1. 유리식 $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$을 간단히 하면? (단, $a \neq b$)

① $\dfrac{a+b}{a-b}$ ② $\dfrac{a-b}{a+b}$ ③ $\dfrac{a}{a+b}$ ④ $\dfrac{a}{a-b}$ ⑤ 1

해설

$$\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)^2}=\frac{a+b}{a-b}$$

2. $1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x(x-1)}$을 계산하면?

① 1 ② $\frac{1}{x}$ ③ $\frac{1}{x-1}$

④ $\frac{x}{x-1}$ ⑤ $\frac{x+1}{x(x-1)}$

해설

$$1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x(x-1)}$$
$$=\frac{x-1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x(x-1)}$$
$$=\frac{(x-1)^2+x}{x(x-1)}-\frac{1}{x(x-1)}$$
$$=\frac{x^2-2x+x-1}{x(x-1)}$$
$$=\frac{x^2-x}{x(x-1)}=\frac{x(x-1)}{x(x-1)}=1$$

3. 유리식 $\dfrac{a+b}{ac-bc} \div \dfrac{ab+b^2}{a^2-ab}$을 간단히 하면?

① $\dfrac{a}{b}$ ② $\dfrac{b}{ac}$ ③ $\dfrac{c}{ab}$ ④ $\dfrac{a}{bc}$ ⑤ $\dfrac{a}{c}$

해설

$$\frac{a+b}{ac-bc} \div \frac{ab+b^2}{a^2-ab} = \frac{a+b}{(a-b)c} \times \frac{a(a-b)}{b(a+b)} = \frac{a}{bc}$$

4. 분수식 $\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}}{\dfrac{4}{x-1}}$ 을 간단히 하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{x+1}{4}$

해설

(준 식) $= \dfrac{(x+1)(x-1)}{4(x-1)} = \dfrac{x+1}{4}$

5. $x : y = 4 : 3$일 때, $\dfrac{xy}{x^2 - 2y^2}$의 값을 구하면?

① -2　② 2　③ -4　④ 4　⑤ -6

해설

$x = 4k,\ y = 3k$ (단, $k \neq 0$)

$$\frac{xy}{x^2 - 2y^2} = \frac{12k^2}{16k^2 - 18k^2} = -6$$

6. 어떤 수 x의 8배에 2를 더한 수의 4분의 1은?

① $2x+\frac{1}{2}$ ② $x+\frac{1}{2}$ ③ $2x+2$

④ $2x+4$ ⑤ $2x+16$

해설

$\frac{8x+2}{4}=2x+\frac{1}{2}$

7. $y=\dfrac{3x-1}{x-1}$ 의 점근선의 방정식은 $x=1, y=a$ 이다. a 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ −1 ⑤ −2

해설

$y=\dfrac{3(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+3$

따라서 점근선의 방정식이 $x=1, y=3$ 이므로

$a=3$

8. 함수 $y = -\frac{2}{x} - 3$ 의 점근선의 방정식은?

① $x = 0,\ y = 3$ ② $x = 0,\ y = -3$ ③ $x = 1,\ y = 3$

④ $x = -1,\ y = 3$ ⑤ $x = 1,\ y = -3$

해설

$y = -\frac{2}{x} - 3$ 는 $y = -\frac{2}{x}$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 그래프이므로 점근선의 방정식은 $x = 0,\ y = -3$ 이다.

9. $\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$ 가 x 에 대한 항등식일 때, 상수 a^2+b^2 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{(a+b)x-a}{x(x-1)}$

따라서, $a+b=1$, $a=-1$

$\therefore\ a=-1$, $b=2$

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+2^2=5$

10. 다음 식을 간단히 하면 $\frac{a}{x(x+b)}$ 이다. $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수)

$$\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+8)}+\frac{1}{(x+8)(x+10)}$$

▶ 답:

▷ 정답: 15

해설

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ 임을 이용하여 부분분수로 변형하여 푼다.

(주어진 식)

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+8}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+8}-\frac{1}{x+10}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+10}\right)$$
$$=\frac{5}{x(x+10)}$$

$a=5, b=10$이므로 $a+b=15$

11. 다음 유리식을 간단히 하시오.

$$\frac{\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}}$$

① 1 ② x ③ $-x$ ④ $\frac{1}{x}$ ⑤ $-\frac{1}{x}$

해설

$$(\text{준식})=\frac{\frac{(1+x)+(1-x)}{(1-x)(1+x)}}{\frac{(1+x)-(1-x)}{(1-x)(1+x)}}=\frac{2}{2x}=\frac{1}{x}$$

해설

주어진 식의 분모와 분자에 $(1-x)(1+x)$ 를 곱하면

(준식)

$$=\frac{\frac{1}{1-x}(1-x)(1+x)+\frac{1}{1+x}(1-x)(1+x)}{\frac{1}{1-x}(1-x)(1+x)-\frac{1}{1+x}(1-x)(1+x)}$$

$$=\frac{(1+x)+(1-x)}{(1+x)-(1-x)}=\frac{2}{2x}=\frac{1}{x}$$

12. $3x = 2y \neq 0$ 일 때, $\dfrac{3x^2 + 2xy}{x^2 + xy}$ 의 값은?

① $\dfrac{5}{12}$ ② $\dfrac{12}{5}$ ③ $\dfrac{7}{12}$ ④ $\dfrac{12}{7}$ ⑤ $\dfrac{10}{3}$

해설

$3x = 2y \neq 0$ 에서 $x : y = 2 : 3$

따라서 $x = 2k,\ y = 3k\ (k \neq 0)$ 로 놓으면

$$\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + xy} = \frac{3(2k)^2 + 2 \cdot 2k \cdot 3k}{(2k)^2 + 2k \cdot 3k}$$

$$= \frac{12k^2 + 12k^2}{4k^2 + 6k^2} = \frac{24k^2}{10k^2} = \frac{12}{5}$$

13. $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}(\neq 0)$ 일 때, $\frac{3a-b-c}{3a+b+c}=-\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하여라.(단, p, q는 서로 소인 양의 정수)

▶ 답:

▷ 정답: 14

해설

$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=k(k\neq 0)$로 놓으면

$a=2k,\ b=3k,\ c=4k$

$\therefore \frac{3a-b-c}{3a+b+c}=\frac{6k-3k-4k}{6k+3k+4k}=\frac{-k}{13k}=-\frac{1}{13}$

$\therefore p=13, q=1 \quad p+q=14$

14. 양수 a, b, c, d 는 $a : b = c : d$가 성립한다. 다음 중에서 옳은 것은?

① $ac = bd$　　② $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$　　③ $a + b = c + d$

④ $a - c = b - d$　　⑤ $\dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{c}$

해설

$a : b = c : d$이면 $ad = bc$

15. 철수는 걸어서 학교에 다닌다. 한 걸음에 75 cm씩 1분에 평균 90 걸음을 가고, 통학 시간은 16분이다. 동생 철이도 같은 학교에 같은 길을 따라 걸어다니고, 한 걸음에 60 cm씩 1분에 평균 100걸음을 간다고 할 때, 동생 철이의 통학 시간은 몇 분인가?

① $14+\frac{2}{9}$분 ② 15분 ③ 18분
④ 20분 ⑤ $22+\frac{2}{9}$분

해설

철수 통학 거리는 $75\times 90\times 16(\text{cm})$

동생 철이의 통학 시간은 $\frac{75\times 90\times 16}{60\times 100}=18(\text{분})$

16. 다음 보기에 주어진 함수의 그래프 중 평행이동하였을 때, 함수 $y=\frac{x+1}{x-1}$ 의 그래프와 겹쳐질 수 있는 것을 모두 고른 것은?

보기

Ⅰ. $y=\frac{2x-5}{x-2}$
Ⅱ. $y=\frac{2}{x-1}$
Ⅲ. $y=\frac{3x+4}{x+1}$
Ⅳ. $y=\frac{2x}{x-1}$

① Ⅰ, Ⅱ ② Ⅰ, Ⅳ ③ Ⅱ, Ⅳ
④ Ⅱ, Ⅲ ⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅳ

해설

$y=\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1+2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$

이므로 $y=\frac{k}{x-p}+q$

꼴로 정리 했을 때, $k=2$ 이면

평행이동하여 그래프가 서로 겹칠 수 있다.

Ⅰ. $y=\frac{2(x-2)-1}{x-2}=2-\frac{1}{x-2}$

$\therefore k=-1$

Ⅱ. $y=\frac{2}{x-1}$ $\therefore k=2$

Ⅲ. $y=\frac{3(x+1)+1}{x+1}=3+\frac{1}{x+1}$ $\therefore k=1$

Ⅳ. $y=\frac{2(x-1)+2}{x-1}=2+\frac{2}{x-1}$ $\therefore k=2$

17. 함수 $y = -\frac{1}{x} + 1$ 의 역함수를 바르게 구한 것은?

① $y = \frac{1}{1-x}$ ② $y = \frac{1}{1+x}$ ③ $y = \frac{x}{1-x}$
④ $y = \frac{1+x}{x}$ ⑤ $y = \frac{x}{1+x}$

해설

$y = -\frac{1}{x} + 1$ 에서 $\frac{1}{x} = 1 - y$

$1 = (1-y)\,x$, $x = \frac{1}{1-y}$

$\therefore\ y = \frac{1}{1-x}$

18. 등식 $\frac{4}{11} = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}}$ 을 만족시키는 세 자연수 a, b, c 에 대하여 $a^2+b^2+c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$\frac{4}{11} = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}}$ 에서

$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}} = \frac{11}{4} = 2+\frac{3}{4}$ 이므로

$a=2$ 이고 $\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}} = \frac{3}{4}$

이 때, $b+\frac{1}{c} = \frac{4}{3} = 1+\frac{1}{3}$ 이므로 $b=1,\ c=3$

$\therefore a^2+b^2+c^2 = 2^2+1^2+3^2 = 14$

19. $2x^2-5xy-3y^2=0$이고, $xy>0$일 때, $\dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$의 값은?

① $\dfrac{2}{5}$ ② $\dfrac{4}{5}$ ③ $\dfrac{6}{5}$ ④ $\dfrac{7}{5}$ ⑤ $\dfrac{9}{5}$

해설

$2x^2-5xy-3y^2=0$

$x \times -3y$

$2x \times y$

$\Rightarrow (x-3y)(2x+y)=0$

$x=3y$ 또는 $2x=-y$

$xy>0$이므로 x, y의 부호는 같다

$\therefore x=3y$

$\Rightarrow \dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}=\dfrac{(3y-y)^2}{(3y)^2+y^2}=\dfrac{2}{5}$

20. $2x-y+z=0,\ x-2y+3z=0$ 일 때, $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2+z^2}$ 의 값을 구하면 $\dfrac{n}{m}$ 이다. 이때, $m+n$ 의 값을 구하여라.(단, m, n 은 서로소)

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$2x-y+z=0 \cdots ㉠$

$x-2y+3z=0 \cdots ㉡$

$㉠ \times 2 - ㉡ : 3x = z$

$\therefore x=\dfrac{z}{3},\ y=\dfrac{5z}{3}$

여기서 $x=k$ 라 하면 $y=5k,\ z=3k$

따라서 $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{k^2-5k^2+25k^2}{k^2+25k^2+9k^2}=\dfrac{3}{5}$ $\therefore m=5,\ n=3$

$\therefore m+n=8$

21. $t=0$에서 $t=1$까지 인구는 $i\,\%$증가하였고, $t=1$에서 $t=2$까지 인구는 $j\,\%$증가하였다면, $t=0$에서 $t=2$까지 인구 증가율은?

① $(i+j)\,\%$　② $ij\,\%$

③ $(i+ij)\,\%$　④ $\left(i+j+\frac{ij}{100}\right)\,\%$

⑤ $\left(i+j+\frac{i+j}{100}\right)\,\%$

해설

$t=0$에서의 인구는 P

$t=2$까지 인구 증가율을 $k\,\%$라 하자.

$$P\left(1+\frac{k}{100}\right)$$

$$=P\left(1+\frac{i}{100}\right)\left(1+\frac{j}{100}\right),$$

$$1+\frac{k}{100}=1+\frac{i+j}{100}+\frac{ij}{10000}$$

$$\therefore k=i+j+\frac{ij}{100}$$

22. 분수함수 $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ 의 그래프가 직선 $y=mx+1$ 과 만나지 않도록 하는 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

① $0<m\le 12$ ② $-12\le m<0$ ③ $-12<m\le 0$

④ $0\le m<12$ ⑤ $-12\le m\le 12$

해설

$y=\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{x-1+3}{x-1}=\dfrac{3}{x-1}+1$ 이므로 함수 $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ 의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

(i) 그림에서 $m=0$ 일 때
두 그래프는 만나지 않는다.

(ii) $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ 와 $y=mx+1$ 에서

$\dfrac{x+2}{x-1}=mx+1$

즉, $mx^2-mx-3=0$

이때, 판별식을 D 라 하면

$D=m^2+12m<0,\ m(m+12)<0$

$\therefore\ -12<m<0$

(i), (ii) 에서 구하는 실수 m 의 값의 범위는

$-12<m\le 0$

23. $a+\frac{1}{b}=c,\ b+\frac{1}{c}=d,\ c+\frac{1}{d}=a$ 일 때, ab의 값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{3}{2}$

해설

$c=a+\frac{1}{b}$을 $b+\frac{1}{c}=d$에 대입하면

$$d=b+\frac{1}{a+\frac{1}{b}}=b+\frac{b}{ab+1}=\frac{ab^2+2b}{ab+1}$$

c와 d를 $a=c+\frac{1}{d}$에 대입하면

$a=a+\frac{1}{b}+\frac{ab+1}{ab^2+2b}$에서 $\frac{ab+2+ab+1}{ab^2+2b}=0$

즉, $\frac{2ab+3}{ab^2+2b}=0$

따라서, $2ab+3=0$이고, $ab=-\frac{3}{2}$이다.

24. $\dfrac{a}{b+c-a}=\dfrac{b}{c+a-b}=\dfrac{c}{a+b-c}$ 의 값들의 합은?

① 0 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ -1

해설

(분모의 합)

$=(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)=a+b+c$

i) $a+b+c\neq 0$ 일 때, 가비의 리를 이용하면

$$\frac{a}{b+c-a}=\frac{b}{c+a-b}=\frac{c}{a+b-c}$$

$$=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$$

ii) $a+b+c=0$ 일 때,

$b+c=-a,\ c+a=-b,\ a+b=-c$ 이므로

$$\frac{a}{-a-a}=\frac{b}{-b-b}=\frac{c}{-c-c}=-\frac{1}{2}$$

i), ii) 에서 구하는 값은 1 또는 $-\dfrac{1}{2}$

∴ 분수식의 값들의 합은 $\dfrac{1}{2}$

25. 함수 $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 한다. $y=g(x)$ 와 $y=x$ 의 그래프가 만나는 점을 A, B 라 할 때 선분 AB 의 길이는?

① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $6\sqrt{3}$

해설

$y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 $y=x$ 에 대해 대칭이므로 $\begin{cases} y=g(x) \\ y=x \end{cases}$

의 교점은 $\begin{cases} y=f(x) \\ y=x \end{cases}$ 의 교점과 같다.

$\dfrac{x+2}{x-1}=x,\ x+2=x^2-x$

$x^2-2x-2=0,\ x=1\pm\sqrt{3}$ 이므로

$\mathrm{A}(1+\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3}),\ \mathrm{B}(1-\sqrt{3}, 1-\sqrt{3})$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{6}$