1. 무리식 $\sqrt{x-2}$의 값이 실수가 되도록 x의 값의 범위를 정하시오.

▶ 답:

▷ 정답: $x \geq 2$

해설

$x-2 \geq 0 \quad \therefore x \geq 2$

2. $\sqrt{x+2}=2$일 때, $(x+2)^2$은?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

해설

$x+2=4$, $(x+2)^2=16$

3. $a>0,\ x=a-\dfrac{1}{a}$ 일 때, $\sqrt{x^2+4}-x$를 a로 나타내면?

① $\dfrac{2}{a}$ ② $-\dfrac{2}{a}$ ③ a ④ $2a$ ⑤ $-2a$

해설

$\sqrt{x^2+4}=\sqrt{(a-\frac{1}{a})^2+4}=\sqrt{(a+\frac{1}{a})^2}$

그런데 $a>0$ 이므로 $\sqrt{x^2+4}=a+\dfrac{1}{a}$

$\therefore\ \sqrt{x^2+4}-x=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)-\left(a-\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{2}{a}$

4. $x = 2 + \sqrt{3},\ y = 2 - \sqrt{3}$ 일 때, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ 의 값은?

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

해설

$x = 2 + \sqrt{3},\ y = 2 - \sqrt{3}$ 일 때,
$xy = 4 - 3 = 1,\ x + y = 4$
$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{14}{1} = 14$
$(\therefore x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy)$

5. 유리수 x, y가 등식 $(2x-3)+(-y+3)\sqrt{2}=1-2\sqrt{2}$를 만족할 때, xy의 값은?

① 2 ② 5 ③ 7 ④ 10 ⑤ 25

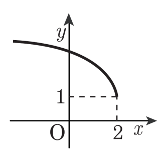
해설

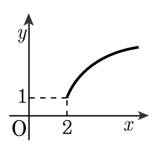
무리식의 상등에 의해 $2x-3=1,\ -y+3=-2$

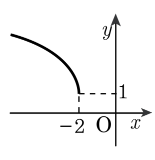
$\therefore x=2,\ y=5$

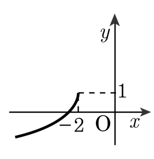
$\therefore xy=10$

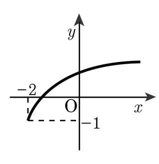
6. 함수 $y = 2\sqrt{-3x+6}+1$ 의 그래프는?

①


②


③


④


⑤


해설

$y = 2\sqrt{-3(x-2)}+1$

$\Rightarrow$ 꼭짓점 : $(2, 1)$

정의역 : $x \leq 2$, 치역 : $y \geq 1$

7. 다음 함수의 그래프 중 평행이동하여 함수 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은?

① $y = \sqrt{x}$

② $y = \sqrt{2x+1} - 1$

③ $y = \sqrt{-2x-1} - 1$

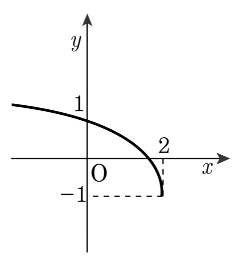
④ $y = -\sqrt{2x} + 1$

⑤ $y = -\sqrt{-2x}$

해설

$y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를
x축의 방향으로 m만큼
y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면
$y = \sqrt{2(x-m)} + n = \sqrt{2x-2m} + n$ 이 된다.

8. 다음 함수의 그래프의 식을 구하면?



① $y = \sqrt{-2x+4} - 1$

② $y = \sqrt{-x+1} - 1$

③ $y = -\sqrt{-2x+4} + 1$

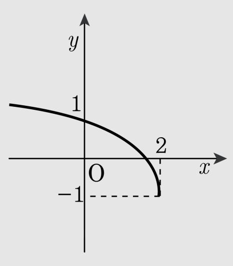
④ $y = \sqrt{x-1} - 1$

⑤ $y = \sqrt{2x-4} + 1$

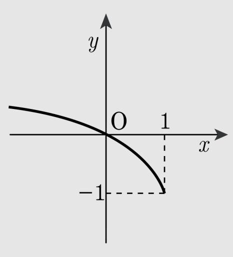
해설

보기의 함수의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

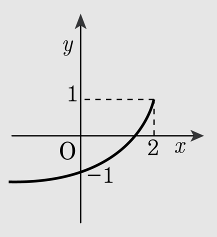
① $y = \sqrt{-2(x-2)} - 1$



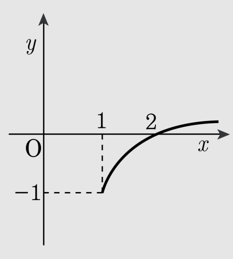
② $y = \sqrt{-(x-1)} - 1$



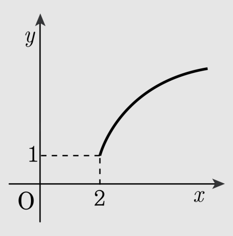
③ $y = -\sqrt{-2(x-2)} + 1$



④ $y = \sqrt{x-1} - 1$



⑤ $y = \sqrt{2(x-2)} + 1$



9. $x = \sqrt{2}+1,\ y = \sqrt{2}-1$ 일 때,
$\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ 의 값은?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $2\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{3}$

해설

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{x-y}$$

$$= \frac{x+y-2\sqrt{xy}+x+y+2\sqrt{xy}}{x-y} = \frac{2(x+y)}{x-y}$$

$$\begin{cases} x+y = \sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1 = 2\sqrt{2} \\ x-y = \sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1 = 2 \end{cases}$$

$$\therefore\ \frac{2(x+y)}{x-y} = \frac{2\times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

10. $x = 2 - \sqrt{3},\ y = 2 + \sqrt{3}$ 일 때, $\sqrt{x^2 + 6xy}$ 의 값은?

① $\sqrt{3} + 1$　　② $\sqrt{3} - 1$　　③ $2\sqrt{3} + 1$

④ $2\sqrt{3} - 1$　　⑤ $\sqrt{3}$

해설

$x^2 = (2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3} = 7 - 2\sqrt{12}$

$6xy = 6(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 6$ 에서

$$\sqrt{x^2 + 6xy} = \sqrt{13 - 2\sqrt{12}} = \sqrt{(\sqrt{12} - 1)^2}$$

$$= 2\sqrt{3} - 1$$

11. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $y = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ 일 때, 다음 식의 값은?

$$\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{y}\right)^3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

① $3(\sqrt{3} + \sqrt{2})$　　② $3(\sqrt{3} - \sqrt{2})$　　③ 9

④ $5(\sqrt{3} + \sqrt{2})$　　⑤ $7(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

해설

(주어진 식) $= \dfrac{\frac{x^3 + y^3}{(xy)^3}}{\frac{x+y}{xy}}$

$= \dfrac{(x+y)^3 - 3xy(x+y)}{(x+y)(xy)^2}$

$= \dfrac{(x+y)^2 - 3xy}{(xy)^2}$

조건에서 $x + y = 2\sqrt{3},\ xy = 1$

$\therefore$ (주어진 식)$= \dfrac{(2\sqrt{3})^2 - 3 \cdot 1}{1^2} = 9$

12. 좌표평면에서 무리함수 $y=-\sqrt{-x+2}+1$의 그래프가 지나지 않는 사분면을 모두 구하면?

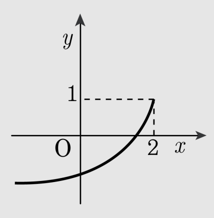
① 제 1사분면　　② 제 2사분면

③ 제 3사분면　　④ 제 1사분면, 제 2사분면

⑤ 제 3사분면, 제 4사분면

해설

무리함수의 그래프를 그려보면 아래와 같다.



따라서, 무리함수의 그래프가 지나지 않는 것은 제 2사분면이다.

13. 무리함수 $y = \sqrt{ax}$의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$ 이다.

② 치역은 $\{y \mid y \geq 0\}$ 이다.

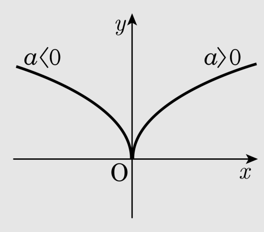
③ $y = -\sqrt{ax}$ 와 x 축에 대하여 대칭이다.

④ $y = \sqrt{-ax}$ 와 y 축에 대하여 대칭이다.

⑤ $a > 0$ 이면 원점과 제 1사분면을 지난다.

해설

$a > 0$일 때와 $a < 0$일 때의 $y = \sqrt{ax}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



그림에서 ②,③,④,⑤는 참임을 알 수있다.

그러나 $a > 0$일 때의 정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$

$a < 0$일 때의 정의역은 $\{x \mid x \leq 0\}$이므로 ①은 틀린 것이다.

14. $1 \le x \le 5$ 에서 함수 $y = -\sqrt{3x+1} + 4$ 의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = -\sqrt{3x+1} + 4 = -\sqrt{3\left(x + \frac{1}{3}\right)} + 4$

주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

$x = 1$ 일 때, 최댓값 $a = -\sqrt{3+1} + 4 = 2$

$x = 5$ 일 때, 최솟값 $b = -\sqrt{15+1} + 4 = 0$

$\therefore\ a - b = 2 - 0 = 2$

15. $x > 2$에서 정의된 두 함수 $f(x), g(x)$가
$f(x) = \sqrt{x-2}+2,\ g(x) = \dfrac{1}{x-2}+2$일 때, $(f \circ g)(3) + (g \circ f)(3)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$
$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$
$\therefore (f \circ g)(3) + (g \circ f)(3) = 6$

16. 정의역이 $\{x \mid x < 2\}$ 인 두 함수 $f(x) = \dfrac{10-3x}{x-2}$, $g(x) = 2\sqrt{5-x}+7$ 에 대하여 $(g \circ f)(-2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

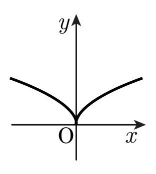
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$이므로

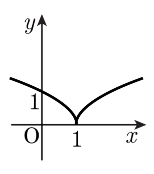
$(g \circ f)(-2) = g(f(-2))$

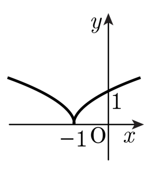
$f(-2) = \dfrac{10-3\cdot(-2)}{-2-2} = -4$

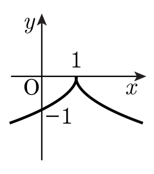
$\therefore\ (g \circ f)(-2) = g(-4) = 2\sqrt{5-(-4)}+7 = 13$

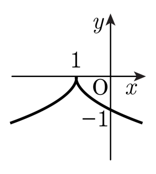
17. 다음 중 함수 $y = \sqrt{|x+1|}$ 의 그래프를 구하면?

①


②


③


④


⑤


해설

$x \geq -1$ 이면 $y = \sqrt{x+1}$

$x < -1$ 이면 $y = \sqrt{-x-1}$ 이므로

3번이 정답임.

18. $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$일 때, $\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\cdots+\frac{1}{f(99)}$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$ 이므로

$\frac{1}{f(x)}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

$\therefore$ (준 식) $=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$

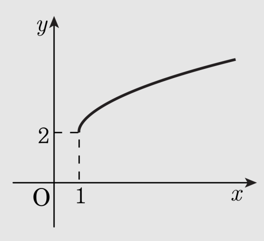
$=\sqrt{100}-1=10-1=9$

19. 무리함수 $y = \sqrt{ax+b} + c(a>0)$ 의 정의역이 $\{ x \mid x \geq 1 \}$이고, 치역이 $\{ y \mid y \geq 2 \}$일 때, $\dfrac{2a^2+c^2-2b}{2a}$ 의 최솟값을 구하면?

① $-\sqrt{2}$　　② 1　　③ $2\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{2}+1$　　⑤ $2\sqrt{2}+2$

해설

정의역과 치역의 조건에 의하여 주어진 무리함수의 그래프는 다음과 같다. 즉 $y = \sqrt{a(x-1)}+2$의 형태임을 알 수 있다.



$y = \sqrt{ax+b}+c$와 비교해보면 $b=-a, c=2$이다.

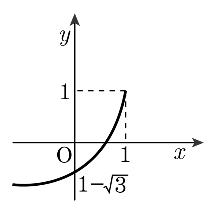
$\therefore \dfrac{2a^2+c^2-2b}{2a} = \dfrac{2a^2+4+2a}{2a} = a + \dfrac{2}{a} + 1$

$a>0$이므로 $a+\dfrac{2}{a} \geq 2\sqrt{2}$

따라서 $a+\dfrac{2}{a}+1 \geq 2\sqrt{2}+1$이므로

최솟값은 $2\sqrt{2}+1$ 이다.

20. 무리함수 $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$의 값은?



① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

주어진 그림은 $y=-\sqrt{ax}$ 의 그래프를
x축 방향으로 1, y축 방향으로 1만큼 평행이동한
것이므로 $y-1=-\sqrt{a(x-1)}$
즉 $y=-\sqrt{a(x-1)}+1$
그런데 이 그래프가 점 $(0, 1-\sqrt{3})$을 지나므로
$1-\sqrt{3}=-\sqrt{-a}+1$,
$\therefore a=-3$
$\therefore\ y=-\sqrt{-3(x-1)}+1$
$\therefore\ a+b+c=(-3)+3+1=1$

21. 무리함수 $y = \sqrt{kx}$ 의 그래프가 두 점 $(2,\ 2)$, $(3,\ 6)$ 을 잇는 선분과 만나도록 하는 정수 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 11 개

해설

함수 $y = \sqrt{kx}$ 의 그래프가 점 $(2,\ 2)$ 를 지날 때
$2 = \sqrt{2k}$, $\quad 2k = 4$
$\therefore k = 2$
또, 함수 $y = \sqrt{kx}$ 의 그래프가 점 $(3,\ 6)$ 을 지날 때
$6 = \sqrt{3k}$, $\quad 3k = 36$
$\therefore k = 12$
따라서 구하는 실수 k 의 값의 범위는
$2 \leq k \leq 12$ 이므로
정수 k 는 $2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 12$ 의 11 개다.

22. 무리함수 $y = \sqrt{x-a}+1$ 에 대하여 $f^{-1}(2) = 3$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f(3) = 2$
$\therefore 2 = \sqrt{3-a}+1$
$\therefore a = 2$

23. 무리수 $\sqrt{k}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, $a^3+b^3=9ab$을 만족하는 양의 정수 k를 구하면?

① 6　　② 4　　③ 2　　④ 1　　⑤ 11

해설

$\sqrt{k}=a+b \quad \therefore\ b=\sqrt{k}-a$

$a^3+b^3=9ab, \quad a^3+(\sqrt{k}-a)^3=9a(\sqrt{k}-a)$

$\therefore\ 3a(3a-k)+\sqrt{k}(3a^2-9a+k)=0$

$a,\ k$가 정수이므로

$3a(3a-k)=0, \quad 3a^2-9a+k=0$

연립하여 풀면

$\therefore a=2, \quad k=6$

24. 실수 x를 넘지 않는 최대의 정수를$[x]$라고 하고 $\{x\} = x - [x]$로 정의하자 $x = \sqrt{28-10\sqrt{3}}$일 때, $[\{\{x\}^{-1}\}^{-1}]$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x = \sqrt{28-10\sqrt{3}} = \sqrt{28-2\sqrt{25\times 3}} = 5-\sqrt{3}$

$[5-\sqrt{3}] = [3.2\cdots\cdots] = 3$

$\{x\} = (5-\sqrt{3}) - 3 = 2-\sqrt{3},$

$\{x\}^{-1} = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$

$\left\{2+\sqrt{3}\right\} = 2+\sqrt{3} - [2+\sqrt{3}] = \sqrt{3}-1$

$\left\{2+\sqrt{3}\right\}^{-1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} = 1.3\cdots\cdots$

따라서, $\left\{\{x\}^{-1}\right\}^{-1} = 1$

25. $x = \sqrt{3-\sqrt{8}}$일 때 $\dfrac{x^3+x^2-3x+6}{x^4+2x^3+2x+9}$의 값은?

① 1　　② 2　　③ $\frac{1}{2}$　　④ $\frac{1}{4}$　　⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$x = \sqrt{3-\sqrt{8}} = \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$ 에서

$x+1 = \sqrt{2} \rightarrow x^2+2x-1=0$

분자 : x^3+x^2-3x+6

$= (x^2+2x-1)(x-1)+5 = 5$

분모 : x^4+2x^3+2x+9

$= (x^2+2x-1)(x^2+1)+10 = 10$

$\therefore$ 준식 $= \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$