x + 1$ 로 나누어 떨어지므로

$$f(-1) + 2 = 0 \quad \therefore 1 - a + b + 2 = 0$$

$$\therefore -a + b = -3 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a = 2, b = -1 \quad \therefore a - 2b = 4$$

13.  $x$ 에 대한 다항식  $x^3 + ax^2 - x + b$ 를  $x-3$ 로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다.  $a + b + c + d + k$ 의 값을 구하면?

|     |   |     |     |     |
|-----|---|-----|-----|-----|
| $k$ | 1 | $a$ | -1  | $b$ |
|     |   | $c$ | $d$ | 33  |
|     | 1 | 4   | 11  | 37  |

① 19

② 20

③ 21

④ 22

⑤ 23

### 해설

다항식  $x^3 + ax^2 - x + b$ 를  $x-3$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

|   |   |         |          |               |
|---|---|---------|----------|---------------|
| 3 | 1 | $a$     | -1       | $b$           |
|   |   | 3       | $3a + 9$ | $9a + 24$     |
|   | 1 | $a + 3$ | $3a + 8$ | $9a + b + 24$ |

이때  $k = 3$ ,  $c = 3$ ,  $a + 3 = 4$ ,  $3a + 9 = d$ ,  $9a + b + 24 = 37$   
 이므로

$$k = 3, c = 3, a = 1, d = 12, b = 4$$

$$\text{따라서 } a + b + c + d + k = 1 + 4 + 3 + 12 + 3 = 23$$

14.  $3x^3 - 5x + 2 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$  이  $x$  에 대한 항등식일 때,  $a + b + c + d$  의 값은?

① -16

② 16

③ 20

④ 23

⑤ 25

해설

$$\begin{aligned}
 a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d &= (x-1) \{a(x-1)^2 + b(x-1) + c\} + d \\
 &= (x-1)(x-1)[a(x-1) + b] + c\} + d \text{ 이므로} \\
 &\text{조립제법을 쓰면}
 \end{aligned}$$

|   |   |   |    |    |     |
|---|---|---|----|----|-----|
| 1 | 3 | 0 | -5 | 2  |     |
|   |   | 3 | 3  | -2 |     |
| 1 | 3 | 3 | -2 | 0  | ← d |
|   |   | 3 | 6  |    |     |
| 1 | 3 | 6 | 4  |    | ← c |
|   |   | 3 |    |    |     |
|   |   | 3 | 9  |    | ← b |
|   |   | ↑ |    |    |     |
|   |   | a |    |    |     |

$$a + b + c + d = 3 + 9 + 4 + 0 = 16$$

해설

이 문제의 경우 계수의 합을 구하는 것이므로 양변에  $x = 2$  를 대입해서 한꺼번에 구하는 값을 얻을 수 있다.

15.  $x$ 에 대한 다항식  $f(x)$ 를  $x^2 - 4x + 3$ 으로 나누었을 때의 나머지는  $2x - 7$ 이고,  $x^2 - 3x - 10$ 으로 나누었을 때의 나머지는 11이다. 이 다항식  $f(x)$ 를  $x^2 - 6x + 5$ 로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

①  $2x + 1$

②  $4x + 3$

③  $x - 1$

④  $4x - 9$

⑤  $2x - 3$

### 해설

$f(x)$ 를  $x^2 - 6x + 5$ 로 나눈 몫을  $Q(x)$ , 나머지를  $ax + b$ 라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 6x + 5)Q(x) + ax + b \\ &= (x - 1)(x - 5)Q(x) + ax + b \cdots \textcircled{7} \end{aligned}$$

$f(x)$ 를  $x^2 - 4x + 3$ 으로 나눈 몫을  $Q_1(x)$ ,  $x^2 - 3x - 10$ 으로 나눈 몫을  $Q_2(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 4x + 3)Q_1(x) + 2x - 7 \\ &= (x - 1)(x - 3)Q_1(x) + 2x - 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 3x - 10)Q_2(x) + 11 \\ &= (x - 5)(x + 2)Q_2(x) + 11 \end{aligned}$$

이므로  $f(1) = -5$ ,  $f(5) = 11$ 이다.

⑦에서

$$f(1) = a + b = -5$$

$f(5) = 5a + b = 11$ 이므로 연립하여 풀면

$$a = 4, b = -9$$

따라서 구하는 나머지는  $4x - 9$ 이다.

16. 다항식  $f(x)$ 를  $(x-1)(x-2)$ 로 나눈 나머지가  $4x+3$ 일 때  $f(2x)$ 를  $x-1$ 로 나눈 나머지는?

① -1

② 0

③ 3

④ 7

⑤ 11

해설

$$f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + 4x + 3$$

$x=2$ 를 대입하면  $f(2) = 11$

$f(2x)$ 를  $x-1$ 로 나눈 나머지를  $R$ 이라 하면

$$f(2x) = (x-1)Q'(x) + R$$

$x=1$ 을 대입하면  $f(2) = R$

$$\therefore R = 11$$

17.  $x$ 에 대한 다항식  $x^3 - 2x^2 - px + 2$ 가  $x - 2$ 로 나누어떨어지도록 상수  $p$ 의 값을 정하면?

① 1

② -1

③ 2

④ -2

⑤ 3

해설

$x^3 - 2x^2 - px + 2 = f(x)$ 로 놓으면  $f(x)$ 가  $x - 2$ 로 나누어떨어지려면

$f(2) = 0$  이므로,

$$f(2) = 8 - 8 - 2p + 2 = 0$$

$$\therefore p = 1$$