

1. $\frac{1}{a(a+1)} + \frac{2}{(a+1)(a+3)} + \frac{3}{(a+3)(a+6)}$ 을 간단히 한 것은 ?

- ① $\frac{1}{a} + \frac{6}{a+6}$ ② $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+6}$ ③ $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+6}$
④ $\frac{1}{a} - \frac{6}{a+6}$ ⑤ $\frac{2}{a} - \frac{1}{a+6}$

해설

(준식)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+3} + \frac{1}{a+3} - \frac{1}{a+6} \\ &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a+6} \end{aligned}$$

2. 분수식 $\frac{x}{x+1} + \frac{2x-1}{x-1} - \frac{3x^2+4x+2}{x^2+x}$ 를 간단히 하면?

- ① $-\frac{x-2}{x(x-1)}$ ② $\frac{x+2}{x(x+1)}$ ③ $\frac{x-2}{x(x+1)}$
 ④ $\frac{x+2}{x(x-1)}$ ⑤ $\frac{x-2}{x(x-1)}$

해설

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{x+1} &= 1 - \frac{1}{x+1}, \\
 \frac{2x-1}{x-1} &= 2 + \frac{1}{x-1}, \\
 \frac{3x^2+4x+2}{x^2+x} &= 3 + \frac{x+2}{x^2+x} \quad \text{이므로} \\
 (\text{준식}) &= \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) + \left(2 + \frac{1}{x-1}\right) \\
 &\quad - \left(3 + \frac{x+2}{x^2+x}\right) \\
 &= -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x(x+1)} \\
 &= \frac{-x(x-1) + x(x+1) - (x-1)(x+2)}{x(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{-x^2 + x + x^2 + x - x^2 - x + 2}{x(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{-x^2 + x + 2}{x(x-1)(x+1)} \\
 &= \frac{-(x^2 - x - 2)}{x(x-1)(x+1)} \\
 &= \frac{-(x-2)(x+1)}{x(x-1)(x+1)} \\
 &= -\frac{x-2}{x(x-1)}
 \end{aligned}$$

3. $\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \cdots + \frac{1}{18 \cdot 20}$ 을 계산한 값은?

- ① 0 ② $\frac{9}{20}$ ③ 40 ④ $\frac{40}{9}$ ⑤ $\frac{9}{40}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{20} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) + \cdots - \frac{1}{20} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{20} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{20} = \frac{9}{40} \end{aligned}$$

4. $1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} = 5$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} &= 1 - \frac{x-1}{x-1-x} \\ &= 1+x-1=x \\ \therefore x &= 5 \end{aligned}$$

5. 다음 중 $\frac{\frac{x}{1+x} - \frac{1+x}{x}}{\frac{1+x}{1+x} + \frac{x}{1-x}}$ 를 간단히 나타낸 것은?

- ① $-1-2x$ ② $1-2x$ ③ $1+2x$
④ $-1+2x$ ⑤ $2x$

해설

$$\text{(분자)} = \frac{x^2 - (1+x)^2}{x(x+1)} = \frac{-1-2x}{x(x+1)}$$

$$\text{(분모)} = \frac{x^2 + (1-x)(1+x)}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$$

$$\therefore \frac{\frac{-1-2x}{x(x+1)}}{\frac{1}{x(x+1)}} = \frac{-1-2x}{x(x+1)} \times x(x+1) = -1-2x$$

6. 등식 $\frac{225}{157} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e}}}}$ 을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e

의 합은?

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$$\begin{aligned} \frac{225}{157} &= 1 + \frac{68}{157} = 1 + \frac{1}{\frac{157}{68}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{21}{68}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{5}{21}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}} \end{aligned}$$

$$\therefore a = 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5$$

$$\therefore a + b + c + d + e = 15$$

7. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, $x^3 + 2x^2 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ 의 값은?

- ① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 에서 양변을 x 로 나누면

$$x - 1 + \frac{1}{x} = 0, x + \frac{1}{x} = 1$$

(주어진 식)

$$= \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$+ 2\left\{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right\} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 = -1$$

8. $2x - y$ 의 $x + y$ 에 대한 비가 $\frac{2}{3}$ 일 때, x 의 y 에 대한 비는?

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ 11 ④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{5}{4}$

해설

$$\frac{2x - y}{x + y} = \frac{2}{3}, 3(2x - y) = 2(x + y), 4x = 5y$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{5}{4}$$

9. $x+y = \frac{y+z}{8} = \frac{z+x}{5}$ 일 때, $\frac{5x^2-4y^2+z^2}{xy+3yz-2zx}$ 의 값은?

- ① 1 ② $\frac{25}{46}$ ③ 2 ④ $\frac{12}{23}$ ⑤ $\frac{13}{23}$

해설

$$x+y = \frac{y+z}{8} = \frac{z+x}{5} = k \text{ 라고 하면,}$$

$$\begin{cases} x+y = k \\ y+z = 8k \\ z+x = 5k \end{cases}$$

세 식을 각 변끼리 모두 더하면, $x+y+z = 7k$

$$\therefore x = -k, y = 2k, z = 6k$$

$$\frac{5x^2-4y^2+z^2}{xy+3yz-2zx} = \frac{5k^2-16k^2+36k^2}{-2k^2+36k^2+12k^2} = \frac{25}{46}$$

10. 유리식 $\frac{b+3c}{2a} = \frac{3c+2a}{b} = \frac{2a+b}{3c} = k$ 일 때, k 의 값을 구하면? (단, $abc \neq 0$)

- ① 2 또는 -1 ② 0 또는 -1 ③ -1 또는 -1
④ 2 또는 3 ⑤ -2 또는 -1

해설

$$\frac{b+3c}{2a} = \frac{3c+2a}{b} = \frac{2a+b}{3c} = k$$

$$\frac{b+3c}{2a} = k, \frac{3c+2a}{b} = k, \frac{2a+b}{3c} = k$$

각각 정리하면

$$b+3c = 2ak \cdots ①$$

$$3c+2a = bk \cdots ②$$

$$2a+b = 3ck \cdots ③$$

$$① + ② + ③ : 2(b+3c+2a) = k(2a+b+3c)$$

$$\Rightarrow k = 2 \text{ 또는 } 2a+b+3c = 0$$

$2a+b+3c = 0$ 인 경우,

$$① \text{에 대입해 보면 } -2a = 2ak, k = -1$$

$$\therefore k = 2, -1$$

11. $a : b = c : d$ 일 때 다음 등식 중 성립하지 않는 것은?(단, 분모는 모두 0 이 아니다.)

① $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$
 ③ $\frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$
 ⑤ $\frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$

② $\frac{a+d}{a-d} = \frac{b+c}{b-c}$
 ④ $\frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

해설

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ 에서}$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 하면

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ 에서}$$

$$\frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d} \dots \textcircled{3}$$

$$\frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d} \dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{4} \div \textcircled{3}$ 하면

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 에서 가비의 리를 이용하면

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

$$\therefore \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

12. 세 개의 숫자가 있다. 이들 중 서로 다른 두 수씩 더하면 각각 a, b, c 되고, 이 세수의 곱은 1이라 한다. 이때, 이들 세 수 중 서로 다른 두 수씩 곱한 수들의 역수의 합은?

① $a+b+c$

② abc

③ $ab+bc+ca$

④ $\frac{a+b+c}{2}$

⑤ $\frac{a+b+c}{3}$

해설

세 수를 각 p, q, r 이라고 하면

$$\begin{cases} p+q=a \\ q+r=b \\ r+p=c \end{cases}$$

$$pqr=1, p+q+r=\frac{a+b+c}{2}$$

$$\frac{1}{pq} + \frac{1}{qr} + \frac{1}{rp} = \frac{p+q+r}{pqr} = \frac{a+b+c}{2}$$

13. x km인 길을 왕복하는데 갈 때는 a km/h, 올 때는 b km/h의 속력으로 걸었다. 이때, 평균속력은?

① $\frac{x}{a+b}$
④ $\frac{2ab}{a+b}$

② $\frac{a+b}{x}$
⑤ $\frac{2(a+b)}{ab}$

③ $x(a+b)$

해설

$$\frac{2x}{\frac{x}{a} + \frac{x}{b}} = \frac{2x}{\frac{(a+b)x}{ab}} = \frac{2ab}{a+b}$$

14. p, q, M 은 양수이고, $q < 100$ 이다. 처음 M 을 $p\%$ 증가시킨 후, 다시 $q\%$ 감소시키더라도 M 보다 크게 될 조건은?

- ① $p > q$ ② $p > \frac{q}{100-q}$ ③ $p > \frac{q}{1-q}$
④ $p > \frac{100q}{100+q}$ ⑤ $p > \frac{100q}{100-q}$

해설

$$\begin{aligned}M\left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 - \frac{q}{100}\right) &> M \\ \left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 - \frac{q}{100}\right) &> 1 \\ 1 + \frac{p}{100} &> \frac{1}{1 - \frac{q}{100}} = \frac{100}{100-q}, \\ \frac{p}{100} &> \frac{q}{100-q} \\ \therefore p &> \frac{100q}{100-q}\end{aligned}$$

15. 어떤 오렌지 주스 제조 공장에서 오렌지 주스 원액 $w\%$ 가 포함되어 있는 100kL 의 혼합 주스가 있다. 지금 여기에 오렌지 주스 원액 $y\%$ 가 포함되어 있는 x kL 의 혼합 주스를 섞어 원액 $z\%$ 가 들어 있는 혼합 주스를 만들려고 한다. 이때, x 의 값을 나타내는 식을 고르면?

- ① $\frac{100(100z-w)}{y}$ ② $\frac{100(100z-w)}{y+100z}$ ③ $\frac{10000z}{y+100w}$
 ④ $\frac{100(z-w)}{y-z}$ ⑤ $\frac{(z-w)}{100(y-z)}$

해설

원액의 전체의 양은 $w + \frac{xy}{100}$ kL

또, 혼합 주스 전체의 양은 $100 + x$ kL

$$\therefore \frac{z}{100} = \frac{w + \frac{xy}{100}}{100 + x} \Leftrightarrow x = \frac{100(z-w)}{y-z}$$

16. K고등학교 1학년 남학생과 여학생 수가 같다고 한다. 1학년 학생 중에서 휴대폰을 갖고 있는 학생과 휴대폰을 갖고 있지 않은 학생의 비율이 1학년 전체로는 9 : 1이고, 남학생 중에서는 6 : 1이라고 한다면 여학생 중에서의 비율은?

① 13 : 1 ② 17 : 2 ③ 22 : 3 ④ 31 : 1 ⑤ 33 : 2

해설

전체학생수를 $10a$ 라 하면
 (휴대폰 있는 학생수) = $9a$, (휴대폰 없는 학생수) = a
 남학생수 : $5a$, 여학생수 $5a$
 남학생 중 휴대폰 있는 학생수 : $5a \times \frac{6}{7}$
 여학생 중 휴대폰 있는 학생수 : $9a - \frac{30a}{7} = \frac{33}{7}a$
 여학생 중 휴대폰 없는 학생 수 : $5a - \frac{33}{7}a = \frac{2}{7}a$
 $\therefore \frac{33}{7}a : \frac{2}{7}a = 33 : 2$

17. 분수함수 $y = \frac{x+b}{ax+1}$ 의 그래프의 점근선 중 하나가 $x = -1$ 이고 점 $(1, 2)$ 를 지난다고 한다. 이 분수함수의 정의역이 $\{x \mid -3 \leq x < -1 \text{ 또는 } -1 < x \leq 1\}$ 일 때, 치역을 구하면? (단, a, b 는 상수)
- ① $\{y \mid y < 0 \text{ 또는 } y > 2\}$ ② $\{y \mid y \leq 0 \text{ 또는 } y \geq 2\}$
 ③ $\{y \mid 0 \leq y \leq 2\}$ ④ $\{y \mid y < 1 \text{ 또는 } 1 < y \leq 2\}$
 ⑤ $\{y \mid y < 1 \text{ 또는 } y \geq 2\}$

해설

분수함수 $y = \frac{x+b}{ax+1}$ 의 그래프의 점근선 중 하나가 $x = -1$ 이므로

$$x = -\frac{1}{a} = -1$$

$$\therefore a = 1$$

따라서, 주어진 분수함수는 $y = \frac{x+b}{x+1}$

이고

이 함수의 그래프가 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

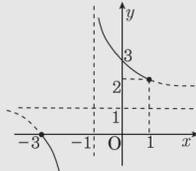
$$2 = \frac{1+b}{1+1} \quad \therefore b = 3$$

$$\therefore y = \frac{x+3}{x+1}$$

따라서 $-3 \leq x < -1$ 또는 $-1 < x \leq 1$ 에서

$$y = \frac{x+3}{x+1} = \frac{2}{x+1} + 1 \text{ 의 그래프는}$$

다음 그림과 같으므로 구하는 치역은 $\{y \mid y \leq 0 \text{ 또는 } y \geq 2\}$



18. 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x+m, y+n)$ 에 의하여 분수함수 $y = \frac{x+1}{x}$ 의 그래프가 분수함수 $y = \frac{-x+3}{x-2}$ 의 그래프로 옮겨질 때, $m-n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

분수함수 $y = \frac{x+1}{x} = \frac{1}{x} + 1$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로
 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y = \frac{1}{x-m} + 1 + n$ 이 식이

$y = \frac{-x+3}{x-2} = \frac{-(x-2)+1}{x-2} = \frac{1}{x-2} - 1$ 과 같으므로

$m=2, 1+n=-1$ 에서 $n=-2$

$\therefore m-n=4$

19. 유리함수 $y = \frac{bx+c}{x+a}$ 의 그래프가 점 $(0,2)$ 를 지나고 두 직선 $x = -1, y = 3$ 을 점근선으로 가질 때 $a+b+c$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x = -1, y = 3$ 이 점근선 이므로

$$y = \frac{bx+c}{x+a} = \frac{k}{x+1} + 3$$

점 $(0,2)$ 를 지나므로 $k = -1$

$$\therefore y = \frac{-1}{x+1} + 3 = \frac{-1+3x+3}{x+1} = \frac{3x+2}{x+1}$$

이 함수가 $y = \frac{bx+c}{x+a}$ 와 일치해야 하므로

$$a = 1, b = 3, c = 2$$

$$\therefore a+b+c = 6$$

20. 점근선이 $x = -2$, $y = 3$ 이고, 점 $(0, 5)$ 를 지나는 유리함수 $f(x)$ 의 $-6 \leq x \leq -4$ 에서의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, Mm 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$y = \frac{k}{x+2} + 3, (k \neq 0)$$

$$5 = \frac{k}{0+2} + 3 \quad \therefore k = 4$$

$$f(x) = \frac{4}{x+2} + 3$$

$$x = -6 \text{ 일 때, } M = \frac{4}{-6+2} + 3 = 2$$

$$x = -4 \text{ 일 때, } m = \frac{4}{-4+2} + 3 = 1$$

$$\therefore Mm = 2 \times 1 = 2$$

21. 유리함수 $y = \frac{bx+c}{x-a}$ 의 그래프가 점 (2,7)을 지나고 이 함수의 역함수가 $y = \frac{x+c}{x-3}$ 일 때, a, b, c 의 곱 abc 를 구하면?

- ① -27 ② -9 ③ -3 ④ 3 ⑤ 9

해설

점 (2,7)을 지나면 역함수는 (7,2)를 지난다.

$$2 = \frac{7+c}{7-3} \text{ 에서 } c = 1$$

이제 원래 함수를 구해보면 $y = \frac{x+1}{x-3}$ 에서

$$\Rightarrow x = \frac{y+1}{y-3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{3x+1}{x-1} \dots\dots \text{역함수}$$

$$\therefore a = 1, b = 3, c = 1$$

$$\therefore abc = 3$$

22. 다항함수 $f(x) = \frac{x-a}{(a-b)(a-c)} + \frac{x-b}{(b-c)(b-a)} + \frac{x-c}{(c-a)(c-b)}$ 일 때, $f(2013)$ 의 값은?

- ① $a+b+c$ ② $a^2+b^2+c^2$ ③ $a^3+b^3+c^3$
 ④ $ab+bc+ca$ ⑤ 0

해설

주어진 식을 통분하면
 (분자)
 $= \{(x-a)(b-c) + (x-b)(c-a) + (x-c)(a-b)\}$
 $= (b-c+c-a+a-b)x$
 $+ (-ab+ac-bc+ab-ca+cb) = 0$
 $\therefore f(x) = 0 \quad \therefore f(2013) = 0$

해설

주어진 식의 분모는 0이 아니므로
 a, b, c 는 서로 다른 수이고
 $f(a) = \frac{a-b}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-c}{(c-a)(c-b)}$
 $= \frac{-1}{b-c} + \frac{1}{b-c} = 0$
 $f(b) = \frac{b-a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b-c}{(c-a)(c-b)}$
 $= \frac{-1}{a-c} + \frac{1}{a-c} = 0$
 그런데 $f(x)$ 는 일차이하의 함수이고
 $f(a) = f(b) = 0$ 이므로
 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = 0$ 이다.
 $\therefore f(2013) = 0$

23. 함수 $y = \frac{2x+5}{x+1}$ 의 그래프가 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, $a - b$ 의 값은? (단, $a < 0$)

- ① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$$y = \frac{2x+5}{x+1} = \frac{2(x+1)+3}{x+1} = \frac{3}{x+1} + 2$$

이므로

주어진 함수의 그래프는 점 $(-1, 2)$ 를 지나고

고

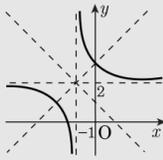
기울기가 ± 1 인 직선에 대하여 대칭이다.

이 때, 구하는 직선의 기울기가 음수이므로

직선의 방정식은 $y - 2 = -(x + 1)$

$$\therefore y = -x + 1$$

따라서 $a = -1, b = 1$ 이므로 $a - b = -2$



24. 분수함수 $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ 의 그래프와 $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ 의 그래프에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

- I. $f(0) = g(0) = -1$
 II. $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = g(x)$ 의 그래프는 서로 y 축에 대하여 대칭이다.
 III. $y = f(x-1)$ 의 그래프와 $y = g(x+1)$ 의 그래프의 점근선은 같다.

- ① I ② I, II ③ I, III
 ④ II, III ⑤ I, II, III

해설

I. $f(0) = -1, g(0) = \frac{1}{f(0)} = -1$

$\therefore f(0) = g(0) = -1$ -<참>

- II. $y = f(x)$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것은 $y = f(-x)$ 이므로

$$y = f(-x) = \frac{-x-1}{-x+1}$$

$$= \frac{x+1}{x-1}$$

$$= \frac{1}{f(x)}$$

$= g(x)$ -<참>

III. $y = f(x-1) = \frac{x-2}{x} = 1 - \frac{2}{x}$

따라서, 점근선은 $x=0, y=1$

$$y = g(x+1) = \frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x}$$

따라서 점근선은 $x=0, y=1$ -<참>

따라서 옳은 것은 (I), (II), (III) 이다.

25. $x^2 \neq 1$ 이고 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ 이라 할 때 $f(-x)$ 는?

① $\frac{1}{f(x)}$

② $-f(x)$

③ $\frac{1}{f(-x)}$

④ $-f(-x)$

⑤ $f(x)$

해설

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \text{에서}$$

$$f(-x) = \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = \frac{1}{f(x)}$$