

1. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{p, q, r, s\}$ 가 있다. X 에서 Y 로의 함수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답: 64개

해설

$a \rightarrow \square$, $b \rightarrow \square$, $c \rightarrow \square$

Y 의 원소 p, q, r, s 에서 세 개를 뽑아 위 $\square$ 안에
늘어 놓는 방법의 수를 구하는 것이다.

이 때 세 개의 수는 모두 같거나,
두 개만 같거나 모두 달라도 좋다.

따라서 a 에는 p, q, r, s 의 4가지,
 b 에는 a 에 온 수가 와도 좋으므로 역시 4가지,
마찬가지로 c 에는 a, b 에 온 수가
와도 좋으므로 4가지씩이 있다.

$$\therefore 4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64(\text{개})$$

2. 두 함수 $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 4x + a$ 에 대하여 $(g \circ f)(x) = 12x + 7$ 이 성립할 때, 상수 a 의 값은?

① -3

② -1

③ 1

④ 3

⑤ 5

해설

$f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 4x + a$ 이므로

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 1)$$

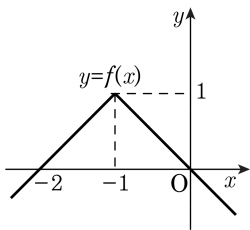
$$= 4(3x + 1) + a$$

$$= 12x + 4 + a$$

따라서 $12x + 4 + a = 12x + 7$ 에서 $4 + a = 7$

$$\therefore a = 3$$

3. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프의 관계식을 구하면?



① $y = |x - 1| - 1$

② $y = |x + 1| - 1$

③ $y = |x - 1| + 1$

④ $y = -|x + 1| + 1$

⑤ $y = -|x + 1| - 1$

해설

주어진 그래프는 함수 $y = -|x|$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 -1 만큼,

y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로

$y = -|x|$ 에 x 대신 $x + 1$,

y 대신 $y - 1$ 을 대입하면 $y - 1 = -|x + 1|$

즉, $f(x) = -|x + 1| + 1$ 이므로 $y = -|x + 1| + 1$

4. 다음 함수 중 좌표평면에서 그 그래프가 임의의 직선과 항상 만나는 것은 무엇인가?

① $y = |x|$

② $y = x^2$

③ $y = \sqrt{x}$

④ $y = x^3$

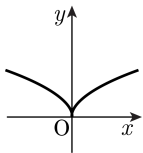
⑤ $y = \frac{1}{x}$

해설

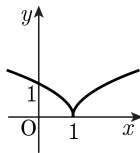
각 함수의 그래프를 그려보거나,
정의역, 치역 관계를 조사해 보면 쉽게 알 수 있다.
 x, y 전체 실수 구간에서 그래프가
그려지는 함수는 $y = x^3$ 뿐이다.

5. 다음 중 함수 $y = \sqrt{|x+1|}$ 의 그래프를 구하면?

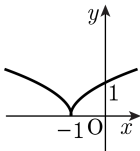
①



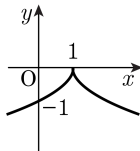
②



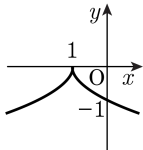
③



④



⑤



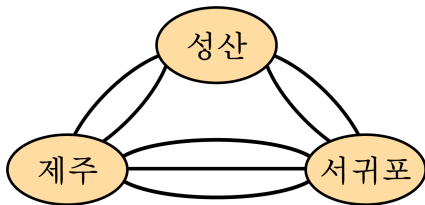
해설

$x \geq -1$ 이면 $y = \sqrt{x+1}$

$x < -1$ 이면 $y = \sqrt{-x-1}$ 이므로

3번이 정답임.

6. 다음 그림과 같이 제주와 성산을 잇는 길은 2 개, 성산과 서귀포를 잇는 길은 2 개가 있고, 제주와 서귀포를 잇는 길은 3 개가 있다. 제주에서 서귀포로 갔다가 다시 제주로 돌아올 때, 갈 때는 성산을 거치고, 올 때는 성산을 거치지 않고 오는 방법의 수는?



① 6

② 8

③ 9

④ 12

⑤ 15

해설

$$(2 \times 2) \times 3 = 12$$

∴ 12 가지

7. 남학생 4 명과 여학생 2 명을 일렬로 세울 때, 여학생끼리 이웃하여서는 방법은 몇 가지인가?

① 60 가지

② 120 가지

③ 180 가지

④ 240 가지

⑤ 300 가지

해설

4 명의 남학생과 2 명의 여학생 중에서 여학생 2 명을 한 묶음으로 생각하여 5 명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5!$ 이고, 묶음 안에서 여학생 2 명이 자리를 바꾸는 방법의 수가 2 이므로, 구하는 경우의 수는, $5! \times 2 = 240$ (가지) 이다.

8. 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않은 7 개의 점이 있을 때, 점을 연결하여 만들 수 있는 직선의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 21개

해설

$${}_7C_2 = 21$$

9. $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $g(x) = x+1$ 일 때 $(f \circ g^{-1})(x)$ 를 구하면?

① $(f \circ g^{-1})(x) = \frac{1}{x+2}$

② $(f \circ g^{-1})(x) = \frac{1}{x-2}$

③ $(f \circ g^{-1})(x) = \frac{1}{x-3}$

④ $(f \circ g^{-1})(x) = \frac{1}{x-4}$

⑤ $(f \circ g^{-1})(x) = \frac{1}{x+3}$

해설

$g(x) = x+1$ 에서 $g^{-1}(x)$ 를 구하면

$$y = x+1, x = y-1$$

$$\therefore g^{-1}(x) = x-1$$

$$(f \circ g^{-1})(x)$$

$$= f(x-1)$$

$$= \frac{1}{(x-1)-1} = \frac{1}{x-2}$$

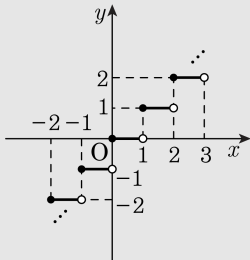
$$\therefore (f \circ g^{-1})(x) = \frac{1}{x-2}$$

10. 다음 중 옳지 않은 것을 고르면? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

- ① $y = [x]$ 의 그래프는 함수의 그래프이다.
- ② $y = [x]$ 의 정의역이 모든 실수일 때, 치역은 정수 전체의 집합이다.
- ③ $x = 2.1$ 이면 $[x] = 2$ 이다.
- ④ $x = -1.8$ 이면 $[x] = -2$ 이다.
- ⑤ $y = [x]$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

해설

$y = [x]$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로



$y = [x]$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이 아니다.

11. 다음 중 평행이동에 의하여 그 그래프를 $y = \frac{1}{x}$ 과 겹칠 수 없는 것은?

① $y = \frac{-x}{x+1}$

② $y = \frac{x}{x-1}$

③ $y = \frac{2x+1}{2x-1}$

④ $y = \frac{x-1}{x}$

⑤ $y = \frac{2x-5}{x-3}$

해설

① $y = \frac{-(x+1)+1}{x+1} = \frac{1}{x+1} - 1$

② $y = \frac{(x-1)+1}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 1$

③ $y = \frac{(2x-1)+2}{2x-1} = \frac{1}{x-\frac{1}{2}} + 1$

④ $y = \frac{x-1}{x} = -\frac{1}{x} + 1$

⑤ $y = \frac{2x-5}{x-3} = \frac{2(x-3)+1}{x-3} = \frac{1}{x-3} + 2$

따라서 $y = \frac{1}{x-p} + q$ 의 꼴이 아닌 것은 ④이다.

12. $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ 의 소수 부분을 b 라 할 때, $\frac{b^2}{2} + \frac{2}{b^2}$ 의 값은?

① 6

② 5

③ 4

④ 3

⑤ 2

해설

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = 3 + \sqrt{3}$$

$$\sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4}, 1 < \sqrt{3} < 2 \text{에서}$$

$$4 < 3 + \sqrt{3} < 5$$

$$\therefore 3 + \sqrt{3} = 4 + b$$

$$\therefore b = \sqrt{3} - 1$$

$$\therefore \frac{b^2}{2} + \frac{2}{b^2} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} + \frac{2}{(\sqrt{3}-1)^2}$$

$$= \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{4 - 2\sqrt{3}}$$

$$= 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4$$

13. $y = -\sqrt{4-2x} + 1$ 의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① 정의역은 $\{x \mid x \leq 2\}$ 이다.

② 치역은 $\{y \mid y \leq 1\}$ 이다.

③ 평행이동하면 $y = -\sqrt{2x}$ 와 겹쳐진다.

④ 그래프는 제 2사분면을 지나지 않는다.

⑤ 이 그래프는 x 축과 점 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 에서 만난다.

해설

③ 평행이동하면 $y = -\sqrt{-2x}$ 와 겹쳐진다.

④, ⑤ 꼭지점이 $(2, 1)$ 이고 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 을 지난다.

$\therefore 1, 3, 4$, 분면을 지난다.

14. 540의 양의 약수의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1680

해설

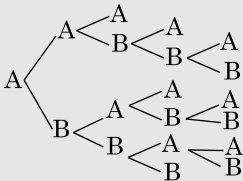
$$\begin{aligned} & (1 + 2 + 2^2)(1 + 3 + 3^2 + 3^3)(1 + 5) \\ &= 7 \times 40 \times 6 = 1680 \end{aligned}$$

15. A, B 두 사람이 테니스 경기를 하는데, 경기는 5세트 중 3세트 이기는 쪽이 승리한다. A가 먼저 1승을 거둔 상태에서 승부가 결정될 때까지 일어날 수 있는 모든 경우의 수는?

▶ 답: 가지

▷ 정답: 10가지

해설



16. 5000 원 짜리 지폐가 2장, 1000 원짜리 지폐가 3장, 500 원짜리 동전이 4개 있다. 이 동전의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 방법의 수를 구하여라.

▶ 답: 가지

▷ 정답: 59 가지

해설

5000 원짜리 지폐를 지불하는 방법의 수는 3가지
1000 원짜리 지폐를 지불하는 방법의 수는 4가지
500 원짜리 동전을 지불하는 방법의 수는 5가지
이때 지불하지 않는 경우가 1가지이므로
구하는 방법의 수는 $3 \times 4 \times 5 - 1 = 59$

17. 다음 그림과 같이 모양이 서로 다른 세 개의 주머니에 1, 2, 3 이 적힌 세 개의 구슬이 들어 있다.



이 세 주머니에서 각각 한 개의 구슬을 꺼낼 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ㉠ 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 모두 같은 경우의 수는 3 개이다.
 ㉡ 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 모두 다른 경우의 수는 6 개이다.
 ㉢ 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 2 개가 같은 경우의 수는 18 개이다.

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

- ㉠ 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 모두 같은 경우는
 (1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3) 즉, 3 개 (참)
 ㉡ 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 모두 다른 경우의 수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$ (참)
 ㉢ 세 개의 주머니에서 각각 한 개의 구슬을 꺼내는 경우의 수는 $3 \times 3 \times 3 = 3^3$ 이므로 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 2 개가 같은 경우의 수는, $27 - 3 - 6 = 18$ (참)
 따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢

18. 함수 $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = x^3$ 의 해의 합을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$= \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{\frac{x}{x-1}}{x-1} - 1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x-x+1}{x-1}} = x$$

$$\therefore x^3 = x, x^3 - x = 0, x(x-1)(x+1) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ or } 0 \text{ or } 1$$

그런데 $x \neq 1$ 이므로 $x = -1 \text{ or } 0$

$$\therefore -1 + 0 = -1$$

19. $f(x) = 3x + 2$ 에서 $g(x)$ 가 $(g \circ f)^{-1}(x) = 3x$ 를 만족시킨다고 할 때, $g(2)$ 의 값은?

① 1

② 0

③ $\frac{1}{3}$

④ 3

⑤ 6

해설

$$(g \circ f)^{-1}(x) = 3x \text{ 이므로 } (g \circ f)(3x) = x$$

$$3x = t \text{ 로 치환하면 } x = \frac{1}{3}t \Rightarrow (g \circ f)(t) = \frac{1}{3}t$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 2) = \frac{1}{3}x$$

$$3x + 2 = 2 \text{ 일 때 } x = 0$$

$$\therefore g(2) = 0$$

20. 두 함수 $y = |x + 1| - |x - 2|$, $y = mx$ 의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나도록 상수 m 의 값을 정할 때, 다음 중 m 의 값이 될 수 있는 것을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$y = |x + 1| - |x - 2|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$$y = -(x + 1) - (-x + 2) = -3$$

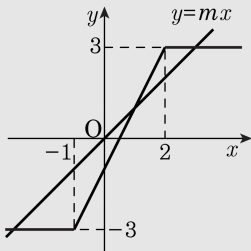
ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때

$$y = (x + 1) - (-x + 2) = 2x - 1$$

iii) $x \geq 2$ 일 때

$$y = (x + 1) - (x - 2) = 3$$

i) ii) iii)에서 $y = mx$ 와 서로 다른 세 점에서 만나기 위해서는 $0 < m < \frac{3}{2}$ 따라서 m 의 값이 될 수 있는 것은 ④번이다.



21. 함수 $f_1(x) = \frac{2x+3}{-x-1}$ 에 대하여 $f_{n+1} = f_1 \circ f_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 이라 할 때, $f_{100}(1)$ 의 값은?

① -1

② $-\frac{5}{2}$

③ $-\frac{4}{3}$

④ 1

⑤ 2

해설

$$f_1(x) = \frac{2x+3}{-x-1} \text{ 에서 } f_1(1) = -\frac{5}{2}$$

$$f_2(1) = (f_1 \circ f_1)(1) = f_1\left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$= \frac{-\frac{10}{2} + 3}{\frac{5}{2} - 1} = -\frac{4}{3}$$

$$f_3(1) = (f_1 \circ f_2)(1) = f_1\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{-\frac{8}{3} + 3}{\frac{4}{3} - 1} = 1$$

$$f_4(1) = (f_1 \circ f_3)(1) = f_1(1) = -\frac{5}{2}$$

$$\therefore f_4 = f_1, f_5 = f_2, f_6 = f_3, \dots$$

$$\therefore f_{3n+1} = f_1, f_{3n+2} = f_2, f_{3n} = f_3$$

$$100 = 3 \times 33 + 1 \text{ 이므로}$$

$$\therefore f_{100}(1) = f_1(1) = -\frac{5}{2}$$

22. 10 개의 직선이 있다. 이 중 3 개는 서로 평행하다. 그리고 어느 3 개도 같은 점에서 만나지 않는다. 이들 직선으로 만들어지는 삼각형의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 98 개

해설

삼각형은 세 개의 직선으로 결정되므로 10 개의 직선에서 3 개의 직선을 뽑을 경우의 수는 ${}_{10}C_3$ 가지이다. 이 중에서 평행한 세 개의 직선을 뽑거나, 평행한 두 개의 직선과 나머지 7 개의 직선 중에서 한 개의 직선을 뽑는 경우는 삼각형이 만들어 질 수 없다. 이런 경우의 수는 ${}_3C_3 + {}_3C_2 \times {}_7C_1$ 가지이다.
따라서 삼각형의 개수는

$${}_{10}C_3 - ({}_3C_3 + {}_3C_2 \times {}_7C_1) = 98 \text{ (개)}$$

23. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f(x)$ 는 우함수, $g(x)$ 는 기함수이고, $f(4) = 1$, $g(1) = -3$ 일 때, $f(-4) + g(-1)$ 의 값은?

① -4

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 4

해설

$f(x)$ 는 우함수이므로 $f(-4) = f(4) = 1$ $g(x)$ 는 기함수이므로

$$g(-1) = -g(1) = 3$$

$$\therefore f(-4) + g(-1) = 1 + 3 = 4$$

24. 세 상자 P, Q, R에 들어 있는 구슬의 개수의 비가 처음에는 2 : 3 : 4였다. 전체 구슬의 개수는 변함없이 각 상자에서 구슬을 꺼내 다른 상자에 넣는 시행을 반복한 후, P, Q, R에 들어 있는 구슬의 개수의 비를 구했더니 3 : 2 : 5가 되었다. P상자에 들어 있는 구슬의 개수가 처음보다 7개가 늘었다면 R상자에 들어있는 구슬의 개수의 변화는?

- ① 처음보다 7개 줄었다. ② 처음보다 6개 줄었다.
 ③ 개수의 변화가 없다. ④ 처음보다 5개 늘었다.
 ⑤ 처음보다 8개 늘었다.

해설

전체 구슬의 개수를 x 라 하면 조건에서
 P상자의 구슬이 7개 늘었으므로

$$\frac{3x}{10} - \frac{2x}{9} = 7$$

$$\therefore x = 90 \text{ (개)}$$

따라서 R 상자의 구슬의 개수는 시행 전

$$: 4 \times \frac{90}{9} = 40 \text{ (개)}$$

$$\text{시행 후} : 5 \times \frac{90}{10} = 45 \text{ (개) 이므로}$$

시행 후에 처음보다 5개가 늘었다.

25. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 8$ 일 때, $x^2 + \sqrt{6}x$ 의 값은? (단, $0 < x < 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 + \frac{1}{x^2} = 8$ 의 양변에 x^2 을 곱하고 정리하면

$$(x^2)^2 - 8x^2 + 1 = 0$$

근의 공식으로 풀면

$$x^2 = 4 - \sqrt{15} \quad (\because 0 < x < 1) \cdots \textcircled{1}$$

$$x = \sqrt{4 - \sqrt{15}} \quad (\because 0 < x)$$

$$= \sqrt{\frac{8 - 2\sqrt{15}}{2}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdots \textcircled{2}$$

①, ②에 따라

$$x^2 + \sqrt{6}x$$

$$= (4 - \sqrt{15}) + \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$= 4 - \sqrt{15} + \sqrt{15} - 3 = 1$$