1. $(x^2+x)(x^2+x+1)-6$을 인수분해하면?

① $(x-1)(x+2)(x^2+x+3)$　② $(x-1)(x+2)(x^2+x-3)$
③ $(x-2)(x+1)(x^2+x+3)$　④ $(x-1)(x+2)(x^2-x+3)$
⑤ $(x+1)(x-2)(x^2-x+3)$

해설

$x^2+x=X$라 하자.

(준식) $=X(X+1)-6$
$=X^2+X-6$
$=(X+3)(X-2)$
$=(x^2+x+3)(x^2+x-2)$
$=(x-1)(x+2)(x^2+x+3)$

2. 다음 중 다항식 x^4-5x^2+4를 인수분해 할 때, 나타나는 인수가 아닌 것은?

① $x-1$ ② $x-2$ ③ $x-3$ ④ $x+1$ ⑤ $x+2$

해설

$$\begin{aligned} x^4-5x^2+4 &= (x^2-1)(x^2-4) \\ &= (x+1)(x-1)(x+2)(x-2) \end{aligned}$$

3. $(a-b+c)(a+b-c)$를 전개한 식은?

① $a^2+b^2+c^2-2bc$　② $a^2-b^2+c^2-2bc$
③ $a^2-b^2-c^2+2bc$　④ $a^2+b^2-c^2-2bc$
⑤ $a^2+b^2+c^2+2bc$

해설

$(a-b+c)(a+b-c)$
$=\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}$
$=a^2-(b-c)^2$
$=a^2-b^2-c^2+2bc$

4. $x^4+3x^2+4=(x^2+x+2)(x^2+ax+b)$ 일 때, 상수 a, b 의 곱을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

(좌 변) $=(x^2+2)^2-x^2$

$=(x^2+x+2)(x^2-x+2)$

$\therefore\ a=-1,\ b=2$

$\therefore ab=-1\times 2=-2$

5. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해 하였더니 $(x+ay)(x-by+c)$가 된다고 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

x^2-2x-y^2+2y

$=(x^2-y^2)-2(x-y)$

$=(x+y-2)(x-y)$

$=(x+ay)(x-by+c)$

계수를 비교하면

$a=-1, b=-1, c=-2$

$\therefore a+b+c=-1-1-2=-4$

6. x^3-4x^2+x+6을 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x+c)$이다. $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$f(x)=x^3-4x^2+x+6$이라 놓으면,
$x=-1$일 때, $-1-4-1+6=0$
따라서, $f(x)$는 $(x+1)$로 나누어 떨어진다.
즉, $f(x)$는 $(x+1)$의 인수를 갖는다.
즉, $f(x)=(x+1)Q(x)$꼴
$Q(x)$는 조립제법으로 구한다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x^2-5x+6)(x+1)$
$\therefore\ f(x)=(x-3)(x-2)(x+1)$
$\therefore\ a^2+b^2+c^2=(-3)^2+(-2)^2+1^2=14$

7. $(a+1)(a^2-a+1)=a^3+1$을 이용하여 $\dfrac{1999^3+1}{1998\times1999+1}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2000

해설

$a=1999$라 하면

$1998\times1999+1=(a-1)a+1=a^2-a+1$

$$\therefore \frac{1999^3+1}{1998\times1999+1}=\frac{a^3+1}{a^2-a+1}$$
$$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$$
$$=a+1=2000$$

8. 자연수 $N = p^n q^m r^l$ 로 소인수분해될 때, 양의 약수의 개수는 $(n+1)(m+1)(l+1)$ 이다. 이 때, $38^3 + 3 \cdot 38^2 + 3 \cdot 38 + 1$ 의 양의 약수의 개수는?

① 9 개 ② 12 개 ③ 16 개 ④ 24 개 ⑤ 32 개

해설

$38 = x$ 라 하면,

$$\begin{aligned} 38^3 + 3 \cdot 38^2 + 3 \cdot 38 + 1 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ &= (x+1)^3 \\ &= 39^3 \\ &= 13^3 \cdot 3^3 \end{aligned}$$

$\therefore \quad (3+1)(3+1) = 16$

9. 두 다항식 x^3-3x^2+2x, $x^4-4x^3+4x^2$ 의 최대공약수와 최소공배수를 각각 $f(x), g(x)$ 라 할 때, $f(3)+g(3)$ 의 값을 구하면?

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

$x^3-3x^2+2x = x(x-2)(x-1)$

$x^4-4x^3+4x^2 = x^2(x-2)^2$

$\therefore f(x) = x(x-2), g(x) = x^2(x-1)(x-2)^2$

$\therefore f(3)+g(3) = 3+18 = 21$

10. 세 개의 다항식 x^3+ax+b, x^3+cx^2+a, cx^2+bx+4, 의 공약수 중 하나가 $x-1$일 때, $a+b+c$의 값은?

① 2 ② -2 ③ 3 ④ -3 ⑤ 4

해설

$f(x)=x^3+ax+b \rightarrow f(1)=1+a+b=0\cdots$㉠

$g(x)=x^3+cx^2+a \rightarrow g(1)=1+c+a=0\cdots$㉡

$h(x)=cx^2+bx+4 \rightarrow h(1)=c+b+4=0\cdots$㉢

㉠ + ㉡ + ㉢에서 $2(a+b+c)+6=0$

$\therefore\ a+b+c=-3$

11. 사차식 $x^4 - 10x^2y^2 + 9y^4$ 의 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $x-3y$　　② $x-2y$　　③ $x-y$

④ $x+y$　　⑤ $x+3y$

해설

$x^4 - 10x^2y^2 + 9y^4 = \left(x^2 - 9y^2\right)\left(x^2 - y^2\right)$
$= (x-3y)(x+3y)(x-y)(x+y)$

12. $16a^4 - 250ab^3$ 의 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① a　　② $2a - 5b$

③ $2a(2a - 5b)$　　④ $4a^2 + 10ab + 25b^2$

⑤ $2a(2a + 5b)$

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= 2a(8a^3 - 125b^3) \\
&= 2a\{(2a)^3 - (5b)^3\} \\
&= 2a(2a - 5b)(4a^2 + 10ab + 25b^2)
\end{aligned}
$$

13. $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$ 를 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x^2+cx+d)$ 이다. $a+b+c-d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2+x=A$ 로 치환하면

$(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$

$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$

$=(A-2)(A-12)+24$

$=A^2-14A+48=(A-6)(A-8)$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$

$=(x-2)(x+3)(x^2+x-8)$

$\therefore\ a+b+c-d=-2+3+1-(-8)=10$

14. 다항식 $(x-1)(x-3)(x+2)(x+4)+21$을 인수분해 하면?

① $(x^2-x-5)(x^2+x-9)$ ② $(x^2-x-5)(x^2-x-9)$
③ $(x^2+x+5)(x^2+x+9)$ ④ $(x^2+x-5)(x^2+x-9)$
⑤ $(x^2-x+5)(x^2+x+9)$

해설

(준식) $=(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)+21$
$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+21$
$x^2+x=A$로 치환하면,
$(A-2)(A-12)+21=A^2-14A+45$
$=(A-9)(A-5)$
$\therefore\ (x^2+x-9)(x^2+x-5)$

15. $(x^2+5x+4)(x^2+5x+2)-24$를 인수분해하면 $(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$일 때 $a+b+c+d$를 구하면?

① 16　　② -16　　③ 15　　④ 18　　⑤ 0

해설

$(x^2+5x+4)(x^2+5x+2)-24$에서

$x^2+5x=t$로 치환하면

(준식) $=(t+4)(t+2)-24$

$=t^2+6t+8-24=t^2+6t-16$

$=(t+8)(t-2)$

이 때 $t=x^2+5x$이므로

$\therefore\ (x^2+5x+8)(x^2+5x-2)$

$\therefore\ a=5,\ b=8,\ c=5,\ d=-2$

$a+b+c+d=5+8+5+(-2)=16$

16. x^4-8x^2-9를 x에 대한 일차식만의 곱으로 인수분해할 때, 계수는 다음 중 어떤 수라 할 수 있는가?

① 정수 ② 유리수 ③ 무리수
④ 실수 ⑤ 복소수

해설

$$\begin{aligned} x^4-8x^2-9 &= (x^2-9)(x^2+1) \\ &= (x+3)(x-3)(x^2+1) \\ &= (x+3)(x-3)(x+i)(x-i) \end{aligned}$$

$\therefore$ 복소수

17. 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립할 때, x^2-y^2의 값은?

$$[(x+y)^n+(x-y)^n]^2-[(x+y)^n-(x-y)^n]^2=4\times 3^n$$

① 3　　② 4　　③ 6　　④ 7　　⑤ 9

해설

$[(x+y)^n+(x-y)^n]^2-[(x+y)^n-(x-y)^n]^2$
$=4\times 3^n$
$4\{(x+y)(x-y)\}^n=4\times 3^n$
$4(x^2-y^2)^n=4\times 3^n$
$\therefore\ x^2-y^2=3$

18. 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}\ (\text{단. } a \neq b \neq c)$$

① -1 ② 1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \frac{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\ &= \frac{(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc(c-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\ &= \frac{(c-b)(a-b)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1\end{aligned}$$

19. 다음 중 다항식 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$의 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $a-b$ ② $b-c$ ③ $c-a$

④ $a+b+c$ ⑤ $a-b+c$

해설

주어진 식을 a에 관하여 정리하면

(준식)$= a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)$

$=(b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$

$=(b-c)\{b^2(c-a)+b(c^2-ca)-a(c^2-a^2)\}$

$=(b-c)(c-a)(b^2+bc-ac-a^2)$

$=(b-c)(c-a)\{c(b-a)+(b^2-a^2)\}$

$=(b-c)(c-a)(b-a)(a+b+c)$

20. $(2^{48}-1)$은 60 과 70 사이의 어떤 두 수로 나누어 떨어진다. 이 두 수는?

① 61, 63　　② 61, 65　　③ 63, 65
④ 63, 67　　⑤ 67, 69

해설

$$\begin{aligned}2^{48}-1 &= (2^6-1)(2^6+1)(2^{12}+1)(2^{24}+1)\\ &= 63\cdot 65\cdot (2^{12}+1)(2^{24}+1)\end{aligned}$$

따라서 $2^{48}-1$은 63과 65로 나누어 떨어진다.

21. $\dfrac{1999^3-1}{1999\times 2000+1}$ 을 계산하면?

① 1920 ② 1909 ③ 1998 ④ 1892 ⑤ 2000

해설

$x=1999$ 라 하면,

$$\begin{aligned}\frac{1999^3-1}{1999\times 2000+1} &= \frac{x^3-1}{x(x+1)+1}\\ &= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1}\\ &= x-1\\ &= 1998\end{aligned}$$

22. $\dfrac{11^6 - 1}{11^2(11^2+1)+1}$ 의 값을 구하면?

① 119　　② 120　　③ 121　　④ 122　　⑤ 123

해설

$$\frac{(11^2)^3 - 1}{(11^2)^2 + (11^2) + 1}$$

$$= \frac{(11^2-1)\{(11^2)^2 + (11^2) + 1\}}{(11^2)^2 + (11^2) + 1}$$

$$= 11^2 - 1 = (11+1)(11-1) = 120$$

23. $x^4+2x^2+9=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$로 인수분해될 때, $|ab-cd|$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$(\text{준식})=(x^2+3)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

여기서 계수를 비교하면

$a=2,\ b=3,\ c=-2,\ d=3$

$\therefore |ab-cd|=|2\times 3-(-2)\times 3|=12$

24. 세 다항식 $x^2 + ax - 4$, $ax^2 - bx - 2$, $2x^2 - ax + b$ 의 최대 공약수가 $x - 1$ 일 때, 최소공배수를 구하면?

① $(x-1)(x+4)(3x+2)$

② $(x-1)(x+4)(2x-1)$

③ $(x+4)(2x-1)$

④ $(x-1)(x+4)(3x+2)(2x-1)$

⑤ $(x-1)(x-4)(3x+2)(2x+1)$

해설

나머지 정리를 이용하면 $f(1) = 0$

$1 + a - 4 = 0$, $a - b - 2 = 0$, $2 - a + b = 0$

연립하여 풀면, $a = 3$, $b = 1$

$\therefore$ $x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4)$

$3x^2 - x - 2 = (x-1)(3x+2)$

$2x^2 - 3x + 1 = (x-1)(2x-1)$

따라서 최소공배수$= (x-1)(x+4)(3x+2)(2x-1)$

25. 두 다항식 $x^3 + 2x^2 - x - 2, 2x^3 + (a-2)x^2 - 2x$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 하는 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$x^3 + 2x^2 - x - 3 = x^2(x+2) - (x+2)$

$= (x+2)(x-1)(x-2)$

$2x^3 + (a-2)x^2 - 2x = x(2x^2 + (a-2)x - 2) \cdots ①$

두 식의 최대 공약수가 이차식이므로

$x = -2, -1, 1$ 을 ①식에 대입하면

식의 값이 동시에 0 이 되는 경우가 있어야 한다.

$x = -2$ 일 때, $8 - 2a + 4 - 2 = 0,\ a = 5$

$x = -1$ 일 때, $2 - a + 2 - 2 = 0,\ a = 2$

$x = 1$ 일 때, $2 + a - 2 - 2 = 0,\ a = 2$

$x = -1,\ 1$ 일때, 일치함

최대 공약수는 $(x+1)(x-1)$

$\therefore\ a = 2$

26. 두 이차다항식의 최대공약수가 $x-2$이고, 최소공배수가 $x^3-6x^2+3x+10$일 때, 두 다항식의 합을 구하면? (단, 이차항의 계수는 모두 1이다.)

① $2x^2-6x+8$ ② $2x^2-6x+7$ ③ $2x^2-8x+8$
④ $2x^2-9x+10$ ⑤ $2x^2+6x+9$

해설

구하는 두 다항식의 최대공약수가 $x-2$이므로
두 다항식은 $(x-2)a, (x-2)b$ (a, b는 서로소)
최소공배수 $(x-2)ab = x^3-6x^2+3x+10$
$= (x-2)(x+1)(x-5)$
그러므로 $a = x-5, b = x+1$
또는 $a = x+1, b = x-5$
따라서 두 다항식은
$(x-2)(x-5) = x^2-7x+10,$
$(x-2)(x+1) = x^2-x-2$
$\therefore$ 두 다항식의 합은 $2x^2-8x+8$

27. x^2 의 계수가 1 인 두 다항식 A, B 에 대해 두 다항식의 곱이 $(x-1)\left(x^3+3x^2-9x+5\right)$ 이고, 두 다항식의 최소공배수가 $(x-1)^2(x+5)$ 일 때, 두 다항식의 상수항의 합은?

① -4　　② -3　　③ -2　　④ -1　　⑤ 0

해설

$AB = LG = (x-1)\left(x^3+3x^2-9x+5\right)$

$L=(x-1)^2(x+5)$ 이므로 G$=x-1$

따라서 x^2 의 계수가 1 인 두 다항식은

각각 $(x-1)^2$, $(x-1)(x+5)$ 이다.

28. 1999 개의 다항식 x^2-2x-1, x^2-2x-2, $\cdots$, $x^2-2x-1999$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해 되는 것은 모두 몇 개인가?

① 43 개　② 44 개　③ 45 개　④ 46 개　⑤ 47 개

해설

$x^2-2x-n=(x+a)(x-b)$ (a, b 는 자연수) 라 하면 ($1 \le n \le 1999$ 인 자연수)

$ab=n,\ a=b-2$

$\therefore n=1\cdot 3,\ 2\cdot 4,\ 3\cdot 5,\ \cdots,\ 43\cdot 45(=1935)$ 의 43 개

29. $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$을 바르게 인수분해 한 것을 찾으면?

① $(x^2+1)(x+3)(x+1)$ ② $(x^2+1)(x+3)(x-1)$
③ $(x^2+1)(x-3)(x-1)$ ④ $(x^2-3)(x-1)(x+1)$
⑤ $(x^2+3)(x-1)(x+1)$

해설

$x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$
$= (x^4 - 2x^2 - 3) + 2x^3 + 2x$
$= (x^2-3)(x^2+1) + 2x(x^2+1)$
$= (x^2+1)(x^2+2x-3)$
$= (x^2+1)(x+3)(x-1)$

30. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-k$가 이차식의 완전제곱식으로 인수분해 될 때, 상수 k의 값을 정하면?

① -1 ② 1 ③ 0 ④ 2 ⑤ -2

해설

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-k$
$=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-k$
$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-k$
$x^2+5x=X$로 치환하면
(준식) $=(X+4)(X+6)-k$
$=X^2+10X+24-k$
완전제곱식이 되려면 $24-k=25$
$\therefore\ k=-1$

31. $a^2 - b^2 = 1$ 일 때, $\{(a+b)^n + (a-b)^n\}^2 - \{(a+b)^n - (a-b)^n\}^2$ 의 값은? (단, n은 자연수)

① 2　② $2(a+b)^n$　③ 4

④ $4(a+b)^n$　⑤ $4(a-b)^n$

해설

$(A)^2 - (B)^2$ 형태이므로
합차공식을 사용하여 정리하면
(준식)$= 4(a+b)^n(a-b)^n = 4(a^2-b^2)^n = 4$

32. $a^2b^2(a-b)+b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)$를 인수분해 하였을 때, 다음 중 인수가 아닌 것은?

① $a-b$ ② $b-c$ ③ $c-a$
④ $a+b+c$ ⑤ $ab+bc+ca$

해설

문자가 여러 개일 경우 동차식이면 어느 한 문자에 대하여 정리하고
차수가 다르면 차수가 낮은 문자에 대해 정리한다.
$\therefore$ (준식) $= a^3b^2-a^2b^3+b^3c^2-b^2c^3+c^3a^2-c^2a^3$
$= (b^2-c^2)a^3-(b^3-c^3)a^2+b^2c^2(b-c)$
$= (b-c)\{(b+c)a^3-(b^2+bc+c^2)a^2+b^2c^2\}$
$= (b-c)\{(c^2-a^2)b^2-a^2(c-a)b-a^2c(c-a)\}$
$= (b-c)(c-a)\{(c+a)b^2-a^2b-a^2c\}$
$= (b-c)(c-a)\{(b^2-a^2)c+ab(b-a)\}$
$= (b-c)(c-a)(b-a)\{(b+a)c+ab\}$
$= -(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$
따라서 인수가 아닌 것은 ④이다.

33. $a+b+c=0$일 때, $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$의 값을 구하면?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$a+b+c=0$이면 $a^3+b^3+c^3=3abc$이다.

$$(\text{준식})=\frac{a(b+c)}{bc}+\frac{b(a+c)}{ac}+\frac{c(a+b)}{ab}$$
$$=\frac{a^2(-a)+b^2(-b)+c^2(-c)}{abc}$$
$$=\frac{-(a^3+b^3+c^3)}{abc}$$
$$=\frac{-3abc}{abc}=-3$$

해설

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$
$$=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)$$
$$=\frac{a+c}{b}+\frac{b+a}{c}+\frac{b+c}{a}$$
$$=\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}+\frac{-a}{a}\quad(\because\ a+b+c=0)$$
$$=-3$$

34. 삼각형의 세변의 길이를 x, y, z라 할 때, 이들 사이에 다음의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

$$x^2yz + x^3z - xy^2z + xz^3 - y^3z + yz^3 = 0$$

① x가 빗변인 직각삼각형

② y가 빗변인 직각삼각형

③ z가 빗변인 직각삼각형

④ $x = y$인 이등변삼각형

⑤ $x = y$, z가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^2y + x^3 - xy^2 + xz^2 - y^3 + yz^2)z$
$= \{x^2(x+y) + (x+y)z^2 - (x+y)y^2\}z$
$= (x+y)(x^2 + z^2 - y^2)z$
$\therefore\ (x+y)(x^2 + z^2 - y^2)z = 0$
$x^2 + z^2 - y^2 = 0$ ($\because$ x, y, z는 모두 양수)
$\therefore\ x^2 + z^2 = y^2 \Rightarrow y$가 빗변인 직각삼각형

35. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 사이에 $a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2=0$ 의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $a=b$ 인 이등변삼각형
② $\angle \mathrm{A}=90^\circ$ 인 직각삼각형
③ $b=c$ 인 이등변삼각형
④ $\angle \mathrm{C}=90^\circ$ 인 직각삼각형
⑤ 정삼각형

해설

$a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2=0$
$a^2(a+b)+b^2(a+b)-c^2(a+b)=0$
$(a+b)(a^2+b^2-c^2)=0$
$a=-b$ 또는 $c^2=a^2+b^2$
a, b, c 모두 양수이므로, $c^2=a^2+b^2$
$\therefore \angle \mathrm{C}=90^\circ$ 인 직각삼각형

36. 삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$에 대하여 $(a+b-c)(a-b+c)=b(b+2c)+(c+a)(c-a)$가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형 ② 이등변삼각형 ③ 정삼각형
④ 예각삼각형 ⑤ 둔각삼각형

해설

$(a+b-c)(a-b+c)$
$=b(b+2c)+(c+a)(c-a)$에서
$\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}=b^2+2bc+c^2-a^2$
$a^2-b^2+2bc-c^2=-a^2+b^2+c^2+2bc$
$2a^2=2b^2+2c^2$
$\therefore\ a^2=b^2+c^2$
따라서, 이 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

37. 자연수 $N = 5 \cdot 29^3 + 15 \cdot 29^2 + 15 \cdot 29 + 5$ 의 양의 약수의 개수는?

① 20 개 ② 40 개 ③ 60 개
④ 80 개 ⑤ 100 개

해설

주어진 N 의 값을 직접 계산하여 다시 소인수분해 하기는 너무 복잡하므로,
주어진 수들을 하나의 문자로 생각하여 5로 묶으면
$N = 5(29^3 + 3 \cdot 29^2 + 3 \cdot 29 + 1)$
$= 5(29 + 1)^3$
$= 5 \cdot 30^3$
$= 5 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)^3$
$= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^4$
따라서 N 의 양의 약수의 개수는
$(3 + 1)(3 + 1)(4 + 1) = 80$

38. 인수분해 공식 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$을 이용하여 $\dfrac{9999^3+1}{9998\times 9999+1}$을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10000

해설

$9999 = a$라 하면

$$\frac{9999^3+1}{9998\times 9999+1} = \frac{a^3+1}{(a-1)a+1} = \frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1} = a+1 = 10000$$

39. 세 개의 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $[a,\ b,\ c] = (a-b)(a-c)$라 할 때, $[a,\ b,\ c]+[b,\ c,\ a]+[c,\ a,\ b]=0$이면 $[a,\ b,\ c]$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$(a-b)(a-c)+(b-c)(b-a)+(c-a)(c-b)=0$

전개하여 정리하면 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\therefore\ a=b=c$

$\therefore\ [a,\ b,\ c]=(a-b)(a-c)=0$

40. 최고차항의 계수가 1인 두 이차다항식 $A,\ B$에 대하여 $A,\ B$의 최대공약수를 $(A,\ B)$, $A,\ B$의 최소공배수를 $[A,\ B]$라 하자. 다항식 $A,\ B$가

$$(A+B,\ A-B) = 2x-3,\ [A+B,\ A-B] = 2x^2+x-6$$

을 만족할 때, $2[A,\ B]=0$과 같은 해를 갖는 것은?

① $2x^3+5x^2-6x-9$　② x^3+4x^2-2x-7
③ x^3-3x^2+5x-1　④ $3x^3-x^2+2x-1$
⑤ $-x^3+2x^2-5x+7$

해설

$A=aG,\ B=bG$ (a,b는 서로소)라 하자.
$(A+B, A-B) = ((a+b)G,\ (a-b)G) = 2x-3$ 이므로
G는 $2x-3$
따라서 A,B는 $2x-3$으로 나누어떨어지고 $a,\ b$는 일차식이다.
또 $[A+B, A-B] = [(a+b)G, (a-b)G] = 2x^2+x-6$
$=(x+2)(2x-3)$ 이므로 $(a+b)(a-b)G=(x+2)(2x-3)$
$\therefore\ (a+b)(a-b)=x+2$ 이고
$a,\ b$는 모두 일차식이므로
$a+b=x+2,\ a-b=1$ 이라 하고 연립하여 풀면
$a=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$,
$b=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
$\therefore\ [A,B]=\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)(2x-3)$
$=\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}\right)(2x-3)$
$=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{8}{4}x^2-3x+\frac{3}{2}x-\frac{9}{4}$
$=\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{4}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{9}{4}$
$\therefore\ 2[A,B]=x^3+\frac{5}{2}x^2-3x-\frac{9}{2}$
따라서 $2[A,B]$와 같은 것은 ① $2x^3+5x^2-6x-9$ 이다.

41. 다음 식 $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$ 의 인수가 아닌 것은?

① $a+b$ ② $b+c$ ③ $c+a$

④ $b-a$ ⑤ $-b-c$

해설

전개하여 a에 대한 내림차순으로 정리하면

$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc(b+c)$

$=(b+c)\left\{a^2+(b+c)a+bc\right\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

$\therefore$ ④ $b-a$는 인수가 아니다

42. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$ 을 인수분해 할 때, 다음 중 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $a+b$　　② $b+c$

③ $a+c$　　④ $a^2+ab+bc+ca$

⑤ $a^2+2ab+b^2$

해설

(준 식) $=\{(a+b+c)^3-a^3\}-(b^3+c^3)$

$=(a+b+c-a)\{(a+b+c)^2+(a+b+c)a+a^2\}$

$-(b+c)(b^2-bc+c^2)$

$=(b+c)(3a^2+3ab+3bc+3ca)$

$=3(b+c)(a^2+ab+bc+ca)$

$=3(b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}$

$=3(a+b)(b+c)(c+a)$

43. 세 변의 길이가 $x,\ y,\ z$인 삼각형 ABC에서 등식 $(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4=0$이 성립할 때, △ABC는 어떤 삼각형인가?

① $z=x$인 이등변삼각형, 또는 y가 빗변인 직각삼각형

② $y=z$인 이등변삼각형, 또는 x가 빗변인 직각삼각형

③ x가 빗변인 직각삼각형

④ y가 빗변인 직각삼각형

⑤ $x=y$인 이등변 삼각형, 또는 z가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4$
$=(x-y)(x+y)^2(x^2+y^2)-2(x-y)(x^2+xy+y^2)z^2+(x-y)z^4$
$=(x-y)\{(x^2+2xy+y^2)(x^2+y^2)-2(x^2+xy+y^2)z^2+z^4\}$
$=(x-y)\{x^4+x^2y^2+2x^3y+2xy^3+x^2y^2+y^4-2x^2z^2-2xyz^2-2y^2z^2+z^4\}$
$=(x-y)\{x^4+y^4+z^4+2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$
$=(x-y)\{(x^2+y^2-z^2)^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$
$=(x-y)(x^2+y^2-z^2)(x^2+y^2-z^2+2xy)=0$
$\therefore\ x=y$인 이등변 삼각형 또는 z가 빗변인 직각 삼각형
($\because\ x^2+y^2-z^2+2xy=(x+y)^2-z^2$에서 삼각형의 변인 $x,\ y,\ z$는 $x+y\neq z$)

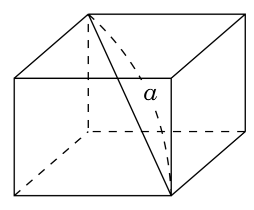
44. 실수 a, b, c에 대하여 $a+b=-\sqrt{2}$, $b+c=\sqrt{2}$일 때, $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3-3(a-b)(b-c)(c-a)$의 값은?

① 0　　② $\sqrt{2}$　　③ $-\sqrt{2}$　　④ 2　　⑤ -2

해설

$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3 -3(a-b)(b-c)(c-a)$
$=\{(a-b)+(b-c)+(c-a)\}$
$\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$
$-(a-b)(b-c)-(b-c)(c-a)-(c-a)(a-b)\}$
$=0$

45. 다음 그림과 같은 직육면체에서 대각선의 길이가 a이고, 모든 모서리의 길이의 합이 b일 때, 이 직육면체의 겉넓이는?



① $\frac{1}{16}b^2 - a^2$　② $\frac{1}{8}b^2 - a^2$　③ $\frac{1}{4}b^2 - a^2$
④ $\frac{1}{8}b^2 + a^2$　⑤ $\frac{1}{16}b^2 + a^2$

해설

가로, 세로의 길이와 높이를 각각 x, y, z라 하면
$4(x+y+z) = b,\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} = a$
$\therefore\ x+y+z = \frac{1}{4}b,\ x^2+y^2+z^2 = a^2$
따라서, 구하는 직육면체의 겉넓이는

$$\begin{aligned} 2(xy+yz+zx) &= (x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2) \\ &= \left(\frac{1}{4}b\right)^2 - a^2 \\ &= \frac{1}{16}b^2 - a^2 \end{aligned}$$

46. x에 대한 세 다항식 $f(x), g(x), h(x)$가 항등식 $(x-1)f(x) = xg(x) = (x+1)h(x)$를 만족한다. 이 때, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$의 최소공배수를 구하면?

① $f(x)$　　② $xf(x)$

③ $x(x+1)f(x)$　　④ $(x-1)f(x)$

⑤ $(x+1)(x-1)f(x)$

해설

$(x-1)f(x) = xg(x) = (x+1)h(x)$에서

① 다항식 $f(x)$에 대하여 $x = 0, -1$을 대입하면 $f(0) = f(-1) = 0$

② 다항식 $g(x)$에 대하여 $x = 1, -1$을 대입하면 $g(1) = g(-1) = 0$

③ 다항식 $h(x)$에 대하여 $x = 0, 1$을 대입하면 $h(0) = h(1) = 0$

①, ②, ③으로부터

$f(x), g(x), h(x)$의 최대공약수를 G라 하면

$f(x) = x(x+1)G$, $g(x) = (x-1)(x+1)G$, $h(x) = x(x-1)G$

$\therefore$ $f(x), g(x), h(x)$의 최소공배수는

$x(x+1)(x-1)G = (x-1)f(x)$

47. 두 다항식 $f(x) = (x-1)(x+1)(x+2)$, $g(x) = 2x^3-(a+2)x^2-ax+2a$ 의 최대공약수가 이차식이다. 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$g(1) = 0$이므로 $g(x)$는 $x-1$를 인수로 갖는다. 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & -(a+2) & -a & 2a \\ & & 2 & -a & -2a \\ \hline & 2 & -a & -2a & \boxed{0} \end{array}$$

$g(x) = (x-1)(2x^2-ax-2a)$

$f(x) = (x-1)(x+1)(x+2)$이므로

최대공약수는 $(x-1)(x+1)$ 또는 $(x-1)(x+2)$

ⅰ) $(x-1)(x+1)$ 일 때

$2(-1)^2-a(-1)-2a = 0$에서 $a = 2$

$\therefore\ g(x) = 2(x-1)(x+1)(x-2)$

ⅱ) $(x-1)(x+2)$ 일 때

$2(-1)^2-a(-2)-2a = 0-8 \neq 0$

ⅰ), ⅱ) 에서

$g(x) = 2(x-1)(x+1)(x-2)$이고 $a = 2$

48. x^2의 계수가 1인 세 이차식 A, B, C가 다음 세 조건을 모두 만족할 때, 이차식 A는?

> ㉠ A, B의 최대공약수는 $x+1$이다.
>
> ㉡ B, C의 최대공약수는 $x-2$이다.
>
> ㉢ A, C의 최소공배수는 x^3+2x^2-5x-6이다.

① x^2+4x+3　② x^2-x-2　③ x^2+x-6
④ x^2+5x+6　⑤ x^2+2x-3

해설

A, B의 최대공약수는 $x+1$ 이므로
$A=a(x+1)$, $B=b(x+1)$
B, C의 최대공약수는 $x-2$ 이므로
$B=(x-2)(x+1)$, $C=c(x-2)$
A, C의 최소공배수는
$x^3+2x^2-5x-6=(x+3)(x-2)(x+1)$
따라서 A, C의 최대공약수는 $(x+3)$ 이고
$A=(x+3)(x+1)=x^2+4x+3$

49. x 에 관한 두 다항식 $f(x) = x^3 + ax^2 + 2x - 1,\ g(x) = x^3 + bx^2 + 1$ 이 이차식의 최대공약수 $h(x)$ 를 가질 때, $h(-1)$ 의 값을 구하면? (단, $h(x)$ 의 이차항의 계수는 1이다.)

① 6　　② 3　　③ 0　　④ −3　　⑤ −6

해설

$f(x) + g(x) = x\left\{2x^2 + (a+b)x + 2\right\} = G(k+l)$

$f(x) - g(x) = (a-b)x^2 + 2x - 2 = G(k-l)$ (단, k, l : 서로소)

$\therefore\ -2x^2 - (a+b)x - 2 = (a-b)x^2 + 2x - 2$

$a - b = -2,\ a + b = -2$

$\therefore\ a = -2,\ b = 0$

$\therefore\ h(x) = x^2 - x + 1 \quad \therefore\ h(-1) = 3$

50. 다항식 $A(x) = x^3 + px^2 + 3x + 1$을 다항식 $B(x) = x^2 + qx + 3$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 하자. $B(x)$와 $R(x)$ 의 최대공약수가 $x - 1$일 때, $R(2)$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

$A = BQ + R$에서 A, B 의 $G.C.M.$과 B, R의 $G.C.M.$은 일치한다.
($\Leftarrow$ *Euclid* 호제법)
그러므로 $x - 1$은 $A(x)$, $B(x)$의 공약수이다.
$\therefore\ A(1) = 0$ 에서 $p = -5$,
$B(1) = 0$에서 $q = -4$
$x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = (x^2 - 4x + 3)Q(x) + a(x - 1)$
양변에 $x = 3$을 대입하면 $-8 = 2a\ \therefore\ a = -4$
$\therefore\ R(x) = -4(x - 1) \quad \therefore\ R(2) = -4$