1. 두 점 A(3, 2), B(6, 5)에 대하여 $2\overline{AP} = \overline{BP}$를 만족시키는 점을 P라 할 때, 점 P와 직선 $x+y+3=0$ 사이의 거리의 최솟값은?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$2\overline{AP} = \overline{BP}$에서 $4\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$

점 P의 좌표를 (x, y)로 놓으면

$4\{(x-3)^2 + (y-2)^2\} = (x-6)^2 + (y-5)^2$

$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0$

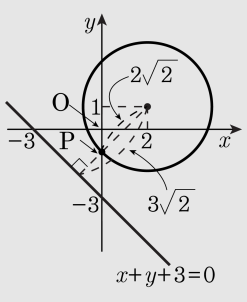
$\therefore (x-2)^2 + (y-1)^2 = 8$

따라서 점 는 중심이 $(2, 1)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원 위를 움직인다.

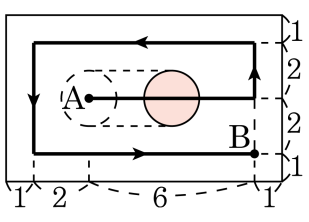
이때, 원의 중심 $(2, 1)$과 직선 $x+y+3=0$ 사이의 거리는 $\frac{|2+1+3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 3\sqrt{2}$이므로

아래 그림에서 점 P와 직선 $x+y+3=0$ 사이의 거리의 최솟값은

$3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$



2. 가로의 길이가 10, 세로의 길이가 6 인 오른쪽 그림과 같은 직사각형의 내부에서 반지름의 길이가 1 인 원이 지나간 자리에는 형광 페인트가 칠해진다고 한다. 원의 중심이 그림과 같이 A 부터 B 까지 화살표 방향의 경로를 따라 움직일 때, 직사각형의 영역 중 형광 페인트가 칠해지지 않는 부분의 넓이는? (단, 경로를 구성하는 모든 선분은 직사각형의 변에 평행하거나 수직이다.)

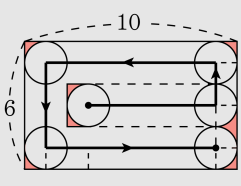


① 0 ② $10-\frac{5}{2}\pi$ ③ $8-2\pi$

④ $6-\frac{3}{2}\pi$ ⑤ $4-\pi$

해설

반지름의 길이가 1 인 원이 화살표 방향을 따라 이동할 때 지나지 않는 부분은 다음 그림에서 어두운 부분이다.



따라서 그 넓이는 한 변의 길이가 2 인 정사각형에서 반지름의 길이가 1 인 원을 제외한 부분의 넓이의 2 배와 같다.

즉 $2(4-\pi)$

3. 점 $(1,\ 2)$ 를 점 $(a,\ b)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $x+2y-1=0$ 은 직선 $x+2y-4=0$ 으로 이동하였다. 이때, $a+2b$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

x 축으로 m , y 축으로 n 만큼 평행이동했다고 하면,
$(x-m)+2(y-n)-1=0,\ x+2y-m-2n-1=0$을
$x+2y-4=0$ 과 비교해 보면,
$-m-2n=-3\ \cdots$ ㉠
점 $(1,\ 2)$ 를 x 축으로 m , y 축으로 n 만큼 평행이동 시키면,
$(1+m,\ 2+n)$
$\Rightarrow\ \ 1+m=a,\ \ 2+n=b$
$\Rightarrow\ \ a+2b=m+1+4+2n=8$
$(\because$ ㉠에서 $m+2n=3\ )$

4. 좌표평면에서 점 $\mathrm{P}(1,4)$ 를 다음 평행이동식 $f:(x,y)\to(x+m,y+n)$ 에 의하여 이동시킨 점을 Q 라고 할 때, 두 점 P,Q 는 직선 $y=2x$ 에 대하여 대칭이다. 이 때, $m+n$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{2}{5}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

해설

$\mathrm{Q}=(1+m,4+n)$ 으로 나타낼 수 있다.

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 기울기는 $y=2x$ 에 수직이므로 $-\frac{1}{2}$ 이고,

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점 $\left(\frac{2+m}{2},\frac{8+n}{2}\right)$ 은

$y=2x$ 위에 있다.

$\Rightarrow$ i) $\frac{n}{m}=-\frac{1}{2}$

ii) $\frac{8+n}{2}=m+2$

i) 과 ii) 를 연립하면, $m=\frac{8}{5},\ n=-\frac{4}{5}$

$\therefore\ m+n=\frac{4}{5}$

5. 빈이의 주머니에 0, 1, 2의 숫자가 적힌 카드가 들어 있고, 혜교의 주머니에는 1, 2, 3의 숫자가 적힌 카드가 들어있다. 둘이서 카드를 하나씩 꺼낼 때, 두 숫자를 곱하여 생기는 숫자들을 원소나열법으로 나타내어라.

▶ 답:

▷ 정답: {0, 1, 2, 3, 4, 6}

해설

빈이의 주머니에 들어 있는 숫자 0, 1, 2를 하나씩 차례로 혜교의 카드 1, 2, 3에 곱하면

$0 \times 1 = 0$, $0 \times 2 = 0$, $0 \times 3 = 0$

$1 \times 1 = 1$, $1 \times 2 = 2$, $1 \times 3 = 3$

$2 \times 1 = 2$, $2 \times 2 = 4$, $2 \times 3 = 6$ 이다.

여기서 생기는 숫자는 모두 0, 1, 2, 3, 4, 6이므로 원소나열법으로 나타내면 {0, 1, 2, 3, 4, 6} 이다.

6. 다음 두 집합 $A = \{x \mid x$는 30보다 작은 4의 배수$\}$, $B = \{4,\ 12,\ a \times 8,\ 16,\ 20,\ b+3,\ c\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 일 때, 자연수 a 가 될 수 있는 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$A = \{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24,\ 28\}$,
$B = \{4,\ 12,\ a \times 8,\ 16,\ 20,\ b+3,\ c\}$ 이므로,
$a \times 8,\ b+3,\ c$ 는 각각 $8,\ 24,\ 28$ 중 하나여야 한다.
$a \times 8 = 8$ 일 때 a 값이 최소가 되고,
$a \times 8 = 28$ 일 때 a 값이 최대가 되지만,
$a \times 8 = 28$ 일 때의 a 값은 자연수가 아니므로 될 수 없다.
따라서 a 값이 최대일 때는 $a \times 8 = 24$ 일 때이다.
$\therefore\ a = 3$

7. 집합 $A = \{x \mid x$는 13 보다 크고 27 보다 작은 자연수 $\}$의 부분집합 중에서 원소 14, 22는 반드시 포함하고, 홀수는 포함하지 않는 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 32 개

해설

$A = \{14, 15, 16, \cdots, 26\}$의 부분집합 중 원소 14, 22는 반드시 포함하고, 홀수 15, 17, 19, 21, 23, 25는 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$2^{13-2-6} = 2^5 = 32$ (개)

8. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$일 때, $X \subset A$, $A - X = \{1, 4\}$를 만족하는 집합 X의 원소를 모두 더하면?

① 4 ② 5 ③ 8 ④ 10 ⑤ 15

해설

$X \subset A, A - X = \{1, 4\} \Rightarrow X = \{2, 3, 5\}$

$\therefore 2 + 3 + 5 = 10$

9. 전체집합 $U = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ 의 두 부분집합 $A = \{3, 6, 15\}$, $B = \{3, 6, 9, 12\}$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $A^c = \{9, 12, 18\}$ ㉡ $B^c = \{15\}$

㉢ $A \cup B^c = \{3, 6, 15, 18\}$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠ , ㉢

④ ㉡ , ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

벤 다이어그램을 그리면 다음과 같다.

따라서 ㉡ 에서 $B^c = \{15, 18\}$ 이므로 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

10. 50 명의 학생에게 a, b 의 두 문제를 풀게 하였더니, a 를 푼 학생은 41 명이었고, b 를 푼 학생은 34 명이며, a, b 를 모두 못 푼 학생은 7 명이었다. a 만 푼 학생은 몇 명인가?

① 2 명 ② 7 명 ③ 9 명 ④ 15 명 ⑤ 32 명

해설

먼저, a, b 중 적어도 하나를 푼 학생은 $50 - 7 = 43$(명) 이다. 43 명에서 b 를 푼 학생을 빼면 a 만 푼 학생만 남는다.
따라서 a 만 푼 학생은 $43 - 34 = 9$(명) 이다.

11. 세 조건 $p : x \le -2$ 또는 $1 \le x \le 5$, $q : x \le a$, $r : x \le b$에 대하여 p는 q이기 위한 충분조건, p는 r이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 옳은 것은?

① a의 최댓값은 -2이고, b의 최솟값은 5이다.

② a의 최솟값은 -2 이고, b의 최댓값은 5이다.

③ a의 최댓값은 5이고, b의 최솟값 -2이다.

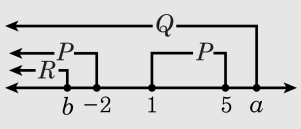
④ a의 최솟값은 5이고, b의 최댓값은 -2이다.

⑤ a, b의 최댓값, 최솟값은 존재하지 않는다.

해설

$p \to q, P \subset Q$

$r \to p, R \subset P$



$\therefore b \le -2$ 그리고 $a \ge 5$

a의 최솟값은 5이고 b의 최댓값은 -2이다.

12. 명제「$p \rightarrow \sim q$」의 역이 참일 때, 반드시 참인 명제는?

① $p \rightarrow q$　② $\sim p \rightarrow q$　③ $\sim p \rightarrow \sim q$

④ $\sim q \rightarrow p$　⑤ $\sim q \rightarrow \sim p$

해설

주어진 명제의 역「$\sim q \rightarrow p$」가 참이므로, 반드시 참인 명제는 역의 대우인「$\sim p \rightarrow q$」도 참이다.