

1. 다음 중 다항식 $a^3 - a^2b + ab^2 + ac^2 - b^3 - bc^2$ 의 인수인 것은?

① $a + c$

② $a - b^2$

③ $a^2 - b^2 + c^2$

④ $a^2 + b^2 + c^2$

⑤ $a^2 + b^2 - c^2$

해설

$$\begin{aligned} & a^3 - a^2b + ab^2 + ac^2 - b^3 - bc^2 \\ &= a^3 - b^3 + (a - b)c^2 - ab(a - b) \\ &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) + (a - b)c^2 - ab(a - b) \\ &= (a - b)(a^2 + ab + b^2 + c^2 - ab) \\ &= (a - b)(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

2. $(x^2 + x)(x^2 + x + 1) - 6$ 을 인수분해하면?

① $(x-1)(x+2)(x^2+x+3)$ ② $(x-1)(x+2)(x^2+x-3)$

③ $(x-2)(x+1)(x^2+x+3)$ ④ $(x-1)(x+2)(x^2-x+3)$

⑤ $(x+1)(x-2)(x^2-x+3)$

해설

$x^2 + x = X$ 라 하자.

$$(\text{준식}) = X(X+1) - 6$$

$$= X^2 + X - 6$$

$$= (X+3)(X-2)$$

$$= (x^2 + x + 3)(x^2 + x - 2)$$

$$= (x-1)(x+2)(x^2 + x + 3)$$

3. 다음 중 다항식 $x^4 - 5x^2 + 4$ 를 인수분해 할 때, 나타나는 인수가 아닌 것은?

① $x - 1$

② $x - 2$

③ $x - 3$

④ $x + 1$

⑤ $x + 2$

해설

$$\begin{aligned}x^4 - 5x^2 + 4 &= (x^2 - 1)(x^2 - 4) \\ &= (x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)\end{aligned}$$

4. $x^4 + 3x^2 + 4 = (x^2 + x + 2)(x^2 + ax + b)$ 일 때, 상수 a, b 의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\begin{aligned}(\text{좌 변}) &= (x^2 + 2)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)\end{aligned}$$

$$\therefore a = -1, b = 2$$

$$\therefore ab = -1 \times 2 = -2$$

5. 다음 중 다항식 $x^4 - 8x^2 - 9$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x - 3$

② $x + 3$

③ $x^2 + 1$

④ $x^2 + 9$

⑤ $x^3 + 3x^2 + x + 3$

해설

준 식을 인수분해 하면

$$x^4 - 8x^2 - 9 = (x^2 + 1)(x^2 - 9)$$

$$= (x^2 + 1)(x + 3)(x - 3)$$

$$\textcircled{5} \quad x^2(x + 3) + x + 3 = (x^2 + 1)(x + 3)$$

6. $x^3 - 4x^2 + x + 6$ 을 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x+c)$ 이다. $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ 이라 놓으면,

$x = -1$ 일 때, $-1 - 4 - 1 + 6 = 0$

따라서, $f(x)$ 는 $(x+1)$ 로 나누어 떨어진다.

즉, $f(x)$ 는 $(x+1)$ 의 인수를 갖는다.

즉, $f(x) = (x+1)Q(x)$ 몫

$Q(x)$ 는 조립제법으로 구한다.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\
 & & -1 & 5 & -6 \\
 \hline
 & 1 & -5 & 6 & 0
 \end{array}$$

$$f(x) = (x^2 - 5x + 6)(x+1)$$

$$\therefore f(x) = (x-3)(x-2)(x+1)$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = (-3)^2 + (-2)^2 + 1^2 = 14$$

7. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ 을 인수분해 하면?

① $(x+1)(x-2)(x+3)$

② $(x-1)(x+2)(x+3)$

③ $(x-1)(x-2)(x-3)$

④ $(x+1)(x+2)(x-3)$

⑤ $(x-1)(x-2)(x+3)$

해설

인수정리를 이용하면

$$f(1) = 0, f(2) = 0, f(3) = 0 \text{ 이므로}$$

$$(\text{준식}) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

8. x 에 대한 다항식 $x^3 - 2x^2 - x + 2$ 가 $(x+a)(x+b)(x+c)$ 로 인수분해될 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값은? (단, a, b, c 는 상수)

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)(x-1)(x-2)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (-1)^2 + 1^2 + 2^2 = 6$$

9. $(a+1)(a^2-a+1) = a^3+1$ 을 이용하여 $\frac{1999^3+1}{1998 \times 1999 + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2000

해설

$a = 1999$ 라 하면

$$1998 \times 1999 + 1 = (a-1)a + 1 = a^2 - a + 1$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1999^3 + 1}{1998 \times 1999 + 1} &= \frac{a^3 + 1}{a^2 - a + 1} \\ &= \frac{(a+1)(a^2 - a + 1)}{a^2 - a + 1} \\ &= a + 1 = 2000\end{aligned}$$

10. 두 다항식 $x^2 + ax + b$, $x^2 + 3bx + 2a$ 의 최대공약수가 $x - 1$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 2

② 1

③ 0

④ -1

⑤ -2

해설

최대공약수가 $x - 1$ 이므로

$x^2 + ax + b$ 와 $x^2 + 3bx + 2a$ 는

모두 $x - 1$ 로 나누어 떨어져야 한다.

$\therefore 1 + a + b = 0$ 이고 $1 + 3b + 2a = 0$

따라서, $a = -2$, $b = 1$

$\therefore a + b = -1$

11. $(x^2 + x)(x^2 + x - 8) + 12$ 를 인수분해 할 때, 다음 중 인수가 될 수 없는 것은?

① $x - 1$

② $x + 1$

③ $x - 2$

④ $x + 2$

⑤ $x + 3$

해설

$x^2 + x = A$ 로 놓으면 주어진 식은

$$A(A - 8) + 12 = A^2 - 8A + 12$$

$$= (A - 2)(A - 6)$$

$$\therefore (\text{준식}) = (x^2 + x - 2)(x^2 + x - 6)$$

$$= (x - 1)(x + 2)(x - 2)(x + 3)$$

12. 다항식 $(x-1)(x-3)(x+2)(x+4)+21$ 를 인수분해 하면?

① $(x^2 - x - 5)(x^2 + x - 9)$

② $(x^2 - x - 5)(x^2 - x - 9)$

③ $(x^2 + x + 5)(x^2 + x + 9)$

④ $(x^2 + x - 5)(x^2 + x - 9)$

⑤ $(x^2 - x + 5)(x^2 + x + 9)$

해설

$$(\text{준식}) = (x-1)(x+2)(x-3)(x+4) + 21$$

$$= (x^2 + x - 2)(x^2 + x - 12) + 21$$

$x^2 + x = A$ 로 치환하면,

$$(A-2)(A-12) + 21 = A^2 - 14A + 45$$

$$= (A-9)(A-5)$$

$$\therefore (x^2 + x - 9)(x^2 + x - 5)$$

13. x 에 대한 다항식 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + a$ 가 x 에 대한 완전제곱식으로 인수분해 될 때, 정수 a 의 값은?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + a \\ &= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + a\end{aligned}$$

$x^2 + 5x + 4 = Y$ 로 치환하면

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= Y(Y+2) + a \\ &= Y^2 + 2Y + a\end{aligned}$$

$\therefore$ 완전제곱식이 되려면 $a = 1$

14. $x^2 + xy - 2y^2 - 2x - y + 1$ 을 인수분해하면?

① $(x + y - 1)(x + 2y - 1)$

② $(x - y - 1)(x + 2y - 1)$

③ $(x - y + 1)(x + 2y - 1)$

④ $(x - y - 1)(x + 2y + 1)$

⑤ $(x + y + 1)(x + 2y - 1)$

해설

x 에 대한 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해한다.

$$x^2 + (y - 2)x - 2y^2 - y + 1$$

$$= \{x - (y + 1)\}\{x + (2y - 1)\}$$

$$= (x - y - 1)(x + 2y - 1)$$

15. 다음 중 $2x^2 - xy - y^2 - 4x + y + 2$ 의 인수인 것은?

① $2x + y - 2$

② $2x - y + 2$

③ $x - y + 1$

④ $x + y - 1$

⑤ $x - 2y - 1$

해설

x 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$2x^2 - (y + 4)x - y^2 + y + 2$$

$$= 2x^2 - (y + 4)x - (y + 1)(y - 2)$$

$$= \{2x + (y - 2)\}\{x - (y + 1)\}$$

$$= (2x + y - 2)(x - y - 1)$$

16. 다음 □안에 들어갈 식이 바르게 연결되지 않은 것은?

$$\begin{aligned}
 & a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) \\
 &= (b-c)a^2 - \boxed{\text{(가)}}a + \boxed{\text{(나)}}(b-c) \\
 &= \boxed{\text{(다)}} \{a^2 - \boxed{\text{(라)}}a + \boxed{\text{(나)}}\} \\
 &= (b-c)(a-b)\boxed{\text{(마)}}
 \end{aligned}$$

① (가) $(b^2 - c^2)$

② (나) bc

③ (다) $(b-c)$

④ (라) $(b+c)$

⑤ (마) $(c-a)$

해설

$$\begin{aligned}
 & a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) \\
 &= (b-c)a^2 + b^2c - ab^2 + c^2a - bc^2 \\
 &= (b-c)a^2 - \boxed{(b^2 - c^2)}a + \boxed{bc}(b-c) \\
 &= \boxed{(b-c)} \{a^2 - \boxed{(b+c)}a + \boxed{bc}\} \\
 &= (b-c)(a-b)\boxed{(a-c)}
 \end{aligned}$$

17. 다음 중 다항식 $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$ 의 인수가 아닌 것은?

① $a - b$

② $b - c$

③ $c - a$

④ $a + b + c$

⑤ $a - b + c$

해설

주어진 식을 a 에 관하여 정리하면

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= a^3(b-c) - a(b^3 - c^3) + bc(b^2 - c^2) \\&= (b-c)\{a^3 - a(b^2 + bc + c^2) + bc(b+c)\} \\&= (b-c)\{b^2(c-a) + b(c^2 - ca) - a(c^2 - a^2)\} \\&= (b-c)(c-a)(b^2 + bc - ac - a^2) \\&= (b-c)(c-a)\{c(b-a) + (b^2 - a^2)\} \\&= (b-c)(c-a)(b-a)(a+b+c)\end{aligned}$$

18. $x^6 + 4x^4 + x^2 - 6$ 이 $(x+a)(x+b)(x^2+c)(x^2+d)$ 로 인수분해 될 때,
 $a+b+c+d$ 의 값은?

① -5

② -2

③ 0

④ 3

⑤ 5

해설

조립제법을 이용한다.

$$x^6 + 4x^4 + x^2 - 6 = (x+1)(x-1)(x^4 + 5x^2 + 6)$$

$$= (x+1)(x-1)(x^2+2)(x^2+3)$$

$$\therefore a+b+c+d=5$$

19. $(2^{48} - 1)$ 은 60 과 70 사이의 어떤 두 수로 나누어 떨어진다. 이 두 수는?

① 61, 63

② 61, 65

③ 63, 65

④ 63, 67

⑤ 67, 69

해설

$$\begin{aligned} 2^{48} - 1 &= (2^6 - 1)(2^6 + 1)(2^{12} + 1)(2^{24} + 1) \\ &= 63 \cdot 65 \cdot (2^{12} + 1)(2^{24} + 1) \end{aligned}$$

따라서 $2^{48} - 1$ 은 63과 65로 나누어 떨어진다.

20. $10^2 - 9^2 + 8^2 - 7^2 + 6^2 - 5^2 + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$ 의 값을 구하면?

① 51

② 52

③ 53

④ 54

⑤ 55

해설

$$\begin{aligned} & (10 - 9)(10 + 9) + (8 - 7)(8 + 7) + (6 - 5)(6 + 5) \\ & + (4 - 3)(4 + 3) + (2 - 1)(2 + 1) \\ & = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 55 \end{aligned}$$

21. $x^4 + 2x^2 + 9 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ 로 인수분해될 때, $|ab - cd|$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (x^2 + 3)^2 - (2x)^2 \\ &= (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x + 3)\end{aligned}$$

여기서 계수를 비교하면

$$a = 2, b = 3, c = -2, d = 3$$

$$\therefore |ab - cd| = |2 \times 3 - (-2) \times 3| = 12$$

22. 다음 두 다항식 A, B 의 최대공약수를 G , 최소공배수를 L 이라 하자.

$\frac{L}{G} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ 일 때, $a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ 를 구하면?

$$A = (2x - 1)(x + 1)^2$$
$$B = (2x - 1)^2(x + 1)(x - 2)$$

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$A = (2x - 1)(x + 1)^2$$

$$B = (2x - 1)^2(x + 1)(x - 2) \text{ 이므로}$$

$$G = (2x - 1)(x + 1)$$

$$L = (2x - 1)^2(x + 1)^2(x - 2)$$

$$\frac{L}{G} = (2x - 1)(x + 1)(x - 2)$$

또 각 계수들의 합은 $x = 1$ 일 때이므로

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 \times 2 \times (-1) = -2$$

23. x 에 대한 두 다항식 $A = x^2 + 3x + k$, $B = x^2 + x - k$ 의 최대공약수가 일차식일 때, 상수 k 의 값은? (단, $k \neq 0$)

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$A - B = 2x + 2k = 2(x + k)$$

A , B 의 최대공약수는 $A - B$ 의 인수이므로

A , B 의 최대공약수를 G 라 하면

G 는 일차식이므로 $G = x + k$

$x + k$ 는 A 의 인수이어야 하므로

$$(-k)^2 + 3(-k) + k = 0$$

$$\therefore k = 0 \text{ 또는 } k = 2$$

그런데 주어진 조건에서 $k \neq 0$ 이므로 $k = 2$

24. x^2+ax-9 와 x^2+bx+c 의 합은 $2x^2-4x-6$, 최소공배수는 x^3-x^2-9x+9 이다. $a-b+c$ 의 값을 구하여라. (단, a, b, c 는 상수이다.)

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

$$A = x^2 + ax - 9 = Gp$$

$$B = x^2 + bx + c = Gq \text{라 하면}$$

$$A + B = (p + q)G = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x + 1)(x - 3)$$

$$L = pqG = x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^2(x - 1) - 9(x - 1)$$

$$= (x - 1)(x^2 - 9) = (x - 1)(x + 3)(x - 3)$$

따라서, $G = x - 3$, $p = x + 3$, $q = x - 1$ 이다.

$$\therefore A = (x + 3)(x - 3) = x^2 - 9$$

$$B = (x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$$

$$\therefore a = 0, b = -4, c = 3$$

$$\therefore a - b + c = 7$$

25. 최대공약수가 $x+1$ 이고, 최소공배수가 $x^3 + 2x^2 - x - 2$ 일 때, 이차항의 계수가 1 인 두 다항식의 합을 구하면?

① $2x^2 + 3x + 1$

② $x^2 + 3x + 1$

③ $2x^2 + 3x + 2$

④ $x^3 + 3x - 2$

⑤ $x^2 - x + 1$

해설

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x+1)(x-1)(x+2)$$

∴ 두 다항식은 $(x+1)(x-1)$, $(x+1)(x+2)$ 이다.

∴ 두 다항식의 합은 $2x^2 + 3x + 1$

26. 두 다항식 A, B 에 대하여 $A = x^2 + ax + 2$, $B = x^2 + bx + c$ 이고 A, B 의 최대공약수가 $x+1$, 최소공배수가 $x^3 + 2x^2 - x - 2$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -1

② 0

③ 2

④ -2

⑤ 3

해설

$A = m(x+1)$, $B = n(x+1)$ 이라 놓으면

$$mn(x+1) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

$$\therefore mn = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

$$\therefore m = x+2, n = x-1 \text{ 또는 } m = x-1, n = x+2$$

$$A = (x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$$

$$B = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$$

$$\text{여기서, } a = 3, b = 0, c = -1$$

$$\therefore a + b + c = 2$$

27. 최고차항의 계수가 1인 두 다항식 $f(x), g(x)$ 의 곱이 $x^3 + x^2 - 5x + 3$ 이고, 최소공배수가 $x^2 + 2x - 3$ 일 때, $f(2) + g(2)$ 의 값을 구하면?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$f(x)g(x) = (x-1)^2(x+3),$$

$$L = (x-1)(x+3) \text{ 이므로}$$

$$f(x) = (x-1), g(x) = (x-1)(x+3)$$

(또는 그 반대일 수 있으나 문제 의도상 상관없음)

$$\therefore f(2) + g(2) = 1 + 5 = 6$$

28. $\sqrt{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 + 1}$ 은 자연수이다. 이 때, 각 자리의 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x = 21$ 이라 하면

$$\begin{aligned} & \sqrt{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 + 1} \\ &= \sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3) + 1} \\ &= \sqrt{\{x(x+3)\}(x+1)(x+2) + 1} \\ &= \sqrt{(x^2+3x)(x^2+3x+2) + 1} \\ &= \sqrt{(x^2+3x)^2 + 2(x^2+3x) + 1} \\ &= \sqrt{\{(x^2+3x) + 1\}^2} \\ &= x^2 + 3x + 1 \quad (\because (x^2+3x) + 1 > 0) \\ &= 21^2 + 3 \cdot 21 + 1 = 505 \\ &\text{각자리 숫자의 합은 } 5 + 0 + 5 = 10 \end{aligned}$$

29. $a^2 - b^2 = 1$ 일 때, $\{(a+b)^n + (a-b)^n\}^2 - \{(a+b)^n - (a-b)^n\}^2$ 의 값은? (단, n 은 자연수)

① 2

② $2(a+b)^n$

③ 4

④ $4(a+b)^n$

⑤ $4(a-b)^n$

해설

$(A)^2 - (B)^2$ 형태이므로

합차공식을 사용하여 정리하면

$$(\text{준식}) = 4(a+b)^n(a-b)^n = 4(a^2 - b^2)^n = 4$$

30. $x^4 + 3x^2 + 4$ 를 바르게 인수분해한 것은?

① $(x^2 + x + 1)(x^2 - 2x + 1)$ ② $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - x + 2)$

③ $(x^2 - x + 2)(x^2 + x + 2)$ ④ $(x^2 + x - 1)(x^2 - 2x + 1)$

⑤ $(x^2 + x - 2)(x^2 + x + 2)$

해설

$$\begin{aligned}x^4 + 3x^2 + 4 &= (x^4 + 4x^2 + 4) - x^2 \\&= (x^2 + 2)^2 - x^2 \\&= (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)\end{aligned}$$

31. $2x^2 + xy - y^2 + 10x + 4y + 12$ 를 x, y 의 두 일차식의 곱으로 인수분해하면, $(x + ay + b)(2x + cy + d)$ 가 된다고 할 때, $a + b + c + d$ 의 값은? (단, a, b, c, d 는 상수)

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} & 2x^2 + xy - y^2 + 10x + 4y + 12 \quad (\leftarrow x \text{에 관하여 정리}) \\ &= 2x^2 + (y + 10)x - (y^2 - 4y - 12) \\ &= 2x^2 + (y + 10)x - (y + 2)(y - 6) \\ &= \{x + (y + 2)\}\{2x - (y - 6)\} \\ &= (x + y + 2)(2x - y + 6) \\ \therefore & a = 1, b = 2, c = -1, d = 6 \\ \therefore & a + b + c + d = 8 \end{aligned}$$

32. $xy(x-y) + yz(y-z) + zx(z-x)$ 을 인수분해하면?

① $-(x-y)(y-z)(z-x)$

② $-(x+y)(y-z)(z-x)$

③ $-(x-y)(y+z)(z-x)$

④ $-(x-y)(y-z)(z+x)$

⑤ $-(x-y)(y+z)(z+x)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= xy(x-y) + zx(z-x) + yz(y-z) \\&= yx^2 - y^2x + z^2x - zx^2 + yz(y-z) \\&= (y-z)x^2 - (y^2 - z^2)x + yz(y-z) \\&= (y-z)x^2 - (y+z)(y-z)x + yz(y-z) \\&= (y-z)\{x^2 - (y+z)x + yz\} \\&= (y-z)(x-y)(x-z) \\&= -(x-y)(y-z)(z-x)\end{aligned}$$

33. $a^2b^2(a-b) + b^2c^2(b-c) + c^2a^2(c-a)$ 를 인수분해 하였을 때, 다음 중 인수가 아닌 것은?

① $a-b$

② $b-c$

③ $c-a$

④ $a+b+c$

⑤ $ab+bc+ca$

해설

문자가 여러 개일 경우 동차식이면 어느 한 문자에 대하여 정리하고

차수가 다르면 차수가 낮은 문자에 대해 정리한다.

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준식}) &= a^3b^2 - a^2b^3 + b^3c^2 - b^2c^3 + c^3a^2 - c^2a^3 \\ &= (b^2 - c^2)a^3 - (b^3 - c^3)a^2 + b^2c^2(b - c) \\ &= (b - c)\{(b + c)a^3 - (b^2 + bc + c^2)a^2 + b^2c^2\} \\ &= (b - c)\{(c^2 - a^2)b^2 - a^2(c - a)b - a^2c(c - a)\} \\ &= (b - c)(c - a)\{(c + a)b^2 - a^2b - a^2c\} \\ &= (b - c)(c - a)\{(b^2 - a^2)c + ab(b - a)\} \\ &= (b - c)(c - a)(b - a)\{(b + a)c + ab\} \\ &= -(a - b)(b - c)(c - a)(ab + bc + ca) \end{aligned}$$

따라서 인수가 아닌 것은 ④이다.

34. x, y, z 가 삼각형의 세 변의 길이이고, $xz^2 - yz^2 + yx^2 + zx^2 - zy^2 - xy^2 = 0$ 을 만족할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① z 가 빗변인 직각삼각형

② x 가 빗변인 직각삼각형

③ $x = y$ 인 이등변삼각형

④ $y = z$ 인 이등변삼각형

⑤ $z = x$ 인 이등변삼각형

해설

$$xz^2 - yz^2 + yx^2 + zx^2 - zy^2 - xy^2 = 0$$

$$(x - y)z^2 + (x^2 - y^2)z + (x - y)xy = 0$$

$$(x - y)\{z^2 + (x + y)z + xy\} = 0$$

$$(x - y)(z + x)(z + y) = 0. \therefore x = y \quad (\because x, y, z \text{는 모두 양수})$$

$\therefore x = y$ 인 이등변삼각형

35. $\frac{899^3 + 1}{899 \times 898 + 1}$ 의 양의 약수의 개수는?

- ① 27 개 ② 25 개 ③ 21 개 ④ 18 개 ⑤ 15 개

해설

$a = 899$ 라 치환하면

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \frac{a^3 + 1}{a(a-1) + 1} \\&= \frac{(a+1)(a^2 - a + 1)}{a^2 - a + 1} \\&= a + 1 = 900\end{aligned}$$

$$900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$$

$$\begin{aligned}\therefore 900 \text{의 약수의 개수} &= (2+1) \times (2+1) \times (2+1) \\&= 27\end{aligned}$$

36. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \dots + 99^2$ 을 계산하여라.

① 99

② 100

③ 4950

④ 5050

⑤ 10000

해설

$$\begin{aligned} & 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \dots + 99^2 \\ &= 99^2 - 98^2 + 97^2 - 96^2 + \dots + 3^2 - 2^2 + 1^2 \\ &= (99^2 - 98^2) + (97^2 - 96^2) + \\ &\quad \dots + (3^2 - 2^2) + 1^2 \\ &= (99-98)(99+98) + (97-96)(97+96) + \dots + (3-2)(3+2) + 1 \\ &= (99+98) + (97+96) + \dots + (3+2) + 1 \\ &= 1 + 2 + 3 + \dots + 99 \\ &= (1+99) + (2+98) + \dots + (49+51) + 50 \\ &= 4950 \end{aligned}$$

37. $a-b=3$, $b-c=1$ 일 때, $ab^2 - a^2b + bc^2 - b^2c + ca^2 - c^2a$ 의 값은?

① -14

② -12

③ -8

④ -4

⑤ 0

해설

$$a-b=3 \quad \cdots \textcircled{\text{㉠}}, \quad b-c=1 \quad \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\textcircled{\text{㉠}} + \textcircled{\text{㉡}} \text{에 } \text{서 } a-c=4$$

$$\therefore ab^2 - a^2b + bc^2 - b^2c + ca^2 - c^2a$$

$$= ab(b-a) + c^2(b-a) - c(b^2 - a^2)$$

$$ab(b-a) + (b-a)\{c^2 - c(b+a)\}$$

$$= (b-a)(ab + c^2 - bc - ca)$$

$$= (b-a)\{a(b-c) + c(c-b)\}$$

$$= (b-a)(b-c)(a-c)$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)$$

$$= 3 \times 1 \times (-4) = -12$$

38. 세 개의 실수 a, b, c 에 대하여 $[a, b, c] = (a - b)(a - c)$ 라 할 때,
 $[a, b, c] + [b, c, a] + [c, a, b] = 0$ 이면 $[a, b, c]$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$(a - b)(a - c) + (b - c)(b - a) + (c - a)(c - b) = 0$$

전개하여 정리하면 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$$

$$\therefore a = b = c$$

$$\therefore [a, b, c] = (a - b)(a - c) = 0$$

39. 두 실수 a, b 에 대하여 $[a, b] = a^2 - b^2$ 라 할 때, $[x^2, x-1] + [2x+1, 3] + [0, 1]$ 을 인수분해하면 $(x-a)(x^3 + x^2 + bx + c)$ 이다. 이 때, 상수 a, b, c 의 합 $a+b+c$ 의 값은?

① 5

② 10

③ 15

④ 20

⑤ 25

해설

$$\begin{aligned} & [x^2, x-1] + [2x+1, 3] + [0, 1] \\ &= x^4 - (x-1)^2 + (2x+1)^2 - 9 + 0 - 1 \\ &= x^4 - x^2 + 2x - 1 + 4x^2 + 4x + 1 - 10 \\ &= x^4 + 3x^2 + 6x - 10 \\ &= (x-1)(x^3 + x^2 + 4x + 10) \\ &= (x-a)(x^3 + x^2 + bx + c) \end{aligned}$$

따라서, $a=1, b=4, c=10$ 이므로
 $a+b+c=15$

40. 두 다항식 $A = x^3 + x^2 + ax - 2$, $B = x^3 - x^2 - ax + 4$ 의 최대공약수가 일차식일 때, 상수 a 의 값은?

① 2

② 1

③ 0

④ -1

⑤ -2

해설

최대공약수를 $x - \alpha$ 라 하자.

나머지정리에 의해 $\alpha^3 + \alpha^2 + a\alpha - 2 = 0$

$$\alpha^3 - \alpha^2 - a\alpha + 4 = 0$$

두 식을 더하면 $2\alpha^3 = -2$, $\alpha = -1$

이제 $\alpha = -1$ 을 다시 A 식에 대입하면

$$-1 + (-1)^2 - a - 2 = 0 \quad \therefore a = -2$$

41. $(a+b)(b+c)(c+a) + abc$ 를 인수분해 하면?

① $(a+b)(ab+bc+ca)$

② $(b+c)(ab+bc+ca)$

③ $(a+b)(a+b+c)$

④ $(a+b+c)(ab+bc+ca)$

⑤ $(b+c)(a+b+c)$

해설

$a+b+c = k$ 라 하면

$$(\text{준식}) = (k-a)(k-b)(k-c) + abc$$

$$= k^3 - (a+b+c)k^2 + (ab+bc+ca)k - abc + abc$$

$$= k \{ k^2 - (a+b+c)k + (ab+bc+ca) \}$$

$$= (a+b+c)(ab+bc+ca) \quad (\because a+b+c = k)$$

42. $\frac{bx(a^2x^2 + 2a^2y^2 + b^2y^2)}{bx + ay} + \frac{ay(a^2x^2 + 2b^2x^2 + b^2y^2)}{bx + ay}$ 을 간단히 하면?

① $a^2x^2 + b^2y^2$

② $(ax + by)^2$

③ $(bx + ay)^2$

④ $2(a^2x^2 + b^2y^2)$

⑤ $(ax + by)(bx + ay)$

해설

$$\begin{aligned}
 (\text{분자}) &= bx(a^2x^2 + 2a^2y^2 + b^2y^2) + ay(a^2x^2 + 2b^2x^2 + b^2y^2) \\
 &= bx(a^2x^2 + b^2y^2) + 2a^2bxy^2 + ay(a^2x^2 + b^2y^2) + 2ab^2x^2y \\
 &= (a^2x^2 + b^2y^2)(bx + ay) + 2abxy(ay + bx) \\
 &= (bx + ay)(a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2) \\
 &= (bx + ay)(ax + by)^2
 \end{aligned}$$

따라서, (준 식) = $(ax + by)^2$

43. 다음 중에서 $2x^3 - (4a + 3)x^2 + 2(3a - 1)x + 4a$ 의 인수인 것은?

① $2x + 1$

② $x + 2$

③ $x + 2a$

④ $x + a$

⑤ $2x - 1$

해설

$$\begin{aligned} & 2x^3 - (4a + 3)x^2 + 2(3a - 1)x + 4a \\ &= 2x^3 - 4ax^2 - 3x^2 + 6ax - 2x + 4a \\ &= (2x^3 - 3x^2 - 2x) - 2a(2x^2 - 3x - 2) \\ &= x(2x^2 - 3x - 2) - 2a(2x^2 - 3x - 2) \\ &= (2x^3 - 3x - 2)(x - 2a) \\ &= (x - 2a)(2x + 1)(x - 2) \end{aligned}$$

44. 세 실수 a, b, c 사이에 $a^2 - bc = b^2 - ac = c^2 - ab$ 인 관계가 성립할 때, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 0, 2

④ 0, 1

⑤ 0, 1, 2

해설

$$a^2 - bc = b^2 - ac \text{ 에서 } (a^2 - b^2) + (ac - bc) = 0$$

$$\therefore (a + b + c)(a - b) = 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$b^2 - ac = c^2 - ab \text{ 에서 } (b^2 - c^2) + (ab - ac) = 0$$

$$\therefore (a + b + c)(b - c) = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 $a + b + c = 0$ 또는 $a = b = c$

$$\text{한편 } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \text{ 이므로}$$

$$\text{i) } a + b + c = 0 \text{ 일 때 } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

$$\text{ii) } a = b = c \text{ 일 때}$$

$$(\text{준식}) = 3a^3 - 3a^3 = 0$$

$$\text{따라서 } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

45. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c}$ 일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

㉠ 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형

㉡ 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형

㉢ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형

㉤ $a = b$ 인 이등변삼각형

㉥ $b = c$ 인 이등변삼각형

① 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형

② 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형

③ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형

④ $a = b$ 인 이등변삼각형

⑤ $b = c$ 인 이등변삼각형

해설

$$\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c} \text{ 에서}$$

$$(a-b+c)(a-b-c) = (a+b+c)(-a-b+c)$$

$$(a-b+c)(a-b-c) + (a+b+c)(a+b-c) = 0$$

$$\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\} + \{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\} = 0$$

$$(a-b)^2 - c^2 + (a+b)^2 - c^2 = 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 - c^2 + a^2 + 2ab + b^2 - c^2$$

$$= 2a^2 + 2b^2 - 2c^2$$

$$= 2(a^2 + b^2 - c^2) = 0$$

$$\therefore a^2 + b^2 - c^2 = 0$$

그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형이다.

46. x 에 대한 세 다항식 $f(x), g(x), h(x)$ 가 항등식 $(x-1)f(x) = xg(x) = (x+1)h(x)$ 를 만족한다. 이 때, $f(x), g(x), h(x)$ 의 최소공배수를 구하면?

① $f(x)$

② $xf(x)$

③ $x(x+1)f(x)$

④ $(x-1)f(x)$

⑤ $(x+1)(x-1)f(x)$

해설

$(x-1)f(x) = xg(x) = (x+1)h(x)$ 에서

① 다항식 $f(x)$ 에 대하여 $x = 0, -1$ 을 대입하면 $f(0) = f(-1) = 0$

② 다항식 $g(x)$ 에 대하여 $x = 1, -1$ 을 대입하면 $g(1) = g(-1) = 0$

③ 다항식 $h(x)$ 에 대하여 $x = 0, 1$ 을 대입하면 $h(0) = h(1) = 0$
①, ②, ③으로부터

$f(x), g(x), h(x)$ 의 최대공약수를 G 라 하면

$f(x) = x(x+1)G, g(x) = (x-1)(x+1)G, h(x) = x(x-1)G$

$\therefore f(x), g(x), h(x)$ 의 최소공배수는

$$x(x+1)(x-1)G = (x-1)f(x)$$

47. x 에 대한 두 다항식 $A = x(x - a - 4)(x + a^2 - 1)$, $B = (x + 3)(x + a)(x + a^2 - 5)$ 의 최대공약수가 x 에 대한 이차식이 되도록 하는 정수 a 에 대하여 $a^2 + a$ 의 값을 구하면?

① 20

② 16

③ 10

④ 5

⑤ 2

해설

i) A 의 인수 x 를 최대공약수의 인수라고 하면
 B 에서 $x = 0$ 을 대입하면

$$3a(a^2 - 5) = 0, a = 0 (\because a \text{가 정수})$$

$\Rightarrow$ 두 식의 최대공약수는 이차가 아니다.

ii) B 의 인수 $x + 3$ 이 최대공약수의 인수라고 하면
 A 에서 $x = -3$ 을 대입하면

$$-3(-a - 7)(a^2 - 4) = 0, a = -7, 2, -2$$

$a = -7, 2$ 일 때 A, B 의 최대공약수는 일차식

$a = -2$ 일 때

즉, $(x + 3)(x - 2)$ 가 최대공약수가 이차식이다.

$$\therefore a = -2, a^2 + a = 2$$

48. x^2 의 계수가 1인 세 이차식 A, B, C 가 다음 세 조건을 모두 만족할 때, 이차식 A 는?

㉠ A, B 의 최대공약수는 $x+1$ 이다.

㉡ B, C 의 최대공약수는 $x-2$ 이다.

㉢ A, C 의 최소공배수는 $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ 이다.

① $x^2 + 4x + 3$

② $x^2 - x - 2$

③ $x^2 + x - 6$

④ $x^2 + 5x + 6$

⑤ $x^2 + 2x - 3$

해설

A, B 의 최대공약수는 $x+1$ 이므로

$$A = a(x+1), B = b(x+1)$$

B, C 의 최대공약수는 $x-2$ 이므로

$$B = (x-2)(x+1), C = c(x-2)$$

A, C 의 최소공배수는

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+3)(x-2)(x+1)$$

따라서 A, C 의 최대공약수는 $(x+3)$ 이고

$$A = (x+3)(x+1) = x^2 + 4x + 3$$

49. 두 다항식 $x^3 + x^2 + x + 3 + m$, $x^2 - x + m$ 이 서로소가 아닐 때, 상수 m 의 값을 구하면?

① -1, 2

② -2, 3

③ -1, 2

④ -1, 3

⑤ -2, 2

해설

서로소가 아니라는 것은 일차이상의 공약수가 존재한다는 뜻이다.

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 3 + m \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$g(x) = x^2 - x + m \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

으로 놓으면

$$f(x) - g(x) = x^3 + 2x + 3 = (x+1)(x^2 - x + 3)$$

㉠과 ㉡이 서로소가 아니므로 ㉠과 ㉡의 최대공약수는 $x+1$ 또는 $x^2 - x + 3$ 이다.

(i) $x+1$ 이 최대공약수일 때, $m = -2$

(ii) $x^2 - x + 3$ 이 최대공약수일 때, 이 식과 $g(x)$ 는 서로 같아야 하므로 $m = 3$

(i), (ii)에서 $m = -2$ 또는 3

50. 다항식 $A(x) = x^3 + px^2 + 3x + 1$ 을 다항식 $B(x) = x^2 + qx + 3$ 으로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 하자. $B(x)$ 와 $R(x)$ 의 최대공약수가 $x - 1$ 일 때, $R(2)$ 의 값은?

① -6

② -4

③ 4

④ 6

⑤ 8

해설

$A = BQ + R$ 에서 A, B 의 $G.C.M.$ 과 B, R 의 $G.C.M.$ 은 일치한다.

($\Leftarrow$ Euclid 호제법)

그러므로 $x - 1$ 은 $A(x), B(x)$ 의 공약수이다.

$\therefore A(1) = 0$ 에서 $p = -5$,

$B(1) = 0$ 에서 $q = -4$

$$x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = (x^2 - 4x + 3)Q(x) + a(x - 1)$$

양변에 $x = 3$ 을 대입하면 $-8 = 2a \therefore a = -4$

$$\therefore R(x) = -4(x - 1) \quad \therefore R(2) = -4$$