1. $a^2+b^2+c^2=9,\ ab+bc+ca=9,\ a+b+c$의 값은?

① $-3\sqrt{2}$ ② $-2\sqrt{3}$ ③ $\pm 3\sqrt{3}$

④ $\pm 3\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\\ &= 9+18=27\end{aligned}$$

$$\therefore\ a+b+c=\pm 3\sqrt{3}$$

2. 이차함수 $y = -\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -4 만큼 y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동시켰을 때, 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$y = -\frac{1}{3}(x+4)^2 + 1$$

따라서 $x = -4$ 일 때, 최댓값은 1 이다.

3. 다음 함수 중 최댓값을 갖는 것은?

① $y = 2(x-3)^2$

② $y = x(x-1)$

③ $y = 3x^2 - x + 2$

④ $y = -x^2 + 4x - 3$

⑤ $y = (2x+1)(2x-1)$

해설

$y = ax^2 + bx + c$에서 $a < 0$ 일 때 이차함수가 최댓값을 갖는다.

4. 이차부등식 $ax^2+4x+a<0$이 임의의 실수 x에 대하여 성립할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $a<-2$ ② $a<0$ ③ $a<2$

④ $a<4$ ⑤ $a<8$

해설

$ax^2+4x+a<0$이 임의의 실수 x에 대하여 성립하려면

i) $a<0$

ii) $ax^2+4x+a=0$의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=2^2-a^2<0$$

$a^2-4>0, (a+2)(a-2)>0$

$\therefore a<-2$ 또는 $a>2$

i), ii)의 공통 범위를 구하면 $a<-2$

5. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $(m+2)x^2-2(m+2)x+4>0$이 항상 성립하도록 할 때, 상수 m의 값의 범위에 속한 정수의 개수는?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

모든 실수 x에 대하여 성립하기 위해서는

$m \geq -2$

$D/4=(m+2)^2-4(m+2)<0$이므로

$m^2+4m+4-4m-8=m^2-4<0$

따라서 $-2 \leq m < 2$이므로

만족하는 정수 m의 개수는

$-2,\ -1,\ 0,\ 1$의 4 개

6. 수직선 위의 두 점 $A(-3)$, $B(6)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 P, $3:2$로 외분하는 점을 Q라 한다. 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$\frac{2\times6+1\times(-3)}{2+1}=3 \text{에서 } P(3)$$

$$\frac{3\times6-2\times(-3)}{3-2}=24 \text{에서 } Q(24)$$

$$\therefore \overline{PQ}=|24-3|=21$$

7. 두 직선 $x+y=3$, $mx-y+2m-5=0$이 제 1사분면에서 만날 때, m의 값의 범위는?

① $-2<m<2$ ② $-2<m<3$ ③ $-1<m<2$

④ $1<m<4$ ⑤ $0<m<3$

해설

$mx-y+2m-5=0\cdots$①에서
$m(x+2)-(y+5)=0$이므로
위의 직선은 m의 값에 관계없이
점 $(-2,-5)$를 지나고, 기울기 m인 직선이다.
따라서 두 직선이 제 1사분면에서
만나기 위해서는 직선 ①이 $(3,0)$과 $(0,3)$을
잇는 선분의 사이를 지나면 된다.
직선 ①이 $(3,0)$을 지날 때 $m=1$이고
$(0,3)$을 지날 때 $m=4$이므로
따라서 $1<m<4$

8. x 축에 접하고 두 점 $(3, 1)$, $(-4, 8)$ 을 지나는 원 중, 반지름의 크기가 큰 원의 방정식을 구하면?

① $(x-3)^2+(y-12)^2=169$ ② $x^2+(y-5)^2=169$

③ $x^2+(y-5)^2=25$ ④ $(x-8)^2+(y-13)^2=169$

⑤ $(x-8)^2+(y-13)^2=25$

해설

구하는 원의 중심을 (a, b) 라고 하면
x 축에 접하는 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$
이 원이 두 점 $(3, 1)$, $(-4, 8)$ 을 지나므로
$(3-a)^2+(1-b)^2=b^2 \cdots\cdots$ ㉠
$(-4-a)^2+(8-b)^2=b^2 \cdots\cdots$ ㉡
㉠ − ㉡에서
$b=a+5 \cdots\cdots$ ㉢
㉢을 ㉠에 대입하면
$a^2-8a=a(a-8)=0$
$\therefore\ a=0$ 또는 $a=8$
㉢에서 $a=0$ 일 때 $b=5$, $a=8$ 일 때 $b=13$
따라서 구하는 원의 방정식은 $x^2+(y-5)^2=5^2$
또는$(x-8)^2+(y-13)^2=13^2$

9. 두 다항식 A, B에 대하여 연산 $\triangle$, $\blacktriangledown$를 $A \triangle B = 2A + B$, $A \blacktriangledown B = A - 3B$로 정의한다.

$A = 2 + 3x^2 - x^3$, $B = x^2 + 3x + 1$일 때 $A \blacktriangledown (B \triangle A)$를 구하면?

① $2x^3 - 18x - 10$

② $2x^3 - 12x^2 - 18x - 10$

③ $2x^3 + 12x^2 + 18x + 10$

④ $2x^3 + 12x^2 + 18x - 10$

⑤ $2x^3 - 12x^2 + 18x + 10$

해설

$$\begin{aligned} A \blacktriangledown (B \triangle A) &= A \blacktriangledown (2B + A) \\ &= A - 3(2B + A) = -2A - 6B \end{aligned}$$

위와 같이 식을 간단히 정리한 후 A, B에 대입하여 정리한다.

10. 등식 $2x^2-3x-1=a(x-1)(x-2)+bx(x-1)+cx(x-2)$이 x에 관한 항등식이 되도록 할 때, $a+b+c$의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

수치대입법을 이용한다.

$x=0$ 대입, $a=-\frac{1}{2}$

$x=2$ 대입, $b=\frac{1}{2}$

$x=1$ 대입, $c=2$

$\therefore\ a+b+c=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2=2$

11. x^3 의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$가 $x-1$을 인수로 갖고, x^2+2로 나누었을 때의 나머지는 $x+5$이다. 이 때, $f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는?

① -1 ② 1 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

해설

x^3 의 계수가 1이므로

$f(x) = (x^2+2)(x+\alpha)+x+5 \cdots ①$

$x-1$의 인수를 가지므로, $f(1)=0$

① 에 넣어 계산하면,

$f(1) = 3(1+\alpha)+6 = 0,\ \alpha = -3$

$\therefore\ f(2) = (2^2+2)(2-3)+2+5 = 1$

12. 연립부등식 $\begin{cases} 3(x-2) \le x-2 \\ x+1 \ge 1 \end{cases}$ 의 해가 자연수일때, 해의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 2 개

해설

$\begin{cases} 3(x-2) \le x-2 \\ x+1 \ge 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x-x \le -2+6 \\ x \ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \le 2 \\ x \ge 0 \end{cases}$

$\therefore\ 0 \le x \le 2$

따라서 자연수인 해는 1, 2로 모두 2개이다.

13. 부등식 $6(x-3) < 4x+17 \leq 6(x-2)$를 만족시키는 x 의 값 중 가장 큰 정수와 가장 작은 정수의 차를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$6(x-3) < 4x+17 \leq 6(x-2)$ 에서

$$\begin{cases} 6(x-3) < 4x+17 \\ 4x+17 \leq 6(x-2) \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 6x-18 < 4x+17 \\ 4x+17 \leq 6x-12 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x < 35 \\ 2x \geq 29 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < \dfrac{35}{2} \\ x \geq \dfrac{29}{2} \end{cases}$$

$\dfrac{29}{2} \leq x < \dfrac{35}{2}$ 에 만족하는

가장 큰 정수 : 17

가장 작은 정수 : 15

따라서 두 수의 차는 $17-15=2$ 이다.

14. 모든 실수 x, y에 대하여 부등식 $ax^2 + 2bxy + ay^2 \geq 0$성립할 때, a와 b의 관계는? (단, a, b는 양의 실수)

① $a^2 \geq b^2$ ② $b^2 \geq a^2$ ③ $a^2 + 2b \leq 1$

④ $a^2 + 2b \geq 1$ ⑤ $2a + b^2 \leq 1$

해설

$ax^2 + 2bxy + ay^2 = 0$이 항상 성립할 조건은

$a \geq 0$이고 $\dfrac{D}{4} \leq 0$이다.

$\dfrac{D}{4} = b^2y^2 - a^2y^2 \leq 0$

$(b^2 - a^2)y^2 \leq 0$

$\therefore\ a^2 \geq b^2$

15. 세 변의 길이가 $x-1,\ x,\ x+1$인 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 x의 값의 범위가 $a < x < b$라 할 때, 방정식 $ax^2-3x+b=0$의 두 근의 곱은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x-1,\ x,\ x+1$은 삼각형의 세 변이므로

$x-1>0$, $x>0$, $x+1>0$, $x-1+x>x+1$ ∴ $x>2$ ⋯⋯㉠

한편, 둔각삼각형이 되려면

$(x-1)^2+x^2<(x+1)^2$

$x^2-4x<0$에서 $0<x<4$⋯⋯㉡

㉠,㉡에서 $2<x<4$

$\therefore a=2,\ b=4$

따라서 $ax^2-3x+b=0$의 두 근의 곱은

$\frac{b}{a}=\frac{4}{2}=2$

16. 두 점의 좌표가 A $(5,\ 3)$, B $(-2,\ 1)$이고, x축 위를 움직이는 점 P 에 대하여, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$가 최소일 때 점 P 의 좌표는?

① $\mathrm{P}\left(-\frac{3}{4},\ 0\right)$ ② $\mathrm{P}\left(-\frac{1}{4},\ 0\right)$ ③ $\mathrm{P}\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$

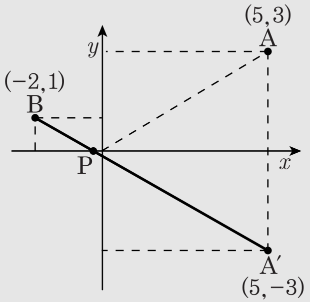
④ $\mathrm{P}\left(\frac{3}{4},\ 0\right)$ ⑤ $\mathrm{P}(1,\ 0)$

해설

A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′라 하면 A′는 $(5,\ -3)$이다.

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 이고, $\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은

점 A′와 점 B를 이은 선분의 길이와 같다.



직선 A′B 의 방정식은

$$y+3=\frac{1-(-3)}{-2-5}(x-5),\ y=-\frac{4}{7}x-\frac{1}{7}$$

이 직선과 x축과의 교점이 점 P이므로

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(-\frac{1}{4},\ 0\right)$$

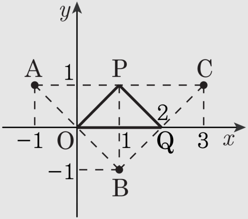
17. 좌표평면 위의 네 점 $(0,\ 0)$, $(2,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(a,\ b)$를 꼭짓점으로 하는 사각형이 평행사변형이 될 때, 다음 중 $(a,\ b)$가 될 수 있는 좌표의 개수는?

$(1,\ -1)$, $(-1,\ 1)$, $(-1,\ -1)$, $(3,\ 1)$, $(0,\ 2)$

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

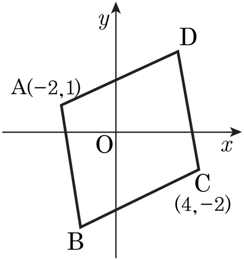
해설

그림과 같이 점 O, P, Q를 지나면서 $\overline{PQ}$, $\overline{OQ}$, $\overline{OP}$에 각각 평행인 직선들의 교점을 A, B, C라고 할 때,
□AOQP, □BQPO, □CPOQ는 모두 평행사변형이 된다.



따라서 구하는 점 $(a,\ b)$는 A, B, C 세 가지이고 $A(-1,\ 1)$, $B(1,\ -1)$, $C(3,\ 1)$ 이다.

18. 좌표평면 위에 마름모 ABCD 가 있다. 두 점 A, C 의 좌표가 각각 $(-2,\ 1)$, $(4,\ -2)$ 일 때, 두 점 B, D 를 지나는 직선의 방정식은?



① $y = x - 2$

② $y = x - \frac{5}{2}$

③ $y = 2x - \frac{3}{2}$

④ $y = 2x - 2$

⑤ $y = 2x - \frac{5}{2}$

해설

마름모의 두 대각선은 서로를 수직 이등분하므로 $\overline{BD}$ 는 $\overline{AC}$ 와 수직이고 두 점 A, C 의 중점을 지난다.

$\overline{AC}$ 의 기울기는 $\frac{1-(-2)}{-2-4} = -\frac{1}{2}$,

중점은 $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$

두 점 B, D 를 지나는 직선의 방정식은

$y = 2(x-1) - \frac{1}{2} = 2x - \frac{5}{2}$

19. 직선 $3x+4y+a=0$ 이 원 $x^2+y^2-2x+2y=2$ 에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$(x-1)^2+(y+1)^2=2^2$

직선이 원에 접하므로 원의 중심

$(1,\ -1)$ 에서 직선까지의 거리가

원의 반지름의 길이2 와 같다.

따라서, $\dfrac{|3\cdot 1+4\cdot(-1)+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

$|a-1|=10$

$a-1=\pm 10$

$a>0$ 이므로 $a=11$

20. 다음은 점 P$(a,\ b)$ 의 직선 $y=x$ 에 대해 대칭인 점 Q의 좌표 $(x,\ y)$ 를 구하는 과정이다.
$\boxed{}$ 에 알맞은 말을 차례대로 써 넣어라.

> (1) $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점 $\left(\dfrac{x+a}{2},\ \dfrac{y+b}{2}\right)$ 은 직선 $\boxed{}$ 위에 있으므로 $\dfrac{y+b}{2}=\dfrac{x+a}{2}$
> $\therefore\ x-y=b-a\cdots$①
> (2) 직선 PQ 는 직선 $y=x$ 에 수직이므로
> $\dfrac{y-b}{x-a}=\boxed{}$
> ①, ② 를 연립하여 x , y 를 구하면
> $x=\boxed{}$, $y=\boxed{}$이다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

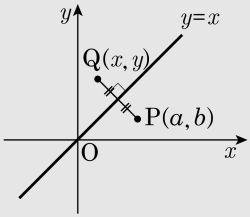
▷ 정답 : $y=x$

▷ 정답 : -1

▷ 정답 : b

▷ 정답 : a

해설



21. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $(a+b-c)(a-b+c) = b(b+2c)+(c+a)(c-a)$가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형 ② 이등변삼각형 ③ 정삼각형
④ 예각삼각형 ⑤ 둔각삼각형

해설

$(a+b-c)(a-b+c)$
$= b(b+2c)+(c+a)(c-a)$에서
$\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\} = b^2+2bc+c^2-a^2$
$a^2-b^2+2bc-c^2 = -a^2+b^2+c^2+2bc$
$2a^2 = 2b^2+2c^2$
$\therefore\ a^2 = b^2+c^2$
따라서, 이 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

22. 복소수 $z = a + bi$ 가 다음 두 조건을 만족한다.

$(1+i+z)^2 < 0$	$z^2 = c + 4i$

이 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$(1+i+z)^2 < 0$ 에서 $1+i+z$ 는 순허수이다.

$z = a + bi$라면

$1+i+z = 1+i+a+bi = (1+a)+(1+b)i$

이것이 순허수이므로 $1+a=0$, $a=-1$

$\therefore\ z = -1 + bi$

또한 $z^2 = c + 4i$ 에서 $(-1+bi)^2 = c + 4i$

$1 - 2bi - b^2 = c + 4i$

$\therefore\ -2b = 4$, $1 - b^2 = c$

$\therefore\ b = -2,\ c = -3$

$\therefore\ a^2 + b^2 + c^2 = 14$

23. 방정식 $x^2+2(m-1)x-m+3=0$의 두 근을 모두 음이 되게 하는 실수 m의 범위를 정하면?

① $-2<m<3$ ② $2\le m<3$ ③ $-1<m<3$

④ $1<m\le 3$ ⑤ $3<m\le 4$

해설

두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때 두 근이 모두 음수이므로

(i) $\dfrac{D}{4}=(m-1)^2+m-3\ge 0$

$m^2-m-2\ge 0,\ \ (m-2)(m+1)\ge 0$

$\therefore\ \ m\le -1,\ \ m\ge 2$

(ii) $\alpha+\beta=-2(m-1)<0 \quad \therefore\ \ m>1$

(iii) $\alpha\beta=-m+3>0 \quad \therefore\ \ m<3$

$\therefore$ (i), (ii), (iii)의 공통범위는 $2\le m<3$

24. 원점 $O(0,\ 0)$ 에서 직선 $(k+1)x+(k+2)y+3=0$ 에 내린 수선의 길이가 최대일 때, 그 길이는? (단, k 는 상수)

① 2 ② 3 ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

원점과 직선 사이의 거리를 d 라 하면

$$d=\frac{|3|}{\sqrt{(k+1)^2+(k+2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2k^2+6k+5}}$$

$$\leq \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=3\sqrt{2}$$

$(\because\ \sqrt{2k^2+6k+5}$

$$=\sqrt{2\left(k+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\geq\sqrt{\frac{1}{2}})$$

25. 점 $(1,\ 4)$ 를 지나는 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선이 점 $(2,\ 5)$ 를 지날 때, 처음 직선의 기울기는?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

원점에 대하여 대칭이동한 직선이 점 $(2,\ 5)$ 를 지나므로 처음 직선은 점 $(-2, -5)$ 를 지난다.
따라서 처음 직선은 두 점 $(1, 4)$, $(-2, -5)$ 를 지나므로 구하는 기울기는 $\dfrac{4-(-5)}{1-(-2)} = 3$