

1. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 3x - 2$ 에 대하여 $(f \circ g)(1) = 2$, $(g \circ f)(2) = 3$ 을 만족하는 상수 a , b 의 합 $4a + b$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(f \circ g)(1) = 2$ 에서

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = a + b$

$\therefore a + b = 2$

2. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = ax + b|x|$ (a, b 는 상수)가 역함수를 가질 조건은?

- ① $a^2 - b^2 < 0$ ② $a^2 - b^2 > 0$ ③ $a + b > 0$
④ $a - b > 0$ ⑤ $a - b < 0$

해설

$$f(x) = \begin{cases} (a+b)x & (x \geq 0) \\ (a-b)x & (x < 0) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 역함수를 가지려면

$f(x)$ 가 증가함수이거나 감소함수이어야 하므로

두 직선 $y = (a+b)x, y = (a-b)x$ 의 기울기의 부호가 같아야 한다.

$$\therefore (a+b)(a-b) > 0, \quad a^2 - b^2 > 0$$

3. 실수에서 정의된 함수 $f(x) = ax - 3$ 에 대하여 $f^{-1} = f$ 가 성립하도록 하는 상수 a 의 값을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$f^{-1} = f \text{ 에서 } f^{-1}(x) = f(x), f(f(x)) = x$$

$$f(f(x)) = f(ax - 3) = a(ax - 3) - 3 = x$$

모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$\therefore a^2 = 1, -3a - 3 = 0$$

$$\therefore a = -1$$

4. 두 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \geq 2) \\ 2x + 1 & (x < 2) \end{cases}$, $g(x) = 3x - 1$ 에 대하여 $(f \circ g^{-1})(2)$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 3 ③ 6 ④ 8 ⑤ 11

해설

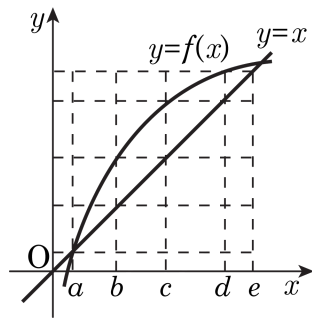
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \geq 2) \\ 2x + 1 & (x < 2) \end{cases}, g(x) = 3x - 1 \quad g^{-1}(2) = a \text{ 라고 하면}$$

$$g(a) = 2, 3a - 1 = 2$$

$$\therefore a = 1 \text{ 이므로 } (f \circ g^{-1})(2) = f(g^{-1}(2)) = f(1)$$

$$\therefore f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \quad (\because 1 < 2)$$

5. 함수 $y = f(x)$ 의 역함수를 $y = g(x)$ 라 할 때, $y = f(x)$ 의 그래프를 이용하여 $g(a) + f(b) + f(c) - g(d) - g(e)$ 의 값을 구하면?

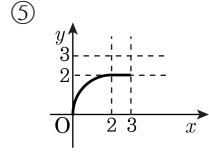
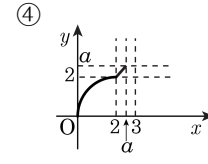
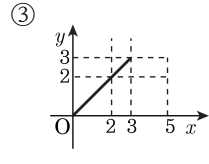
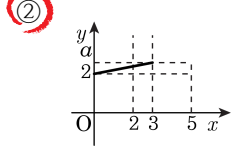
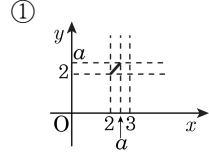
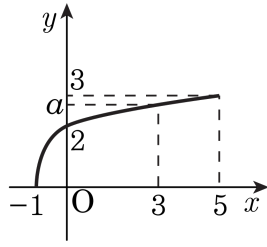


- ① a
- ② c
- ③ $a + b - c$
- ④ $a + c - e$
- ⑤ $a + b + c - d - e$

해설

$$\begin{aligned} f(d) &= e, f(c) = d, f(b) = c, f(a) = a \\ \Rightarrow g(a) + f(b) + f(c) - g(d) - g(e) \\ &= a + c + d - c - d = a \end{aligned}$$

6. 실수 $-1 \leq x \leq 5$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같다. 합성함수 $(f \circ f)(x)$ 의 그래프는?



해설

실수 $-1 \leq x \leq 5$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 이므로 $(f \circ f)(x)$ 함수는 $f(f(x))$ 에서 $f(x)$ 의 치역을 정의역으로 하는 함수이다. 따라서 합성함수 $(f \circ f)(x)$ 는 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq 3$)가 되고 치역은 $2 \leq y \leq a$ 이다.

7. 두 함수 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -x + 2$ 의 역함수를 각각 f^{-1} , g^{-1} 라고 할 때, $(f \circ (f \circ g)^{-1} \circ f)(5)$ 의 값은?

① -1 ② -3 ③ -5 ④ -7 ⑤ -9

해설

$$\begin{aligned} f \circ (f \circ g)^{-1} \circ f &= f \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) \circ f \\ &= f \circ g^{-1} \circ (f^{-1} \circ f) \\ &= f \circ g^{-1} \circ I \\ &= f \circ g^{-1} \end{aligned}$$

따라서, 구하는 값은 $(f \circ g^{-1})(5) = f(g^{-1}(5))$

$g^{-1}(5) = k$ 로 놓으면 $g(k) = 5$

$-k + 2 = 5$ 에서 $k = -3$, 즉 $g^{-1}(5) = -3$

$\therefore f(g^{-1}(5)) = f(-3) = 2 \times (-3) - 1 = -7$

8. 역함수가 존재하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f^{-1}(3) = 2$ 이고 $f(3x-4) = g(x)$ 라 할 때, $g^{-1}(3)$ 의 값은?

① 6

② 5

③ 4

④ 3

⑤ 2

해설

$$g^{-1}(3) = k \text{ 라 하면 } g(k) = 3$$

$$\therefore f(3k-4) = g(k) = 3$$

$$f^{-1}(3) = 3k-4 = 2 \text{ 이므로 } k = 2$$

$$\therefore g^{-1}(3) = 2$$

9. 함수 $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ($x \geq 0$) 의 역함수를 $g(x)$ 라 할때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 3 ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$x \geq 0$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프와
직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면
 $\frac{1}{2}x^2 = x$ 에서 $x^2 - 2x = 0$, $x(x - 2) = 0$
 $\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$
따라서 두 교점의 좌표가 $(0, 0)$, $(2, 2)$ 이므로
두 교점 사이의 거리는 $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

10. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow A$ 를

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & (x \geq 2) \\ 4 & (x = 1) \end{cases} \quad \text{로 정의한다.}$$

이때, $f^{100}(1) - f^{100}(4)$ 의 값을 구하여라.
(단, $f^{n+1} = f \cdot f^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$))

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

주어진 함수는 2 이상의 숫자는 1을 빼주고,
1은 4로 대응시킴을 의미한다.
다음 그림처럼 f 를 계속 합성하면
4번째에는 모든 원소가 자기자신으로 대응한다.
 $\therefore f^4(x) = x$
 $\therefore f^{100}(x) = f^{96}(x) = f^{92}(x) = \dots = f^4(x) = x$
 $\therefore f^{100}(1) - f^{100}(4) = 1 - 4 = -3$

