1. 두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=x+2$에 대하여 $(f \circ g)(x)$를 구하면?

① $(f \circ g)(x)=(x+2)^2$

② $(f \circ g)(x)=x^2+2$

③ $(f \circ g)(x)=(x-2)^2$

④ $(f \circ g)(x)=x^2-2$

⑤ $(f \circ g)(x)=-x^2+2$

해설

두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=x+2$에 대하여
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+2) = (x+2)^2$

2. 함수 $f(x) = ax - 1$ 과 그 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 같도록 상수 a 의 값을 정하면?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

$y = f(x)$ 라 하면 $y = ax - 1$

이것을 x 에 대하여 정리하면 $ax = y + 1$

$\therefore\ f^{-1}(x) = \dfrac{1}{a}x + \dfrac{1}{a}$

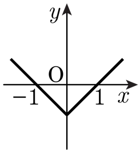
그런데 $f(x) = f^{-1}(x)$ 이고 모든 실수에 대하여 성립해야 하므로

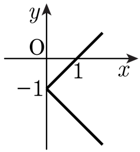
$\dfrac{1}{a}x + \dfrac{1}{a} = ax - 1$

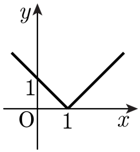
$\therefore\ \dfrac{1}{a} = a$ 이고 $\dfrac{1}{a} = -1$ 이어야 하므로

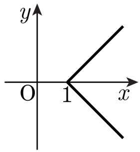
$\therefore\ a = -1$

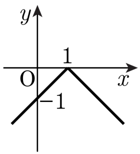
3. 다음 중 함수 $|y| = x - 1$ 의 그래프를 구하면?

①


②


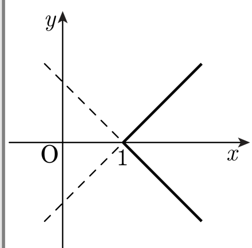
③


④


⑤


해설

$|y| = x - 1$ 에서
$y \geq 0$ 일 때,
$y = x - 1$
$y < 0$ 일 때,
$-y = x - 1,\ y = -x + 1$
따라서, 그래프는 다음
그림과 같다.



4. 함수 $f(x)=||x-2|-1|+k$ 에 대하여 $f(-1)=5$ 를 만족시킬 때, $f(5)$ 의 값을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$f(-1)=5$ 이므로

$f(-1)=||-1-2|-1|+k=2+k=5$

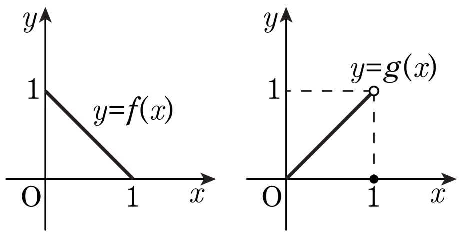
따라서 $k=3$ 이므로

$\therefore\ f(5)=||5-2|-1|+3=5$

5. 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 다음 성질을 만족시킨다.

Ⅰ. $f(x)$와 $g(x)$는 주기가 2인 주기함수이다. Ⅱ. 임의의 실수 x 에 대하여 $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$

함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프의 일부가 각각 다음과 같을 때, $f\left(g\left(-\frac{7}{3}\right)\right)$ 의 값을 구하면?



① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

Ⅱ. 에 의하여

$y=f(x)$ 의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고,

$y=g(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$$g\left(-\frac{7}{3}\right)=-g\left(\frac{7}{3}\right)=-g\left(2+\frac{1}{3}\right)$$
$$=-g\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}$$

($\because$ $-1<x<1$ 에서 $g(x)=x$) 이고

$0\le x\le 1$ 에서 $f(x)=-x+1$

따라서 $f\left(g\left(-\frac{7}{3}\right)\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)$

$$=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$$

6. 유리함수 $f(x) = \dfrac{ax}{3x+2}$ 와 그 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 서로 같을 때, 상수 a 의 값은?

① 3　　② 2　　③ 1　　④ -1　　⑤ -2

해설

역함수의 식은 $x = \dfrac{ay}{3y+2}$

$3xy + 2x = ay$

$\therefore y = \dfrac{-2x}{3x-a}$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{-2x}{3x-a}$

모든 실수 x 에 대하여

$f(x) = f^{-1}(x)$ 이므로

$\dfrac{ax}{3x+2} = \dfrac{-2x}{3x-a}$

$\therefore a = -2$

7. 0, 1, 2, 3, 4, 5 의 6 개의 숫자 중에서 서로 다른 4 개를 택하여 만들 수 있는 네 자리의 정수의 개수는?

① 120 ② 240 ③ 300 ④ 360 ⑤ 400

해설

0 이 포함되는 것과 안 되는 것을 구별하여 구한다.

1) 0 이 포함되는 것 : ${}_5C_3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 1 = 180$

2) 0 이 포함되지 않는 것 : ${}_5P_4 = 120$

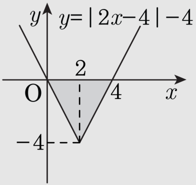
$\therefore 180 + 120 = 300$

8. 함수 $y = |2x-4|-4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설



절대값 기호 안을 0으로 하는 x의 값은

$2x-4=0$ 에서 $x=2$

(i) $x<2$ 일 때, $y=-(2x-4)-4=-2x$

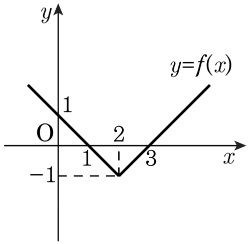
(ii) $x \geq 2$ 일 때, $y=(2x-4)-4=2x-8$

따라서 (i), (ii)에 의하여

함수 $y=|2x-4|-4$ 의 그래프는 그림과 같으므로

구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$

9. 함수 $f(x) =| x - 2 | -1$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고른 것은 무엇인가?



보기

㉠ $f(0) = 0$
㉡ $f(x) = 0$ 이면 $x = 1$ 또는 $x = 3$
㉢ $f(x) < 0$ 이면 $1 < x < 3$
㉣ $a < b < 2$ 이면 $f(a) > f(b)$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉡, ㉢ ③ ㉠, ㉡, ㉣
④ ㉡, ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

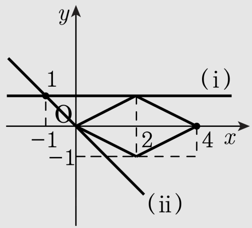
해설

㉠ $f(0) = 1$
㉡ $f(1) = 0,\ f(3) = 0$ 이므로
$f(x) = 0$ 이면 $x = 1$ 또는 $x = 3$
㉢ $f(x) < 0$ 이면 그래프가
x 축의 아래에 있는 구간이므로 $1 < x < 3$
㉣ $x < 2$ 는 그래프가 감소하는 구간이므로,
$a < b < 2$ 이면 $f(a) > f(b)$
따라서 옳은 것은 ㉡, ㉢, ㉣이다.

10. $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프와 직선 $y=mx+m+1$ 이 만나도록 하는 m 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설



함수 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는 $|x|+2|y|=2$ 의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때, $|x|+2|y|=2$ 의 그래프는 $x+2y=2$ 의 그래프에서 $x \geq 0$, $y \geq 0$ 인 부분을 각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한 것이고, 이를 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

직선 $y=mx+m+1$은 m의 값에 관계없이 점 $(-1,\ 1)$을 지나므로 두 그래프가 만나려면

(ⅰ) $m \leq 0$

(ⅱ) $y=mx+m+1$ 이 원점을 지날 때 $0=m+1$ 에서 $m=-1$ 이므로 $m \geq -1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 m 의 값의 범위는 $-1 \leq m \leq 0$

따라서 m 의 최댓값과 최솟값의 합은 -1 이다.

11. 0이 아닌 세 실수 x, y, z에 대하여 $\frac{x+y}{5}=\frac{y+z}{6}=\frac{z+x}{7}$를 만족할 때, $\frac{(x+y)^2-z^2}{x^2-y^2+z^2}$의 값을 구하면 $\frac{n}{m}$(m, n은 서로소인 정수)이다. $m+n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$\frac{x+y}{5}=\frac{y+z}{6}=\frac{z+x}{7}=k$ 라 하자

$\Rightarrow x+y=5k,\ y+z=6k,\ z+x=7k$

세 식을 모두 더하여 정리하면 $x+y+z=9k$

다시 식에 대입하면 $x=3k,\ y=2k,\ z=4k$

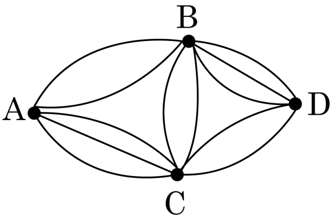
$$(\text{준식})=\frac{(x+y)^2-z^2}{x^2-y^2+z^2}$$

$$=\frac{25k^2-16k^2}{9k^2-4k^2+16k^2}=\frac{3}{7}$$

$\therefore m=7,\ n=3$

$\therefore m+n=10$

12. A, B, C, D 네 지점 사이에 오른쪽그림과 같은 도로망이 있다. A 에서 D 까지의 경로는 모두 몇 가지인가? (단, 동일 지점은 많아야 한번만 지난다.)



▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 38 가지

해설

A 에서 D 까지의 경로는

$A \to B \to D$ 의 경우 : $2 \times 3 = 6$ (가지)

$A \to C \to D$ 의 경우 : $3 \times 2 = 6$ (가지)

$A \to B \to C \to D$ 의 경우 :

$2 \times 2 \times 2 = 8$ (가지)

$A \to C \to B \to D$ 의 경우 :

$3 \times 2 \times 3 = 18$ (가지)

따라서 구하는 가지수는

$6 + 6 + 8 + 18 = 38$ (가지)

13. 10 원짜리 동전 5 개, 100 원짜리 동전 4 개, 1000 원짜리 지폐 1 장이 있을 때, 이들을 전부 또는 일부 사용하여 지불할 수 있는 금액은 몇 가지인지 구하여라.

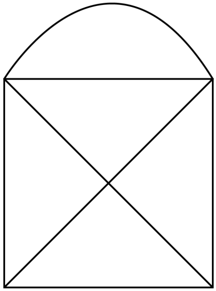
▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 59 가지

해설

10 원짜리 동전을 $0, 1, 2, 3, 4, 5$ 개 사용할 수 있고 이들 각각에 100 원짜리 동전을 $0, 1, 2, 3, 4$ 개 사용할 수 있고 여기에 1000 원짜리 지폐 $0, 1$ 개를 각각 사용할 수 있다.
그런데 10 원짜리 동전 0 개, 100 원짜리 동전 0 개, 1000 원자리 지폐 0 개를 동시에 사용하는 것은 의미가 없으므로 구하는 경우의 수는
$6 \times 5 \times 2 - 1 = 59$ (가지)

14. 다음 그림과 같이 다섯 개의 영역으로 나누어진 도형이 있다. 각 영역에 빨간색, 노란색, 파란색 중 한 가지 색을 칠하는데, 인접한 영역은 서로 다른 색을 칠하여 구별하려고 한다. 칠할 수 있는 방법의 수를 구하여라.

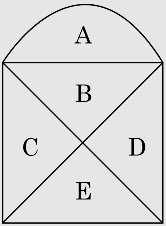


▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 36 가지

해설

경우의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.



그림에서 A , B 영역에 칠할 수 있는 색은 각각 3 가지, 2 가지이다.

ⅰ) C , D 영역에 같은 색을 칠하고 E 영역을 칠하는 경우 : 2×2 가지

ⅱ) C , D 영역에 다른 색을 칠하고 E 영역을 칠하는 경우 : 2×1 가지

$\therefore 3 \times 2 \times (2 \times 2 + 2 \times 1) = 36$

15. 0, 1, 2, 3, 4, 5 의 6 개의 숫자를 한번씩 사용하여 네 자리의 정수를 만들 때, 양 끝이 홀수인 자연수의 개수를 구하면?

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 72 개

해설

양 끝이 홀수이므로 1, 3, 5 중 2 개를 배열하는 경우의 수는

${}_3P_2 = 6$

두 홀수를 제외한 나머지 4 개의 숫자를 배열하는 경우의 수는

${}_4P_2 = 12$

따라서 $6 \times 12 = 72$

16. 15 명의 학생을 5 명, 5 명, 5 명의 3개조로 나누는 모든 방법의 수를 구하여라.

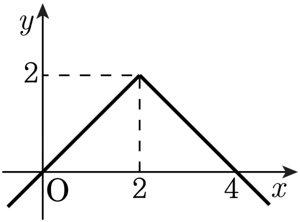
▶ **답 :** ________ 가지

▷ **정답 :** 126126 가지

해설

$$ {}_{15}C_5 \times {}_{10}C_5 \times {}_5C_5 \times \frac{1}{3!} $$

17. $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는?



① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개

④ 4 개 ⑤ 무수히 많다.

해설

$$f(x)=\begin{cases} y=x(x\le 2) & \cdots ㉠ \\ y=-x+4(x>2) & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서는 $(f \circ f)(x)=f(f(x))=f(x)=x$

$\therefore x=1$

㉡에서는 $(f \circ f)(x)=f(f(x))=f(-x+4)$

$=-x+4$

$\therefore x=3$

실근의 개수 : 2 개.

18. $f(x)=x^2-4x+1\ (x\geq 2)$, $g(x)=2x-6$ 에 대하여 $(f\circ(g\circ f)^{-1})(4)$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$g(5)=4$이므로 $g^{-1}(4)=5$

$$\begin{aligned}(f\circ(g\circ f)^{-1})(4)&=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1})(4)\\&=g^{-1}(4)\\&=5\end{aligned}$$

19. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 6(x \geq 2)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구했을 때, 옳은 것은 무엇인가?

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ $\sqrt{3}$　　④ 2　　⑤ $\sqrt{5}$

해설

$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점은
$y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.
$x^2 - 4x + 6 = x$ 에서
$x^2 - 5x + 6 = 0, (x-2)(x-3) = 0$
$\therefore x = 2$ 또는 $x = 3$
따라서 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의
두 교점은 $(2, 2), (3, 3)$ 이고,
이 두 교점 사이의 거리는
$\sqrt{(3-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$

해설

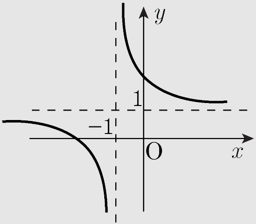
$x^2 - 4x + 6 = x$,
즉 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = 5, \alpha\beta = 6$
따라서 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의
그래프의 두 교점은 $(\alpha, \alpha), (\beta, \beta)$ 사이의 거리는
$\sqrt{(\alpha-\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2} = \sqrt{2}\sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}$
$= \sqrt{2}\sqrt{5^2 - 4 \cdot 6} = \sqrt{2}$

20. 분수함수 $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ 의 정의역이 $\{x \mid -1<x\le 1\}$ 일 때, 다음 중 치역을 바르게 구한 것은?

① $\{y \mid y<2\}$　② $\{y \mid y\le 2\}$　③ $\{y \mid y\le -2\}$
④ $\{y \mid y\ge 2\}$　⑤ $\{y \mid y\ge -2\}$

해설

$$y=\frac{x+3}{x+1}=\frac{(x+1)+2}{x+1}=1+\frac{2}{x+1}$$



$x=1$ 일 때, $y=\dfrac{1+3}{1+1}=2$ 이므로,

치역은 $\{y \mid y\ge 2\}$

21. 두 실수 x, y 가 $x+y=-1$, $xy=2$을 만족할 때, $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{\sqrt{2}}i$ ② $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ③ $\frac{1}{2}i$ ④ $-\frac{1}{2}i$ ⑤ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

해설

$x+y=-1,\ xy=2 \Rightarrow x<0,\ y<0$

$$\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\ (\because\ x<0,\ y<0)$$

$$=\frac{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2}{\sqrt{y}\sqrt{x}}=\frac{x+y}{-\sqrt{xy}}=\frac{-1}{-\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

22. A 지역에는 세 곳, B 지역에는 네 곳, C 지역에는 다섯 곳, D 지역에는 여섯 곳의 관광지가 있다. 이 중에서 세 곳을 선택하여 관광하려고 할 때, 선택한 세 곳이 모두 같은 지역이 되는 경우의 수는?

① 20　② 25　③ 30　④ 35　⑤ 40

해설

(i) 선택한 세 곳이 모두 A 지역일 경우 : 1 (가지)

(ii) 선택한 세 곳이 모두 B 지역일 경우 :

이는 B 지역의 네 곳 중 세 곳을 선택한 경우와 같다.

${}_4C_3 = 4$ (가지)

(iii) 선택한 세 곳이 모두 C 지역일 경우 :

위와 같은 방법으로 ${}_5C_3 = 10$ (가지)

(iv) 선택한 세 곳이 모두 D 지역일 경우 :

위와 같은 방법으로 ${}_6C_3 = 20$ (가지)

따라서, (i), (ii), (iii), (iv)에 의하여

$1 + 4 + 10 + 20 = 35$ (가지)

23. $\frac{1}{2} < \frac{17}{a} < 1$을 만족하고, 기약분수 $\frac{17}{a}$이 유한소수가 되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은?

① 25 ② 32 ③ 77 ④ 85 ⑤ 100

해설

$\frac{1}{2} < \frac{17}{a} < 1$에서

$\frac{17}{34} < \frac{17}{a} < \frac{17}{17}$이므로

$17 < a < 34$

이 중에서 $\frac{17}{a}$가 유한소수가 되게하는 정수는

20, 25, 32이므로

$20 + 25 + 32 = 77$

24. $f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2x-1}{x+1}$ 을 만족하는 함수 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프의 점근선이 $x=a$, $y=b$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=-1$

해설

$f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2x-1}{x+1}\cdots$ ①에서

x대신 $\frac{1}{x}$을 대입하면

$f\left(\frac{1}{x}\right)-2f(x)=\frac{-x+2}{x+1}\cdots$ ②

① $+2\times$② $\Rightarrow -f(x)=\frac{1}{x+1}$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{x+1}$

점근선 $x=-1$, $y=0$

$\therefore a+b=-1$

25. $a = \sqrt{10 - 8\sqrt{3 - \sqrt{8}}}$에 대하여 $f(x) = [x], g(x) = x - [x]$일 때, $\dfrac{14}{f(a)+g(a)} - \dfrac{2}{g(a)}$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 2　　② $2+\sqrt{2}$　　③ $\dfrac{7}{2}$

④ 4　　⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$a = \sqrt{10 - 8\sqrt{3 - \sqrt{8}}} = \sqrt{10 - 8\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}$

$= \sqrt{10 - 8(\sqrt{2} - 1)} = \sqrt{18 - 8\sqrt{2}}$

$= \sqrt{18 - 2\sqrt{32}}$

$\therefore a = 4 - \sqrt{2} = 2.\times\times\times$

$[a] = 2,\ f(a) = [a] = 2$

$g(a) = a - [a] = 4 - \sqrt{2} - 2 = 2 - \sqrt{2}$

$\therefore \dfrac{14}{f(a)+g(a)} - \dfrac{2}{g(a)} = \dfrac{14}{4-\sqrt{2}} - \dfrac{2}{2-\sqrt{2}} = 2$