1. 함수 $f(x) = || x - 1 | - a |$ 에서 $f(2) = 4$ 를 만족시키는 양의 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$f(2) = 4$ 이므로

$f(2) = || 2 - 1 | - a | = 4 \rightarrow | 1 - a | = 4$

따라서 $a = -3,\ 5$ 이므로 양수 $a = 5$

2. $x : y : z = 1 : 2 : 3$일 때, $\frac{z^2}{xy} + \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{xz}$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x = k$라 하면, $y = 2k,\ z = 3k$

$$\Rightarrow \frac{z^2}{xy} + \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{xz} = \frac{9k^2}{2k^2} + \frac{k^2}{6k^2} + \frac{4k^2}{3k^2}$$

$$= \frac{9}{2} + \frac{1}{6} + \frac{4}{3} = 6$$

3. 함수 $y=-\sqrt{ax+9}-1$ 의 정의역이 $\{\ x \mid x \geq -3\ \}$이고, 치역이 $\{\ y \mid y \leq b\ \}$ 일 때, 상수 a, b 에 대하여 $a+b$의 값은? (단, $a \neq 0$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$ax+9 \geq 0$ 에서

$ax \geq -9 \quad \therefore\ x \geq -\dfrac{9}{a}$

$-\dfrac{9}{a}=-3$ 이므로 $a=3$

주어진 함수의 치역은 $\{\ y \mid y \leq -1\ \}$ 이므로

$b=-1$

$\therefore\ a+b=3+(-1)=2$

4. 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 5 또는 8 이 되는 경우의 수는?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

서로 다른 두 개의 주사위의 눈의 수를 순서쌍 (x, y) 로 나타내면

(i) 눈의 합이 5 가 되는 경우는

$(1,4)$, $(2,3)$, $(3,2)$, $(4,1)$: 4 가지

(ii) 눈의 합이 8 이 되는 경우는

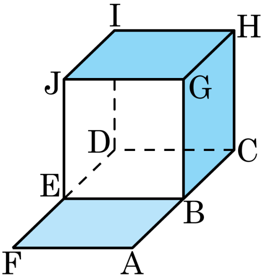
$(2,6)$, $(3,5)$, $(4,4)$, $(5,3)$, $(6,2)$: 5 가지

그런데 (i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로

$4+5=9$ (가지)

$\therefore 9$

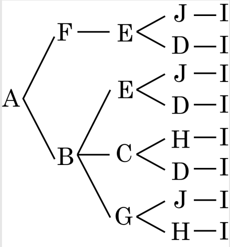
5. 다음그림은 정육면체의 뚜껑이 열려 있는 상태를 나타낸 것이다. A 에서 I 까지 최단 거리로 모서리를 따라가는 방법의 수는?



① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

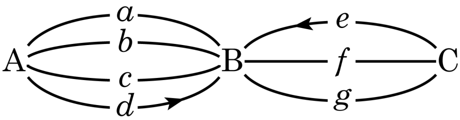
해설

A 에서 I 까지 최단 거리로 수형도를 그려보면



위의 수형도에서 구하는 방법의 수는 8가지이다.

6. 다음 그림과 같은 도로망에서 도로 d 와 e 는 화살표 방향으로 일방 통행만 되고 그 외의 도로는 양쪽 방향으로 통행이 된다고 할 때, A 지점에서 출발하여 B 지점을 거쳐 C 지점까지 갔다가 다시 B 지점을 거쳐 A 지점까지 되돌아 오는 길의 가지수는?



① 12 개 ② 36 개 ③ 64 개

④ 72 개 ⑤ 144 개

해설

$A \to B,\ B \to C,\ C \to B,\ B \to A$ 의 길의 가지수는 각각 $4, 2, 3, 3$ 이므로 구하는 길의 가지수는 $4 \times 2 \times 3 \times 3 = 72$ (개) 이다.

7. 재현이네 학교에서 학생 회장 선거에 n 명의 후보가 출마했다. 이 중 회장, 부회장, 서기를 뽑는 방법의 수가 120가지였을 때, n의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

n 명의 후보 중 회장, 부회장 서기를 뽑는 방법의 수는 ${}_nP_3$

${}_nP_3 = n(n-1)(n-2) = 120$

$120 = 6 \times 5 \times 4$ 이므로 $n = 6$

8. 다섯 개의 숫자 $1, 2, 3, 4, 5$ 에서 서로 다른 세 숫자를 택하여 세 자리의 자연수를 만들 때, 5 의 배수의 개수는?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

다섯 개의 숫자 $1, 2, 3, 4, 5$ 에서 서로 다른 세 숫자를 택하여 만든 세 자리의 자연수가 5 의 배수이려면 일의 자리의 수가 5 이어야 한다.

따라서, $1, 2, 3, 4$ 에서 서로 다른 두 숫자를 택하여 백의 자리와 십의 자리에 배열하면 되므로 구하는 5 의 배수의 개수는

${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$ (개)

9. 분수식 $2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cdots}}}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

해설

(준식)$=a$라 하면

$$2-\frac{1}{a}=a \;\rightarrow\; a^2-2a+1=0 \;\rightarrow\; (a-1)^2=0$$

$\therefore\; a=1$

10. 다음 그래프 중 평행이동에 의하여 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은?

① $y = \frac{x+1}{x-1}$
② $y = \frac{x}{x-1}$
③ $y = \frac{x-2}{x-1}$
④ $y = \frac{-x}{x-1}$
⑤ $y = \frac{x+3}{x+1}$

해설

$y = \frac{1}{x}$ 과 겹쳐지는 함수는 $y = \frac{1}{x-a} + b$ 의 꼴로 된 것이다.

$\therefore$ ② $y = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$

11. 점 (2, 3)을 지나고, $x=1$, $y=2$를 점근선으로 하는 분수함수가 있다. 이 함수의 그래프를 적당히 이동했을 때, 겹쳐질 수 없는 것은?

① $y=\dfrac{x-1}{x-2}$ ② $y=\dfrac{2x+5}{x-2}$ ③ $y=\dfrac{2x-5}{x-3}$

④ $y=\dfrac{-2x-1}{x+1}$ ⑤ $y=\dfrac{x+2}{x+1}$

해설

점근선의 방정식이 $x=1$, $y=2$ 이므로

$y=\dfrac{k}{x-1}+2$ $(k\neq 0)$ 로 놓을 수 있다.

이 그래프가 점 (2, 3) 을 지나므로

$3=k+2$ $\therefore$ $k=1$

따라서, 보기의 분수함수를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 의

꼴로 고쳤을 때, k 의 값이 1 인 그래프는 평행이동으로 겹쳐진다.

① $y=\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{(x-2)+1}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}+1$

② $y=\dfrac{2x+5}{x-2}=\dfrac{2(x-2)+9}{x-2}=\dfrac{9}{x-2}+2$

③ $y=\dfrac{2x-5}{x-3}=\dfrac{2(x-3)+1}{x-3}=\dfrac{1}{x-3}+2$

④ $y=\dfrac{-2x-1}{x+1}=\dfrac{-2(x+1)+1}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}-2$

⑤ $y=\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{(x+1)+1}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}+1$

따라서, 겹쳐질 수 없는 것은 ②번이다.

12. 280과 420의 공약수의 개수는?

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

해설

$280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7,\ 420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

최대공약수 : $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$

따라서 공약수의 개수 :

$(2+1) \times (1+1) \times (1+1) = 12$

13. 500 원짜리 동전이 2 개, 100 원짜리 동전이 3 개, 50 원짜리 동전이 4 개 있다. 이 동전의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 방법의 수는?

① 59　　② 72　　③ 105　　④ 132　　⑤ 164

해설

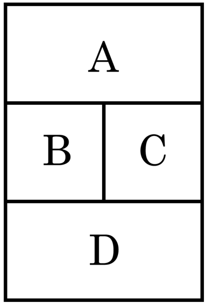
각각 지불할 수 있는 방법의 수가 3, 4, 5가지 이므로

$3 \times 4 \times 5 = 60$

여기서 지불하지 않는 경우를 빼준다.

$\therefore\ 60 - 1 = 59$

14. 원재가 가입한 동아리는 이 동아리를 상징하는 깃발을 검정, 초록, 빨강의 세 가지 색을 모두 사용하여 다음 그림과 같은 네 영역으로 구분하여 칠하려고 한다. 서로 다르게 칠하는 방법의 수를 구하여라.



▶ **답 :** ____ 가지

▷ **정답 :** 6 가지

해설

A, B, C, D 의 순서대로 색을 칠한다고 할 때, A 의 영역을 칠하는 방법의 수는 검정, 초록, 빨강의 3 가지이다. 이런 각 경우에 대하여 B 의 영역을 칠하는 방법은 3 가지 색 중에서 A 의 영역을 칠한 색을 제외한 2 가지이고, C 의 영역을 칠하는 방법의 수는 A, B 의 두 영역을 칠한 색을 제외한 1 가지이다.
마지막으로 D 의 영역을 칠하는 방법의 수는 B, C 의 두 영역을 칠한 색을 제외한 1가지 방법이다. 따라서 구하는 방법의 수는 $3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$ (가지)

15. $1, 2, 3, 4, 5$ 를 일렬로 나열하여 다섯 자리의 정수 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ 를 만들 때, $a_i = i$ 가 되지 않는 정수의 개수를 구하여라. (단, $i = 1, 2, 3, 4, 5$)

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 44 개

해설

$a_1 = 1$ 이 아니므로 a_1 이 2, 3, 4, 5인 경우에 대하여 a_2, a_3, a_4, a_5 를 각각 구해보면

정수의 개수는 44 개이다.

16. A, B, C, D 4 명을 일렬로 세울 때, A 가 가장 뒤에 서는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 6 가지

해설

세명을 일렬로 세우는 경우와 같다.

$3! = 6$

17. 서로 다른 알파벳 a, b, c, d, e를 사전식으로 배열하였을 때, 58번째 단어를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $cbdea$

해설

$a\square\square\square\square$의 경우의 수는
$4\times3\times2\times1=24$(가지)
$b\square\square\square\square$의 경우의 수는
$4\times3\times2\times1=24$(가지)
$ca\square\square\square$의 경우의 수는
$3\times2\times1=6$(가지)
그 다음 55번째의 수 부터는
$cbade$, $cbaed$, $cbdae$, $\cdots$ 이므로
58번째 단어는 $cbdea$이다.

18. 다항함수 $f(x)=\dfrac{x-a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{x-b}{(b-c)(b-a)}$ $+\dfrac{x-c}{(c-a)(c-b)}$ 일 때, $f(2013)$의 값은?

① $a+b+c$　② $a^2+b^2+c^2$　③ $a^3+b^3+c^3$
④ $ab+bc+ca$　⑤ 0

해설

주어진 식을 통분하면
(분자)
$=\{(x-a)(b-c)+(x-b)(c-a)+(x-c)(a-b)\}$
$=(b-c+c-a+a-b)x$
$+(-ab+ac-bc+ab-ca+cb)=0$
$\therefore\ f(x)=0\quad \therefore f(2013)=0$

해설

주어진 식의 분모는 0이 아니므로
$a,\ b,\ c$는 서로 다른 수이고

$$f(a)=\frac{a-b}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-c}{(c-a)(c-b)}$$
$$=\frac{-1}{b-c}+\frac{1}{b-c}=0$$
$$f(b)=\frac{b-a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b-c}{(c-a)(c-b)}$$
$$=\frac{-1}{a-c}+\frac{1}{a-c}=0$$

그런데 $f(x)$는 일차이하의 함수이고
$f(a)=f(b)=0$이므로
모든 실수 x에 대하여 $f(x)=0$이다.
$\therefore\ f(2013)=0$

19. $a+b+c=0,\ a^2+b^2+c^2=2,\ abc=3$일 때, $\dfrac{1}{a^3+b^3+c^3}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$의 값은?

① $-\dfrac{1}{9}$ ② $-\dfrac{2}{9}$ ③ $-\dfrac{1}{3}$ ④ $-\dfrac{4}{9}$ ⑤ $-\dfrac{3}{5}$

해설

$a^3+b^3+c^3=a^3+b^3+c^3-3abc+3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=9$

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=2$

$\therefore\ ab+bc+ca=-1$

$\therefore$ (준식)$=\dfrac{1}{9}+\dfrac{ab+bc+ca}{abc}=\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{2}{9}$

20. $x \geq 1$이고 $a = \dfrac{2x}{x^2+1}$일 때, $f(x) = \sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}$에 대하여 $f(x)$의 최댓값을 구하면?

① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

해설

$$\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{2x}{x^2+1}} - \sqrt{1 - \frac{2x}{x^2+1}}$$

$$= \sqrt{\frac{(x+1)^2}{x^2+1}} - \sqrt{\frac{(x-1)^2}{x^2+1}}$$

$$= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (\because \ x \geq 1)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$\therefore \ f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}$에서 $x = 1$일 때

최댓값 $f(1) = \sqrt{2}$

21. 무리함수 $f(x) = \sqrt{x+3} - 1$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점 P 의 좌표를 구하면?

① $(1,\ -2)$　　② $(-3,\ -1)$

③ $(1,\ 1)$　　④ $(-2,\ -2)$

⑤ $(1,\ 1)$, $(-2,\ -2)$

해설

$f(x)$ 와 $f^{-1}(x)$ 의 교점의 x좌표는
$f(x) = x$의 해와 같다. $\sqrt{x+3} - 1 = x$에서
$x^2 + x - 2 = 0$
$x = 1, -2$
$x = 1 (\because\ x \geq -1)$
$\therefore\ \mathrm{P} = (1, 1)$

22. 아시아 4 개국과 아프리카 4 개국이 있다. 8 개국을 2 개국씩 짝지어 4 개의 그룹으로 나누려고 한다. 적어도 한 개의 그룹이 아시아 국가만으로 이루어지도록 4 개의 그룹으로 나누는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 81 가지

해설

적어도 한 그룹이 아시아 국가만으로 이루어지는 사건의 여사건은 아시아 국가만으로 이루어진 그룹이 하나라도 있으면 안 되므로, 아시아 1 개국과 아프리카 1 개국으로 모든 그룹이 이루어진다.

$$\therefore {}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{4!}$$

$$-\left\{({}_4C_1 \times {}_4C_1) \times ({}_3C_1 \times {}_3C_1) \times ({}_2C_1 \times {}_2C_1)\right.$$

$$\left.\times\ ({}_1C_1 \times {}_1C_1) \times \frac{1}{4!}\right\}$$

$$= \frac{28 \times 15 \times 6}{4 \times 3 \times 2} - \frac{16 \times 9 \times 4}{4 \times 3 \times 2} = 105 - 24 = 81$$

23. 두 실수 a, b에 대하여 $a+b=\sqrt{7\sqrt{5}-\sqrt{3}}$, $a-b=\sqrt{7\sqrt{3}-\sqrt{5}}$가 성립할 때, a^2+ab+b^2 의 값을 구하면?

① $3\sqrt{5}+\sqrt{3}$　② $5\sqrt{5}+\sqrt{3}$　③ $5\sqrt{5}+2\sqrt{3}$

④ $2\sqrt{5}+3\sqrt{3}$　⑤ $\sqrt{5}+2\sqrt{3}$

해설

$$a^2+b^2=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(a-b)^2\}$$
$$=\frac{1}{2}(7\sqrt{5}-\sqrt{3}+7\sqrt{3}-\sqrt{5})$$
$$=3\sqrt{5}+3\sqrt{3}$$

$$ab=\frac{1}{4}\{(a+b)^2-(a-b)^2\}$$
$$=\frac{1}{4}(7\sqrt{5}-\sqrt{3}-7\sqrt{3}+\sqrt{5})$$
$$=2\sqrt{5}-2\sqrt{3}$$

$$\therefore\ a^2+ab+b^2=5\sqrt{5}+\sqrt{3}$$

24. $x = \dfrac{1}{2 - \sqrt[3]{2}}$ 일 때, $6x^3 - 12x^2 + 6x$ 의 값은?

① $2\sqrt[3]{2}$ ② $\sqrt[3]{2}$ ③ 2 ④ 1 ⑤ 0

해설

$x = \dfrac{1}{2 - \sqrt[3]{2}}$ 에서 양변에 $2 - \sqrt[3]{2}$ 를 곱하면

$(2 - \sqrt[3]{2})x = 1, \ 2x - 1 = \sqrt[3]{2}x$

$(2x - 1)^3 = 2x^3$ 을 정리하면

$6x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 0$

$\therefore \ 6x^3 - 12x^2 + 6x = 1$

25. 정수는 대학생이 되면 해외로 배낭여행을 하기로 하고, 가고 싶은 나라를 대륙별로 아래 표와 같이 적어보았다. 정수는 두 대륙을 여행하되 먼저 방문하는 대륙에서는 3개국을 여행하고, 두 번째 방문하는 대륙에서는 2개국을 여행하기로 하였다. 정수가 계획할 수 있는 배낭여행의 경우의 수를 구하여라. (단, 방문국의 순서는 고려하지 않는다.)

대륙	가고 싶은 나라
아시아	일본, 중국, 인도, 태국
유럽	프랑스, 이탈리아, 스페인, 그리스
아메리카	미국, 멕시코, 브라질
아프리카	이집트, 리비아, 튀니지

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 126 가지

해설

(i) 4 개국이 있는 2 대륙을 여행하는 경우 :

$2 \times {}_4C_3 \times {}_4C_2 = 2 \times 4 \times 6 = 48$

(ii) 3 개국이 있는 2 대륙을 여행하는 경우 :

$2 \times {}_3C_3 \times {}_3C_2 = 2 \times 1 \times 3 = 6$

(iii) 4 개국이 있는 대륙과 3 개국이 있는 대륙을 여행하는 경우 :

$4 \times ({}_4C_3 \times {}_3C_2 + {}_3C_3 \times {}_4C_2) = 72$

이상을 정리하면 126