1. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 10x - 5$, $g(x) = -x^2 + 2x + 10$이 서로 같을 때, 집합 X의 개수는 몇 개인가?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

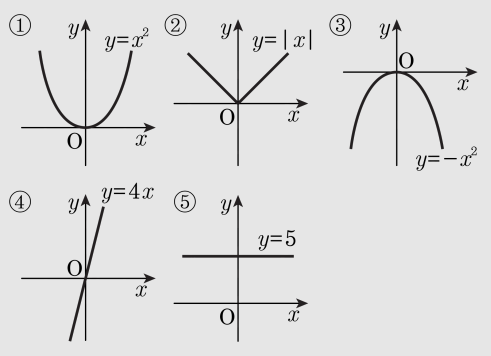
$f(x) = g(x)$이므로
$2x^2 - 10x - 5 = -x^2 + 2x + 10$에서
$3x^2 - 12x - 15 = 0$, $3(x^2 - 4x - 5) = 0$
$(x-5)(x+1) = 0$
$\therefore\ x = 5,\ -1$
즉, $x = 5$ 또는 $x = -1$일 때 $f(x) = g(x)$이다.
$\therefore\ X = \{-1\},\ \{5\},\ \{-1,\ 5\}$

2. 다음 중 일대일 함수는? (x 는 모든 실수)

① $f(x) = x^2$ ② $f(x) = |x|$ ③ $f(x) = -x^2$

④ $f(x) = 4x$ ⑤ $f(x) = 5$

해설



함수 $f : X \rightarrow Y$ 에서 정의역 X 의
각 원소의 함수값이 서로 다를 때 일대일 함수라 한다.

3. 함수 $y = |x+1| - |x-3|$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = |x+1| - |x-3|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$y = -(x+1) + x - 3 = -4$

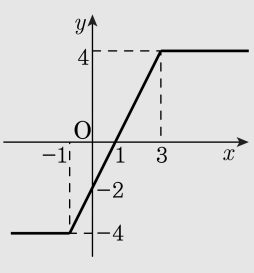
ii) $-1 \le x < 3$ 일 때

$y = x + 1 + x - 3 = 2x - 2$

iii) $x \ge 3$ 일 때

$y = x + 1 - (x-3) = 4$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로



$M = 4, m = -4$

$\therefore M - m = 4 - (-4)$

$= 8$

4. $-1 < x < 1$ 일 때, $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$ 의 값을 구하여라.

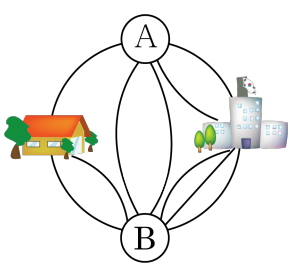
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(준식) $= \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2}$
$= |x-1| + |x+1| = -(x-1) + (x+1) = 2$

5. 집과 학교 사이에는 그림과 같이 길이 놓여 있을 때, 집에서 학교로 가는 방법의 수는? (단, 같은 지점을 두 번 지나지 않는다.)



① 22　　② 34　　③ 47　　④ 54　　⑤ 66

해설

(1) 집 $\rightarrow A \rightarrow$ 학교 : $1 \times 2 = 2$
(2) 집 $\rightarrow B \rightarrow$ 학교 : $2 \times 3 = 6$
(3) 집 $\rightarrow A \rightarrow B \rightarrow$ 학교 : $1 \times 2 \times 3 = 6$
(4) 집 $\rightarrow B \rightarrow A \rightarrow$ 학교 : $2 \times 2 \times 2 = 8$
$\therefore\ 2 + 6 + 6 + 8 = 22$

6. $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라고 할 때, $\frac{1}{b}-a$의 값은?

① $1-\sqrt{3}$　② $1+\sqrt{3}$　③ $3+\sqrt{3}$
④ $3-\sqrt{3}$　⑤ $-\frac{5+\sqrt{3}}{2}$

해설

$\sqrt{12-2\sqrt{27}}=\sqrt{9}-\sqrt{3}=3-\sqrt{3}$
$1<\sqrt{3}<2,\ -2<-\sqrt{3}<-1,\ 1<3-\sqrt{3}<2$
$a=1,\ b=3-\sqrt{3}-1=2-\sqrt{3}$
$\frac{1}{b}-a=\frac{1}{2-\sqrt{3}}-1=2+\sqrt{3}-1=1+\sqrt{3}$

7. 10명의 학생이 O, X 문제에 임의로 답하는 경우의 수는?

① 128 ② 256 ③ 512 ④ 1024 ⑤ 2048

해설

각 학생이 대답할 수 있는 가지 수가
2가지씩이므로 $\Rightarrow 2^{10} = 1024$

8. 18000 의 양의 약수 중에서 짝수의 개수는?

① 32 ② 36 ③ 40 ④ 44 ⑤ 48

해설

$18000 = 2^4 \times 3^2 \times 5^3$

따라서 양의 약수 중에서 짝수인 것의 개수는

$4 \times (2+1) \times (3+1) = 48$ (개)

9. 1, 2, 3, 4, 5 의 번호가 각각 적힌 5 개의 농구공을 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 라고 쓰여진 가방에 각각 1 개씩 넣을 때, 2 번 공은 A_1 에 넣고, k 번 공은 A_k 에 넣지 않는 경우의 수는? (단, $k = 1,\ 3,\ 4,\ 5$)

① 11 가지　　② 13 가지　　③ 17 가지
④ 21 가지　　⑤ 35 가지

해설

2 번 공을 제외한 나머지를 표를 그려 직접 구한다.

A_2	A_3	A_4	A_5
3	1	5	4
3	4	5	1
3	5	1	4
1	4	5	3
1	5	3	4
4	1	5	3
4	5	3	1
4	5	1	3
5	4	1	3
5	4	3	1
5	1	3	4

$\therefore$ 총 11 가지

10. 만 원짜리 지폐, 오천 원짜리 지폐, 천 원짜리 지폐를 가지고 거스름돈 없이 17000 원을 지불할 수 있는 서로 다른 방법의 수는 모두 몇 가지인가? (단, 사용하지 않는 지폐가 있어도 된다.)

① 6　　② 8　　③ 10　　④ 12　　⑤ 14

해설

만 원짜리 지폐, 오천 원짜리 지폐, 천 원짜리 지폐의 수를 각각 x, y, z라 하면

$10000x + 5000y + 1000z = 17000$

$\therefore 10x + 5y + z = 17$

(i) $x = 1$일 때, $5y + z = 7$이므로

(y, z)는 $(1, 2), (0, 7)$의 두 가지

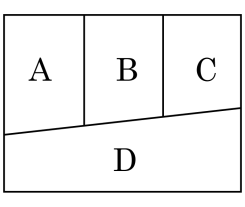
(ii) $x = 0$일 때, $5y + z = 17$이므로

(y, z)는 $(3, 2), (2, 7), (1, 12), (0, 17)$의 4가지

(i), (ii)에서 만 원짜리 지폐, 오천 원짜리 지폐, 천 원짜리 지폐를 가지고 17000 원을 지불할 수 있는 서로 다른 방법의 수는

$2 + 4 = 6$(가지)

11. 다음 그림의 네 부분에 4 가지 색을 사용하여 색칠을 하려고 한다. 한 가지 색을 여러 번 쓸 수 있고, 인접한 부분은 서로 다른 색이 칠해져야 한다면 칠하는 방법은 몇 가지인가?



① 24 ② 48 ③ 72 ④ 96 ⑤ 108

해설

가장 영역이 넓은 D 영역부터 칠한다면,
$4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$
$\therefore$ 48 가지

12. 다항식 $(a+b+c)(p+q+r)-(a+b)(s+t)$ 를 전개하였을 때 항의 개수는?

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

해설

$(a+b+c)(p+q+r)$ 의 전개식의 항의 개수는
$3\times3=9$
$(a+b)(s+t)$ 의 전개식의 항의 개수는
$2\times2=4$
따라서 구하는 항의 개수는 $9+4=13$ 이다.

13. 남학생 5명, 여학생 n 명을 일렬로 세울 때, 남학생끼리 이웃하여 서는 경우의 수가 86400가지이다. 이 때, n 의 값은?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

남학생을 하나로 보면 $n+1$ 명을 일렬로 세우는 방법과 같다 : $(n+1)!$
여기에 남학생끼리 자리를 바꾸는 방법을 곱해준다. : $(n+1)! \times 5! = 86400$
$\therefore (n+1)! = \dfrac{86400}{120} = 720 = 6!$
$\therefore n = 5$

14. 6 개의 문자 a, b, c, d, e, f를 일렬로 배열할 때, 모음 a, e가 이웃하지 않는 경우는 몇 가지가 되는지 구하여라.

▶ 답 : _____ 가지

▷ 정답 : 480 가지

해설

a, e 를 제외한 나머지 b, c, d, f 네 문자를 일렬로 먼저 배열하는 방법의 수는 $4!$ 가지가 있다.
이 때, 그 네 문자 사이의 양 끝의 5 개의 자리에 a, e를 늘어 놓으면, a, e는 이웃할 수 없다.
즉, □ b □ c □ d □ f □의 다섯 개의 □중에 두 개를 골라 a, e 를 배열한다.
따라서, 구하는 가짓수는 $4! \times {}_5P_2 = 24 \times 20 = 480$ (가지)

15. $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 을 한 번씩만 사용하여 만들 수 있는 여섯 자리 자연수 중에서 일의 자리의 수와 백의 자리의 수가 모두 3 의 배수인 자연수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : _____ 개

▷ 정답 : 48 개

해설

일의 자리의 수 a 와 백의 자리의 수 b 는 3 또는 6 이 되어야 하므로

a, b 를 정하는 방법의 수는 $2! = 2$ (가지)

이 때, 나머지 자리의 수는 $1, 2, 4, 5$ 중 어느 하나가 정해지면 되므로

나머지 네 자리의 수를 정하는 방법의 수는 $4! = 24$ (가지)

따라서, 구하는 자연수의 개수는

$2 \times 24 = 48$ (개)

16. 1 부터 9 까지의 9 개의 자연수 중에서 서로 다른 4 개를 택할 때, 짝수와 3 의 배수가 각각 2 개 이상씩 뽑히는 경우의 수는? (단, 6 은 짝수와 3 의 배수에 중복하여 세어진다.)

① 16　　② 20　　③ 25　　④ 30　　⑤ 36

해설

(i) 6이 뽑히지 않는 경우
6을 제외한 짝수 2, 4, 8중에서 2개를 뽑고,
3의 배수인 3과 9는 반드시 뽑혀야 하므로
이 경우의 수는 ${}_3C_2 \times {}_2C_2 = 3$(가지)

(ii) 6이 뽑히는 경우
6을 제외한 나머지 8개의 수 중에서

① 짝수 1개, 3의 배수 1개가 각각 뽑히는 경우
짝수 2, 4, 8중에서 1개,
3의 배수 3, 9중에서 1개,
나머지 1, 5, 7중에서 1개를 뽑아야 하므로
${}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_3C_1 = 18$(가지)

② 짝수 2개, 3의 배수 1개가 각각 뽑히는 경우
짝수 2, 4, 8중에서 2개,
3의 배수 3, 9중에서 1개를 뽑아야 하므로
${}_3C_2 \times {}_2C_1 = 6$(가지)

③ 짝수 1개, 3의 배수 2개가 각각 뽑히는 경우
짝수 2, 4, 8중에서 1개,
3의 배수 3, 9중에서 2개를 뽑아야 하므로
${}_3C_1 \times {}_2C_2 = 3$

이상에서 구하는 경우의 수는 $3 + (18 + 6 + 3) = 30$(가지)

17. 세 함수 f, g, h 에 대하여 $f(x) = x + 4$, $g(x) = -2x + 3$ 이고 $\left(f^{-1} \circ g^{-1} \circ h\right)(x) = f(x)$ 가 성립할 때, $h^{-1}(5)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

두 함수 $f(x) = x + 4$, $g(x) = -2x + 3$ 에 대하여
$f^{-1} \circ g^{-1} \circ h = f$ 이므로
$g^{-1} \circ h = f \circ f$, $h = g \circ f \circ f$

$$\begin{aligned} \therefore h(x) &= g(f(f(x))) \\ &= g(f(x+4)) \\ &= g((x+4)+4) \\ &= g(x+8) \\ &= -2(x+8)+3 = -2x-13 \end{aligned}$$

$h^{-1}(5) = a$ 라고 하면 $h(a) = 5$
$-2a - 13 = 5$, $-2a = 18$
$\therefore a = -9$
$\therefore\ h^{-1}(5) = -9$

18. $\begin{cases} 2x+1 & (x \geq 1) \\ x+2 & (x < 1) \end{cases}$ 에 대하여 $f^{-1}(5)+f^{-1}(k)=-2$ 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k=-2$

해설

$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & (x \geq 1) \\ x+2 & (x < 1) \end{cases}$ 에서

$x \geq 1$ 일 때, $f(x) \geq 3$ 이며

$x < 1$ 일 때, $f(x) < 3$ 이다.

이 때, $f^{-1}(5)+f^{-1}(k)=-2$ 에서

$f^{-1}(5)=a$ 라고 놓으면

$f(a)=5 \geq 3$ 이므로 $f(a)=2a+1=5$

$\therefore a=2$

그러므로 $f^{-1}(k)=-4$

$f(-4)=-4+2=k$ $(\because -4<3)$

$\therefore k=-2$

19. $a = \sqrt{2+\sqrt{3}}$, $b = \sqrt{2-\sqrt{3}}+1$일 때, a^2+b^2-ab-a의 값을 구하면?

① 1　　② -1　　③ 2

④ $4-2\sqrt{2}$　　⑤ $2-\sqrt{2}$

해설

$$a = \sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$
$$b = \sqrt{2-\sqrt{3}}+1 = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}+1$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}+1 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+1$$
$$b-1 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$
$$\begin{aligned} a^2+b^2-ab-a &= (a-b)^2+ab-a \\ &= (a-b)^2+a(b-1) \\ &= (\sqrt{2}-1)^2+1 \\ &= 4-2\sqrt{2} \end{aligned}$$

20. $a+\frac{1}{a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 일 때, a^5 의 값은?

① $-\sqrt{5}$ ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

$a^2+1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$

$\therefore\ a^2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a-1$

$a^5=a^4\cdot a=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}a-1\right)^2\cdot a$

$=\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}a^2-(\sqrt{5}-1)a+1\right\}\cdot a$

$=\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\times\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}a-1\right)-(\sqrt{5}-1)a+1\right\}\cdot a$

$=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}-a\right)\cdot a$

$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a-a^2$

$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}a-1\right)=1$

21. 함수 $y = \sqrt{x - \frac{1}{4}}$과 이 함수의 역함수와의 교점의 좌표를 P (a, b)라 할 때 $a + b$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

함수 $y = \sqrt{x - \frac{1}{4}}$의 역함수는 $x = \sqrt{y - \frac{1}{4}}$이고

이것은 $y = x$와 대칭관계에 있다.

따라서 두 곡선 $y = \sqrt{x - \frac{1}{4}}$, $x = \sqrt{y - \frac{1}{4}}$의 교점은

$y = \sqrt{x - \frac{1}{4}}$ 과 $y = x$의교점과같다.

$\sqrt{x - \frac{1}{4}} = x$에서 $x - \frac{1}{4} = x^2$

$4x^2 - 4x + 1 = 0, (2x - 1)^2 = 0, \therefore x = \frac{1}{2}$

즉 P $(a, b) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$에서 $a + b = 1$

22. 철수네 분단의 학생을 일렬로 세우려고 한다. 철수, 규철, 영희 세 학생 중에서는 철수가 가장 앞에 서고, 영희가 가장 뒤에 선다고 한다. 이 때, 경우의 수가 120 일 때 철수네 분단의 학생들의 수는?

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

전체를 줄세운 다음 철수, 규철, 영희 세 사람 사이에 순서를 바꾸어 줄서는 경우를 나누어 주면 된다. 철수네 분단의 학생의 수를 n 이라 하면

$\frac{n!}{3!} = 120,$

$n! = 120 \times 3! = (6 \times 5 \times 4) \times (3 \times 2 \times 1) = 6!$

$\therefore\ n = 6$

23. 7 층짜리 건물의 1 층에서 7 명이 승강기를 함께 탄 후 7 층까지 올라가는 동안 각각 2 명, 2 명, 3 명이 내리는 방법의 수는?

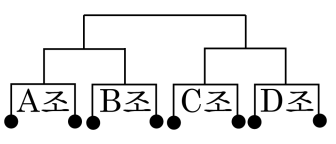
▶ 답 : _____ 개

▷ 정답 : 12600 개

해설

7 명을 2 명, 2 명, 3 명씩 3 개의 조로
나누는 방법의수는
$_7C_2 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = 105$
3 개의 조가 2 층부터 7 층까지 6 개의 층 중
3 개의 층에서 각각 내리므로 구하는 방법의 수는
$105 \times {}_6P_3 = 12600$

24. 전국 규모의 대회에서 우승한 역대 우승자 8명을 초대하여 아래 그림과 같은 토너먼트 형식으로 테니스 최강자를 가리려 한다. 이때, 선수들을 각 조에 배정하는 방법의 수는?



▶ 답 : _____ 가지

▷ 정답 : 2520 가지

해설

8명을 2명씩 4팀으로 나누는 방법의 수는

${}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{4!}$

또, 이들 4팀을 A조, B조, C조, D조로 구분하는 것은 4개를 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로 $4!$이다. 따라서 구하는 방법의 수는

${}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{4!} \times 4!$

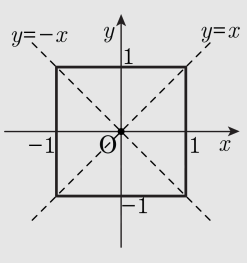
$= \frac{8 \times 7}{2} \times \frac{6 \times 5}{2} \times \frac{4 \times 3}{2} = 2520$

25. $|y-x|+|y+x|=2$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 ?

① 4　　② 6　　③ 8　　④ 10　　⑤ 12

해설

절댓값의 정의에 의하여



(ⅰ) $y-x \geq 0,\ y+x \geq 0$ 일 때,
$y-x+y+x=2$
$\therefore\ y=1$
(ⅱ) $y-x \geq 0,\ y+x < 0$ 일 때,
$y-x-y-x=2$
$\therefore\ x=-1$
(ⅲ) $y-x<0,\ y+x \geq 0$ 일 때, $-y+x+y+x=2$
$\therefore\ x=1$
(ⅳ) $y-x<0,\ y+x<0$ 일 때, $-y+x-y-x=2$
$\therefore\ y=-1$
$\therefore\ S=2\times 2=4$