

1. $x^2 - 2x - y^2 + 2y$ 를 인수분해하였더니, $(x + ay)(x - by + c)$ 가 되었다.
이 때, a, b, c 를 순서대로 쓴 것은?

① $-1, 0, 1$

② $-1, 1, 2$

③ $-2, -1, 1$

④ $-1, -1, -2$

⑤ $-1, 2$

해설

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - y^2 + 2y &= (x + y)(x - y) - 2(x - y) \\ &= (x - y)(x + y - 2)\end{aligned}$$

$$\therefore a = -1, b = -1, c = -2$$

2. $(x^2 + x)(x^2 + x + 1) - 6$ 을 인수분해하면?

- ① $(x-1)(x+2)(x^2+x+3)$ ② $(x-1)(x+2)(x^2+x-3)$
③ $(x-2)(x+1)(x^2+x+3)$ ④ $(x-1)(x+2)(x^2-x+3)$
⑤ $(x+1)(x-2)(x^2-x+3)$

해설

$x^2 + x = X$ 라 하자.

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= X(X+1) - 6 \\&= X^2 + X - 6 \\&= (X+3)(X-2) \\&= (x^2+x+3)(x^2+x-2) \\&= (x-1)(x+2)(x^2+x+3)\end{aligned}$$

3. $(x^4 - 8x^2 - 9) \div (x^2 - 9)$ 를 계산하여라.

① $x^2 + 1$

② $x^2 - 1$

③ $x^2 + 2$

④ $x^2 - 2$

⑤ $x^2 + 3$

해설

$$x^4 - 8x^2 - 9 = (x^2 - 9)(x^2 + 1)$$

$$\therefore (\text{준식}) = x^2 + 1$$

4. 다항식 $(x-1)^3 + 27$ 을 바르게 인수분해한 것은?

① $(x-1)(x^2+3)$

② $(x-1)(x^2-x-2)$

③ $(x-1)(x^2+3x+3)$

④ $(x+2)(x^2+x+7)$

⑤ $(x+2)(x^2-5x+13)$

해설

$x-1$ 을 A 로 치환하면

$$\text{준 식} = A^3 + 27 = (A+3)(A^2-3A+9)$$

다시 $x-1$ 을 대입하면 $(x+2)(x^2-5x+13)$

5. $x^4 + 3x^2 + 4 = (x^2 + x + 2)(x^2 + ax + b)$ 일 때, 상수 a, b 의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\begin{aligned}(\text{좌 변}) &= (x^2 + 2)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)\end{aligned}$$

$$\therefore a = -1, b = 2$$

$$\therefore ab = -1 \times 2 = -2$$

6. $x^2 - 2x - y^2 + 2y$ 를 인수분해 하였더니 $(x + ay)(x - by + c)$ 가 된다고 할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x - y^2 + 2y \\ &= (x^2 - y^2) - 2(x - y) \\ &= (x + y - 2)(x - y) \\ &= (x + ay)(x - by + c) \end{aligned}$$

계수를 비교하면

$$a = -1, b = -1, c = -2$$

$$\therefore a + b + c = -1 - 1 - 2 = -4$$

7. 등식 $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x+a)(x+b)(x+c)$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

조립제법을 사용한다

1	1	4	1	-6
		1	5	6
-2	1	5	6	0
		-2	-6	
-3	1	3	0	
		-3		
	1	0		

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x-1)(x+2)(x+3)$$

$$\therefore a+b+c = 4$$

8. x 에 대한 다항식 $x^3 - 2x^2 - x + 2$ 가 $(x+a)(x+b)(x+c)$ 로 인수분해될 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값은? (단, a, b, c 는 상수)

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)(x-1)(x-2)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (-1)^2 + 1^2 + 2^2 = 6$$

9. $(a+1)(a^2-a+1) = a^3+1$ 을 이용하여 $\frac{1999^3+1}{1998 \times 1999 + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2000

해설

$a = 1999$ 라 하면

$$1998 \times 1999 + 1 = (a-1)a + 1 = a^2 - a + 1$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1999^3 + 1}{1998 \times 1999 + 1} &= \frac{a^3 + 1}{a^2 - a + 1} \\ &= \frac{(a+1)(a^2 - a + 1)}{a^2 - a + 1} \\ &= a + 1 = 2000\end{aligned}$$

10. 두 다항식 $3x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 4$, $3x^3 - 3x^2 - 6x$ 의 최대공약수를 구하면?

① $(x-1)(x-2)$

② $(x+1)(x+2)$

③ $(x+1)(x-2)$

④ $(x-1)(x-2)$

⑤ $(x+1)(x-1)$

해설

$$3x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 4$$

$$= (x+1)(x-2)(x+1)(3x-2)$$

$$3x^3 - 3x^2 - 6x = 3x(x-2)(x+1)$$

$$\therefore \text{최대공약수} : (x-2)(x+1)$$

11. 다음 중 $x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x + y$

② $-x - y$

③ $x + y - 2$

④ $x - y$

⑤ $2x + 2y$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= (x^2 + 2xy + y^2) - 2(x + y) \\&= (x + y)^2 - 2(x + y) \\&= (x + y)(x + y - 2)\end{aligned}$$

한편,

$$\begin{aligned}(x + y)(x + y - 2) &= -(-x - y)(x + y - 2) \\&= \frac{1}{2}(2x + 2y)(x + y - 2)\end{aligned}$$

12. 자연수 n 에 대하여 다음 등식이 성립할 때, $x^2 - y^2$ 의 값은?

$$[(x+y)^n + (x-y)^n]^2 - [(x+y)^n - (x-y)^n]^2 = 4 \times 3^n$$

① 3

② 4

③ 6

④ 7

⑤ 9

해설

$$\begin{aligned} & [(x+y)^n + (x-y)^n]^2 - [(x+y)^n - (x-y)^n]^2 \\ &= 4 \times 3^n \end{aligned}$$

$$4\{(x+y)(x-y)\}^n = 4 \times 3^n$$

$$4(x^2 - y^2)^n = 4 \times 3^n$$

$$\therefore x^2 - y^2 = 3$$

13. $1 - 4x^2 - y^2 + 4xy = (1 + ax + by)(1 + cx + dy)$ 일 때, $ac + bd$ 의 값을 구하면?

① -6

② -5

③ -4

④ -3

⑤ -2

해설

$$(\text{준식}) = 1 - (4x^2 - 4xy + y^2)$$

$$= 1^2 - (2x - y)^2$$

$$= (1 + 2x - y)(1 - 2x + y)$$

$$\therefore a = 2, b = -1, c = -2, d = 1$$

$$\therefore ac + bd = 2 \times (-2) + (-1) \times 1 = -5$$

14. 다음 보기 중 항상 옳다고 할 수 없는 등식은?

㉠ $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$

㉡ $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$

㉢ $(x^2 + x + 1)(x^2 - x - 1) = x^4 + x + 1$

㉣ $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$

㉤ $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉣

⑤ ㉤

해설

㉢ $x + 1 = A$ 로 치환하여 전개하면

$$(x^2 + A)(x^2 - A) = x^4 - A^2 = x^4 - x^2 - 2x - 1$$

15. 다항식 $2x^2 - 2y^2 + 3xy + 5x + 5y + 3$ 을 두 일차식의 곱으로 인수분해 하였을 때, 두 일차식의 합으로 옳은 것은?

① $3x + 3y - 2$

② $3x - y - 4$

③ $3x + y + 4$

④ $3x + y - 2$

⑤ $3x - y + 2$

해설

$$2x^2 + (3y + 5)x - (2y^2 - 5y - 3)$$

$$= \{2x + (2y + 1)\} \{x - (y - 3)\}$$

$$\therefore (2x + 2y + 1) + (x - y + 3) = 3x + y + 4$$

16. $x^6 + 4x^4 + x^2 - 6$ 이 $(x+a)(x+b)(x^2+c)(x^2+d)$ 로 인수분해 될 때,
 $a+b+c+d$ 의 값은?

① -5

② -2

③ 0

④ 3

⑤ 5

해설

조립제법을 이용한다.

$$x^6 + 4x^4 + x^2 - 6 = (x+1)(x-1)(x^4 + 5x^2 + 6)$$

$$= (x+1)(x-1)(x^2+2)(x^2+3)$$

$$\therefore a+b+c+d=5$$

17. 다음 중 $x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 34x - 24$ 를 인수분해 하였을 때, 인수가 아닌 것은?

① $x - 1$

② $x - 2$

③ $x + 3$

④ $x + 4$

⑤ $x - 4$

해설

$f(x) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 34x - 24$ 라 하면

$f(1) = f(2) = 0$ 이므로

$f(x)$ 는 $x - 1, x - 2$ 를 인수로 갖는다.

조립제법을 해 보면 즉,

$$x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 34x - 24$$

$$= (x - 1)(x - 2)(x^2 - x - 12)$$

$$= (x - 1)(x - 2)(x - 4)(x + 3)$$

18. $\frac{11^6 - 1}{11^2(11^2 + 1) + 1}$ 의 값을 구하면?

① 119

② 120

③ 121

④ 122

⑤ 123

해설

$$\begin{aligned} & \frac{(11^2)^3 - 1}{(11^2)^2 + (11^2) + 1} \\ &= \frac{(11^2 - 1)\{(11^2)^2 + (11^2) + 1\}}{(11^2)^2 + (11^2) + 1} \\ &= 11^2 - 1 = (11 + 1)(11 - 1) = 120 \end{aligned}$$

19. $x = 1001$ 일 때, $\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4 + 1)(x^2 - 1)}{(x^4 + 1)(x + 1)} \\ &= x - 1 \\ &= 1001 - 1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

20. $x + y + z = 1$, $xy + yz + zx = 2$, $xyz = 3$ 일 때, $(x + y)(y + z)(z + x)$ 의 값은?

①

-1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$x + y + z = 1$ 을 변형하면

$$(\text{준식}) = (1 - z)(1 - x)(1 - y)$$

$$= 1 - (x + y + z) + (xy + yz + zx) - xyz$$

$$= 1 - 1 + 2 - 3 = -1$$

21. 다음 식을 인수분해하면 $x^4 - 3x^2y^2 + 4y^4 = (x^2 + axy + by^2)(x^2 + cxy + dy^2)$ 일 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라. (a, b, c, d 는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 7x^2y^2 \\&= (x^2 + 2y^2)^2 - 7x^2y^2 \\&= (x^2 + \sqrt{7}xy + 2y^2)(x^2 - \sqrt{7}xy + 2y^2) \\ \therefore a + b + c + d &= 4\end{aligned}$$

22. 두 다항식 $f(x) = x^3 - ax + b, g(x) = x^2 + ax - 2b$ 의 최대공약수가 $x - 1$ 일 때, $f(x), g(x)$ 의 최소공배수를 구하면?

① $(x - 1)^2(x + 1)(x + 2)$

② $(x - 1)^2(x + 4)(x + 2)$

③ $(x - 1)(x + 1)^2(x + 2)$

④ $(x - 1)(x + 4)^2(x + 2)$

⑤ $(x - 1)(x + 4)(x + 2)^2$

해설

인수정리에 의해

$$f(1) = 1 - a + b = 0$$

$$g(1) = 1 + a - 2b = 0$$

연립하면, $a = 3, b = 2$

$$\therefore f(x) = x^3 - 3x + 2$$

조립제법을 이용하면,

$$f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$$

$$g(x) = x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$$

$$\therefore \text{최소공배수: } (x - 1)^2(x + 4)(x + 2)$$

23. 두 다항식의 최대공약수가 $x-1$ 이고, 곱이 $2x^3 + ax^2 + bx + 3$ 일 때, $a-b$ 의 값은?(단, a, b 는 상수)

① -3

② 3

③ -1

④ 1

⑤ 0

해설

두 다항식은 $(x-1)p, (x-1)q(p, q$ 은 서로 소)라 할 수 있다.

두 다항식의 곱은 $(x-1)^2 pq = 2x^3 + ax^2 + bx + 3$

즉, $2x^3 + ax^2 + bx + 3$ 는 $x-1$ 로 나눌 때 연속으로 나누어 떨어진다.

조립제법을 사용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & a & b & 3 \\ & & 2 & a+2 & a+b+2 \\ \hline 1 & 2 & a+2 & a+b+2 & a+b+5=0 \\ & & 2 & a+4 & \\ \hline & 2 & a+4 & a+b+6=0 \end{array}$$

$a+b=-5, 2a+b=-6$ 을 연립하여 풀면

$$a=-1, b=-4$$

$$\therefore a-b=3$$

해설

$$(x-1)^2(2x+k) = 2x^3 + ax^2 + bx + 3$$

$$(x^2 - 2x + 1)(2x+k) = 2x^3 + ax^2 + bx + 3$$

상수항을 비교하면 $k=3$

$$\text{일차항의 계수를 비교하면 } 3x^2 - 4x^2 = ax^2$$

$$\therefore a=-1$$

일차항의 계수를 비교하면

$$-6x + 2x = bx \therefore b=-4$$

$$\therefore a-b=3$$

24. x^2+ax-9 와 x^2+bx+c 의 합은 $2x^2-4x-6$, 최소공배수는 x^3-x^2-9x+9 이다. $a-b+c$ 의 값을 구하여라. (단, a, b, c 는 상수이다.)

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

$$A = x^2 + ax - 9 = Gp$$

$$B = x^2 + bx + c = Gq \text{라 하면}$$

$$A + B = (p + q)G = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x + 1)(x - 3)$$

$$L = pqG = x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^2(x - 1) - 9(x - 1)$$

$$= (x - 1)(x^2 - 9) = (x - 1)(x + 3)(x - 3)$$

따라서, $G = x - 3$, $p = x + 3$, $q = x - 1$ 이다.

$$\therefore A = (x + 3)(x - 3) = x^2 - 9$$

$$B = (x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$$

$$\therefore a = 0, b = -4, c = 3$$

$$\therefore a - b + c = 7$$

25. 이차항의 계수가 1인 세 이차식 A, B, C 가 다음 세 조건을 만족할 때, A 를 구하면?

㉠ A, B 의 최대공약수는 $x-2$ 이다.

㉡ B, C 의 최대공약수는 $x+1$ 이다.

㉢ A, C 의 최소공배수는 $x^3 - 2x^2 - x + 2$ 이다.

① $x^2 - 4x + 3$

② $x^2 - 3x + 2$

③ $x^2 - 2x + 1$

④ $x^2 - 2x - 3$

⑤ $x^2 - x + 2$

해설

이차항의 계수가 1인 세 이차식 A, B, C 에 대하여

A, B 의 최대공약수가 $x-2$ 이므로

$$A = (x-2)(x-\alpha), B = (x-2)(x-\beta)$$

B, C 의 최대공약수가 $x+1$ 이므로

$$B = (x+1)(x-2), C = (x+1)(x-\gamma)$$

A, C 의 최소공배수는

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)(x-2)(x-1)$$

$$\therefore x-\alpha = x-\gamma = x-1$$

$$\therefore A = (x-2)(x-1) = x^2 - 3x + 2$$

26. 두 다항식 A, B 의 최대공약수 G 를 $A \cdot B$, 최소공배수 L 을 $A \star B$ 로 나타내기로 한다. 다음 중 $(A^2 \cdot B^2) \star (A^2 \cdot AB)$ 와 같은 것은?

① 1

② A

③ AB

④ AL

⑤ AG

해설

$A = aG, B = bG$ (a, b 는 서로소)라 하면

$$A^2 \cdot B^2 = a^2 G^2 \cdot b^2 G^2 = G^2$$

$$A^2 \cdot AB = a^2 G^2 \cdot ab G^2 = a G^2$$

$$\therefore (A^2 \cdot B^2) \star (A^2 \cdot AB) = G^2 \star a G^2 = a G^2 = AG$$

27. 두 다항식 A, B 의 최대공약수 G 를 $A * B$, 최소공배수 L 을 $A \star B$ 로 나타내기로 할 때, $(A^2 * B^2) \star (A^2 * AB)$ 와 같은 것은?

① AG

② A

③ AL

④ AB

⑤ I

해설

$A = Ga, B = Gb(a, b$ 는 서로소)로 놓으면

$$(A^2 * B^2) \star (A^2 * AB)$$

$$= (G^2a^2 * G^2b^2) \star (G^2a^2 * G^2ab)$$

$$= G^2 \star G^2a$$

$$= G^2a$$

$$= AG$$

28. 1999개의 다항식 $x^2 - 2x - 1, x^2 - 2x - 2, \dots, x^2 - 2x - 1999$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해 되는 것은 모두 몇 개인가?

- ① 43 개 ② 44 개 ③ 45 개 ④ 46 개 ⑤ 47 개

해설

$x^2 - 2x - n = (x+a)(x-b)$ (a, b 는 자연수)라 하면 ($1 \leq n \leq 1999$ 인 자연수)

$$ab = n, a = b - 2$$

$\therefore n = 1 \cdot 3, 2 \cdot 4, 3 \cdot 5, \dots, 43 \cdot 45 (= 1935)$ 의 43 개

29. $(x+2)(x-3)(x+6)(x-9)+21x^2$ 을 인수분해하면 $(x^2+p)(x^2+qx-18)$ 이다. pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \{(x+2)(x-9)\}\{(x-3)(x+6)\} + 21x^2 \\&= (x^2 - 7x - 18)(x^2 + 3x - 18) + 21x^2 \\&= \{(x^2 - 18) - 7x\}\{(x^2 - 18) + 3x\} + 21x^2 \\&= (x^2 - 18)^2 - 4x(x^2 - 18) - 21x^2 + 21x^2 \\&= (x^2 - 18)(x^2 - 4x - 18)\end{aligned}$$

따라서 $p = -18, g = -4$

$$\therefore pq = (-18) \times (-4) = 72$$

30. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - k$ 가 이차식의 완전제곱식으로 인수분해될 때, 상수 k 의 값을 정하면?

① -1

② 1

③ 0

④ 2

⑤ -2

해설

$$\begin{aligned} & (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - k \\ &= (x+1)(x+4)(x+2)(x+3) - k \\ &= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - k \\ & x^2 + 5x = X \text{로 치환하면} \\ & (\text{준식}) = (X+4)(X+6) - k \\ & \quad = X^2 + 10X + 24 - k \\ & \text{완전제곱식이 되려면 } 24 - k = 25 \\ & \therefore k = -1 \end{aligned}$$

31. $x^4 - 11x^2 + 1$ 이 $(x^2 + ax + b)(x^2 + 3x + b)$ 로 인수분해될 때, $a + b$ 의 값은?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$$\begin{aligned}x^4 - 11x^2 + 1 &= (x^2 - 1)^2 - 9x^2 \\&= (x^2 - 1)^2 - (3x)^2 \\&= (x^2 - 3x - 1)(x^2 + 3x - 1) \\&= (x^2 + ax + b)(x^2 + 3x + b)\end{aligned}$$

$$\therefore a = -3, b = -1$$

$$\therefore a + b = -4$$

32. 다음 중 다항식 $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$ 의 인수가 아닌 것은?

① $a - b$

② $b - c$

③ $c - a$

④ $a + b + c$

⑤ $a - b + c$

해설

주어진 식을 a 에 관하여 정리하면

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= a^3(b-c) - a(b^3 - c^3) + bc(b^2 - c^2) \\&= (b-c)\{a^3 - a(b^2 + bc + c^2) + bc(b+c)\} \\&= (b-c)\{b^2(c-a) + b(c^2 - ca) - a(c^2 - a^2)\} \\&= (b-c)(c-a)(b^2 + bc - ac - a^2) \\&= (b-c)(c-a)\{c(b-a) + (b^2 - a^2)\} \\&= (b-c)(c-a)(b-a)(a+b+c)\end{aligned}$$

33. a, b, c 가 $\triangle ABC$ 의 세변의 길이를 나타낼 때, 다음 등식 $a^3 + a^2b - ab^2 - a^2c + b^2c - b^3 = 0$ 을 만족하는 삼각형의 모양은?

① 직삼각형

② 이등변삼각형

③ 직각삼각형

④ 직각이등변삼각형

⑤ 이등변삼각형 또는 직각삼각형

해설

$$a^3 + a^2b - ab^2 - a^2c + b^2c - b^3 = 0$$

$$a^2(a+b) - b^2(a+b) - c(a^2 - b^2) = 0$$

$$(a+b)(a^2 - ac + bc - b^2) = 0$$

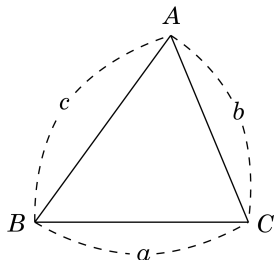
$$(a+b)\{((a-b)(a+b) - c(a-b))\} = 0$$

$$(a+b)(a-b)(a+b-c) = 0$$

$$a+b > 0, a+b-c > 0 \text{ 이므로 } a=b$$

$\therefore a=b$ 인 이등변삼각형

34. 다음 그림과 같이 세 변의 길이가 a, b, c 인 $\triangle ABC$ 에서 $a^3 + b^3 + c^3 - ab(a+b) + bc(b+c) - ca(c+a) = 0$ 이 성립할 때, $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인가?



- ① $a = b$ 인 이등변삼각형 ② $a = c$ 인 이등변삼각형
 ③ $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ④ $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형
 ⑤ $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형

해설

$$\begin{aligned}
 & a^3 + b^3 + c^3 - ab(a+b) + bc(b+c) - ca(c+a) \\
 &= a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - ab^2 + b^2c + bc^2 - c^2a - ca^2 \\
 &= a^3 - (b+c)a^2 - (b^2+c^2)a + b^3 + b^2c + bc^2 + c^3 \\
 &= a^3 - (b+c)a^2 - (b^2+c^2)a + b^2(b+c) + c^2(b+c) \\
 &= a^3 - (b+c)a^2 - (b^2+c^2)a + (b+c)(b^2+c^2) \\
 &= a^3 - (b+c)a^2 - (b^2+c^2)(a-b-c) \\
 &= (a-b-c)a^2 - (b^2+c^2)(a-b-c) \\
 &= (a-b-c)(a^2 - b^2 - c^2) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

이 때, a, b, c 는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a \neq b+c$

$$\therefore a^2 - b^2 - c^2 = 0,$$

$$\text{즉 } a^2 = b^2 + c^2$$

따라서, $\triangle ABC$ 는 a 를 빗변으로 하는 직각삼각형,

즉 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

35. 세 변의 길이가 a, b, c 인 삼각형에 대하여 $(a^2 + b^2)c + (a + b)c^2 = (a + b)(a^2 + b^2) + c^3$ 이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $b = c$ 인 이등변 삼각형

② a 가 빗변인 직각삼각형

③ $a = c$ 인 이등변 삼각형

④ c 가 빗변인 직각삼각형

⑤ 정삼각형

해설

준식을 c 에 관한 내림차순으로 정리하면

$$c^3 - (a + b)c^2 - (a^2 + b^2)c + (a + b)(a^2 + b^2) \text{에서}$$

$$c^2\{c - (a + b)\} - (a^2 + b^2)\{c - (a + b)\}$$

$$= \{c - (a + b)\}\{c^2 - (a^2 + b^2)\}$$

$$= (c - a - b)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$$

a, b, c 는 삼각형의 세변이므로

$$c - a - b \neq 0 \text{이고 } c^2 - a^2 - b^2 = 0$$

즉 $c^2 = a^2 + b^2$ 이므로 c 가 빗변인 직각 삼각형이다.

36. $x^4 + 4y^4 = (x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2)$ 을 이용하여 다음 식의 값을 구하면?

$$\frac{(11^4 + 324)(23^4 + 324)(35^4 + 324)(47^4 + 324)}{(5^4 + 324)(17^4 + 324)(29^4 + 324)(41^4 + 324)}$$

① 192

② 193

③ 194

④ 195

⑤ 196

해설

$$x^4 + 4y^4 = (x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2)$$

$$= \{(x - y)^2 + y^2\} \{(x + y)^2 + y^2\} \text{ 이고,}$$

$$324 = 4 \times 3^4 \text{ 이므로}$$

$$11^4 + 324 = (11^2 - 2 \times 11 \times 3 + 2 \times 3^2)(11^2 + 2 \times 11 \times 3 + 2 \times 3^2)$$

$$= \{(11 - 3)^2 + 3^2\} \{(11 + 3)^2 + 3^2\}$$

$$= (8^2 + 3^2)(14^2 + 3^2)$$

따라서 차례대로 모두 정리해 보면 주어진 식은

$$\frac{\{(8^2 + 3^2)(14^2 + 3^2)\} \{(20^2 + 3^2)(26^2 + 3^2)\}}{\{(2^2 + 3^2)(8^2 + 3^2)\} \{(14^2 + 3^2)(20^2 + 3^2)\}}$$

$$\frac{\{(32^2 + 3^2)(38^2 + 3^2)\} \{(44^2 + 3^2)(50^2 + 3^2)\}}{\{(26^2 + 3^2)(32^2 + 3^2)\} \{(38^2 + 3^2)(44^2 + 3^2)\}}$$

$$= \frac{50^2 + 3^2}{2^2 + 3^2} = \frac{2509}{13} = 193$$

37. $\frac{899^3 + 1}{899 \times 898 + 1}$ 의 양의 약수의 개수는?

- ① 27 개 ② 25 개 ③ 21 개 ④ 18 개 ⑤ 15 개

해설

$a = 899$ 라 치환하면

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \frac{a^3 + 1}{a(a-1) + 1} \\&= \frac{(a+1)(a^2 - a + 1)}{a^2 - a + 1} \\&= a + 1 = 900\end{aligned}$$

$$900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$$

$$\begin{aligned}\therefore 900 \text{의 약수의 개수} &= (2+1) \times (2+1) \times (2+1) \\&= 27\end{aligned}$$

38. 두 다항식 A, B 에 대하여 $\{A, B\} = A^2 + B^2 - AB$ 라 할 때, $\{x^2 + 1, 2x^2 - 3\} - 7$ 을 실수 범위에서 인수분해한다. 이 때, 인수가 아닌 것은?

① $x - \sqrt{2}$

② $x - 1$

③ x

④ $x + 1$

⑤ $x + \sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned}
 & \{x^2 + 1, 2x^2 - 3\} - 7 \\
 &= (x^2 + 1)^2 + (2x^2 - 3)^2 - (x^2 + 1)(2x^2 - 3) - 7 \\
 &= x^4 + 2x^2 + 1 + 4x^4 - 12x^2 + 9 - 2x^4 + x^2 + 3 - 7 \\
 &= 3x^4 - 9x^2 + 6 \\
 &= 3(x^4 - 3x^2 + 2) \\
 &= 3(x^2 - 1)(x^2 - 2) \\
 &= 3(x - 1)(x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})
 \end{aligned}$$

39. 두 다항식 $x^2 + 4x + 2k$ 와 $x^2 + 3x + k$ 의 최대공약수가 x 에 대한 일차식일 때, 상수 k 값들의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$A = x^2 + 4x + 2k$, $B = x^2 + 3x + k$ 라고 하면 $A - B = x + k$

$A - B$ 는 최대공약수 G 를 인수로 갖고,

주어진 조건에서 두 식의 최대공약수가 일차식이므로

두 식의 최대공약수는 $x + k$ 이다.

A , B 는 최대공약수 $x + k$ 를 인수로 가지므로

A 에 $x = -k$ 를 대입하면

$$k^2 - 2k = 0, k(k - 2) = 0$$

$$\therefore k = 0 \text{ 또는 } k = 2$$

따라서, k 값들의 합은 2이다.

40. 두 다항식 $x^2 + 3x + p$, $x^2 + px + q$ 의 최소공배수가 $x^3 - 13x + 12$ 일 때, $p + q$ 의 값은?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$x^3 - 13x + 12 = (x - 1)(x - 3)(x + 4)$ 두 다항식의 곱이 4차식이고 최소공배수가 3차식이므로 최대공약수는 1차식이다.

($\because AB = GL$)

i) G.C.M. = $x - 1$ 이면 $p = -4$, $q = 3$

이 때 두 식은 $(x - 1)(x + 4)$, $(x - 1)(x - 3)$ 이므로 조건에 맞는다.

ii) G.C.M. = $x - 3$ 이면 $p = -18$, $q = 45$

이 때 두 식은 $(x - 3)(x + 6)$, $(x - 3)(x - 15)$ 이므로 조건에 맞지 않는다.

iii) G.C.M. = $x + 4$ 일 때도 ii)와 같음

i), ii), iii)에서 $p + q = -1$

41. $(a+b)(b+c)(c+a) + abc$ 를 인수분해 하면?

① $(a+b)(ab+bc+ca)$

② $(b+c)(ab+bc+ca)$

③ $(a+b)(a+b+c)$

④ $(a+b+c)(ab+bc+ca)$

⑤ $(b+c)(a+b+c)$

해설

$a+b+c = k$ 라 하면

$$(\text{준식}) = (k-a)(k-b)(k-c) + abc$$

$$= k^3 - (a+b+c)k^2 + (ab+bc+ca)k - abc + abc$$

$$= k \{ k^2 - (a+b+c)k + (ab+bc+ca) \}$$

$$= (a+b+c)(ab+bc+ca) \quad (\because a+b+c = k)$$

42. $\frac{bx(a^2x^2 + 2a^2y^2 + b^2y^2)}{bx + ay} + \frac{ay(a^2x^2 + 2b^2x^2 + b^2y^2)}{bx + ay}$ 을 간단히 하면?

① $a^2x^2 + b^2y^2$

② $(ax + by)^2$

③ $(bx + ay)^2$

④ $2(a^2x^2 + b^2y^2)$

⑤ $(ax + by)(bx + ay)$

해설

$$\begin{aligned}
 (\text{분자}) &= bx(a^2x^2 + 2a^2y^2 + b^2y^2) + ay(a^2x^2 + 2b^2x^2 + b^2y^2) \\
 &= bx(a^2x^2 + b^2y^2) + 2a^2bxy^2 + ay(a^2x^2 + b^2y^2) + 2ab^2x^2y \\
 &= (a^2x^2 + b^2y^2)(bx + ay) + 2abxy(ay + bx) \\
 &= (bx + ay)(a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2) \\
 &= (bx + ay)(ax + by)^2
 \end{aligned}$$

따라서, (준 식) = $(ax + by)^2$

43. 다음 식 $(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$ 의 인수가 아닌 것은?

① $a + b$

② $b + c$

③ $c + a$

④ $b - a$

⑤ $-b - c$

해설

전개하여 a 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} & (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc \\ &= (b + c)a^2 + (b^2 + 2bc + c^2)a + bc(b + c) \\ &= (b + c) \{a^2 + (b + c)a + bc\} \\ &= (b + c)(a + b)(a + c) \\ &\therefore \text{④ } b - a \text{는 인수가 아니다} \end{aligned}$$

44. $-a^2(b-c) - b^2(c-a) - c^2(a-b)$ 을 인수분해했을 때, 각 인수들의 합이 될 수 없는 것은?

① $a + b$

② $2a - 2b$

③ $2b - 2a$

④ $2b - 2c$

⑤ 0

해설

a 에 대한 내림차순으로 정리한다.

$$\begin{aligned} & -a^2(b-c) - b^2(c-a) - c^2(a-b) \\ &= (c-b)a^2 - (c^2-b^2)a + bc^2 - b^2c \\ &= (c-b)a^2 - (c-b)(c+b)a + bc(c-b) \\ &= (c-b)\{a^2 - (c+b)a + bc\} \\ &= (c-b)(a-b)(a-c) \cdots \textcircled{㉠} \\ &= (a-b)(b-c)(c-a) \cdots \textcircled{㉡} \\ &= (b-c)(b-a)(a-c) \cdots \textcircled{㉢} \\ &= (c-a)(b-c)(b-a) \cdots \textcircled{㉣} \end{aligned}$$

㉠식 : 세항을 모두 더하면 $2a - 2b$

㉡식 : 세항을 모두 더하면 0

㉢식 : 세항을 모두 더하면 $2b - 2c$

㉣식 : 세항을 모두 더하면 $2b - 2a$

45. 다음 중 $\left(\frac{997}{1000}\right)^3 + \left(\frac{3}{1000}\right)^3 - 1$ 의 값과 같은 것은?

① $\frac{3^2 \times 997^3}{10}$

② $\frac{3^2 \times 997^6}{10}$

③ $-\frac{3^2 \times 997^3}{10}$

④ $-\frac{3^2 \times 997}{10^6}$

⑤ $-\frac{3^2 \times 997^9}{10}$

해설

주어진 식에서 $\frac{997}{1000}$ 과 $\frac{3}{1000}$ 을 더해보면 $\frac{997+3}{1000} = 1$ 이므로

$a = \frac{997}{1000}$, $b = \frac{3}{1000}$, $c = -1$ 이라 하면

$a + b + c = 0$ 이 된다.

따라서 $a + b + c = 0$ 이므로

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ 에서 $a^3+b^3+c^3 = 3abc$ 임을 이용하면

$$a^3 + b^3 + c^3 = \left(\frac{997}{1000}\right)^3 + \left(\frac{3}{1000}\right)^3 + (-1)^3 \text{의 값은}$$

$$3abc = 3 \times \frac{997}{1000} \times \frac{3}{1000} \times (-1) \text{와 같으므로}$$

구하는 값은

$$3 \times \frac{997}{1000} \times \frac{3}{1000} \times (-1) = -\frac{3^2 \times 997}{10^6}$$

46. $a - b = 2 - \sqrt{3}$, $b - c = 2 + \sqrt{3}$ 인 세 수 a , b , c 에 대하여 $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$ 의 값은?

① 4

② 3

③ 1

④ -2

⑤ -3

해설

$$a - b = 2 - \sqrt{3} \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$b - c = 2 + \sqrt{3} \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} \text{을 계산하면 } a - c = 4$$

$$a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$$

$$= a^2(b - c) + b^2c - b^2a + c^2a - c^2b$$

$$= a^2(b - c) - a(b^2 - c^2) + b^2c - c^2b$$

$$= a^2(b - c) - a(b + c)(b - c) + bc(b - c)$$

$$= (b - c)\{a^2 - a(b + c) + bc\}$$

$$= (b - c)(a - b)(a - c)$$

$$= (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) \cdot 4 = 4$$

47. 어느 회사의 A 공장과 B 공장에서는 각각 모니터와 스피커를 만들고 있다. 하루에 A 공장에서는 모니터를 400 대, B 공장에서는 스피커를 10000 대 만든다. 모니터는 20000 대, 스피커는 80000 대가 만들어지면 본사 창고로 운반한다. 두 제품이 같은 날 창고에 운반되면 인력이 부족하여 용역회사에서 인력을 구하여야 한다. 이 때, 용역회사에서 평일은 50,000 원, 주말에는 70,000 원을 지불한다. 2008년 4월 1일 목요일 처음으로 모니터를, 다음날 스피커를 운반하였다. 2008년 연말까지 용역회사에서 지불할 금액을 구하여라.

▶ 답 : 원

▷ 정답 : 390000 원

해설

4월 1일, 4월 2일 ... 을 각각 1, 2... 라 하면
12월 31일은 275이다.

모니터가 운반되는 날이 $5a + 1$ 이고

스피커가 운반되는 날이 $8b + 2$ 이면,

같은 날 창고에 운반 $\rightarrow 5a + 1 = 8b + 2$

$b = 5k + 1, 5k + 2, 5k + 3, 5k + 4$ 를 대입하면

$b = 5k + 3$ 일 때, 성립한다.

그러므로 같은날 운반되는 경우

$\rightarrow 40k + 26$ ($k = 0, 1, 2 \dots$) 이다.

금년에 같은 날 운반

26, 66, 106, 146, 186, 226, 266 이고,

이들 중 평일은 5일, 주말은 2일 이므로

$$(50000 \times 5) + (70000 \times 2) = 250000 + 140000 = 390000$$

48. 두 다항식 $f(x) = (x-1)(x+1)(x+2)$, $g(x) = 2x^3 - (a+2)x^2 - ax + 2a$ 의 최대공약수가 이차식이다. 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$g(1) = 0$ 이므로 $g(x)$ 는 $x-1$ 를 인수로 갖는다. 조립제법을 이용하면

1	2	$-(a+2)$	$-a$	$2a$
		2	$-a$	$-2a$
	2	$-a$	$-2a$	0

$$g(x) = (x-1)(2x^2 - ax - 2a)$$

$$f(x) = (x-1)(x+1)(x+2) \text{ 이므로}$$

최대공약수는 $(x-1)(x+1)$ 또는 $(x-1)(x+2)$

i) $(x-1)(x+1)$ 일 때

$$2(-1)^2 - a(-1) - 2a = 0 \text{ 에서 } a = 2$$

$$\therefore g(x) = 2(x-1)(x+1)(x-2)$$

ii) $(x-1)(x+2)$ 일 때

$$2(-1)^2 - a(-2) - 2a = 0 \rightarrow 0 \neq 0$$

i), ii) 에서

$$g(x) = 2(x-1)(x+1)(x-2) \text{ 이고 } a = 2$$

49. 다음 두 다항식 A, B 의 최대공약수가 이차식일 때, 상수 a, b 의 값의 곱 ab 를 구하면?

$$A = x^3 - ax - 2 \quad B = x^3 - 2x^2 + bx + 2$$

① -3

② -1

③ 0

④ 2

⑤ 4

해설

$$\begin{cases} A = x^3 - ax - 2 \\ B = x^3 - 2x^2 + bx + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = x(2x^2 - 2x - a + b) \\ A - B = 2x^2 - (a + b)x - 4 \end{cases}$$

A, B 의 최대공약수는 $A + B, A - B$ 의 최대공약수와 일치하고 x 는 A, B 의 공약수가 아니다.

$$\therefore 2x^2 - 2x - a + b = 2x^2 - (a + b)x - 4$$

$$\therefore a + b = 2, \quad -a + b = -4$$

$$\therefore a = 3, \quad b = -1$$

따라서, $ab = -3$

50. 다항식 $A(x) = x^3 + px^2 + 3x + 1$ 을 다항식 $B(x) = x^2 + qx + 3$ 으로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 하자. $B(x)$ 와 $R(x)$ 의 최대공약수가 $x - 1$ 일 때, $R(2)$ 의 값은?

① -6

② -4

③ 4

④ 6

⑤ 8

해설

$A = BQ + R$ 에서 A, B 의 $G.C.M.$ 과 B, R 의 $G.C.M.$ 은 일치한다.

($\Leftarrow$ Euclid 호제법)

그러므로 $x - 1$ 은 $A(x), B(x)$ 의 공약수이다.

$\therefore A(1) = 0$ 에서 $p = -5$,

$B(1) = 0$ 에서 $q = -4$

$$x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = (x^2 - 4x + 3)Q(x) + a(x - 1)$$

양변에 $x = 3$ 을 대입하면 $-8 = 2a \therefore a = -4$

$$\therefore R(x) = -4(x - 1) \quad \therefore R(2) = -4$$